Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 632-636
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86084

Hans汉斯

Upper Bounds of Moderate Deviations for the Estimator in the Non-Stationary Ornstein-Ulenbeck Process

Jin Shao

Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: nhushaojin@163.com

Received: Oct. 15th, 2018; accepted: Oct. 27th, 2018; published: Nov. 8th, 2018

Abstract

We study the maximum likelihood estimator of the drift estimation in a non-stationary Ornstein-Uhlenbeck process. Upper bounds of moderate deviations for this estimator are obtained.

Keywords

Drift Estimation, Moderate Deviations, Non-Stationary Ornstein-Uhleneck Process

非平稳Ornstein-Uhlenbeck过程中参数估计量的中偏差上界

邵　金

南京航空航天大学理学院数学系，江苏　南京
Email: nhushaojin@163.com

收稿日期：2018年10月15日；录用日期：2018年10月27日；发布日期：2018年11月8日

摘　要

对于非平稳Ornstein-Uhlenbeck过程，我们研究它的漂移项参数的极大似然估计量，得到了该估计量的中偏差上界。

文章引用: 邵金. 非平稳 Ornstein-Uhlenbeck 过程中参数估计量的中偏差上界[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 632-636.
DOI: 10.12677/pm.2018.86084

关键词

漂移项参数，中偏差，非平稳Ornstein-Uhlenbeck过程

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

考虑如下的非平稳 Ornstein-Uhlenbeck (O-U)过程：

$$dX_t = \theta X_t dt + dW_t, X_0 = x_0, t \ge 0 \tag{1}$$

其中 W 为标准布朗运动，参数 $\theta \in \mathbb{R}$ 未知。P_θ 表示(1)的解的概率分布，(1)的似然率过程可具体表示如下[1]：

$$\left.\frac{dP_{\theta_1}}{dP_{\theta_0}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left\{(\theta_1 - \theta_0)\int_0^T X_s dX_s - \frac{\theta_1^2 - \theta_0^2}{2}\int_0^T X_s^2 ds\right\} \tag{2}$$

其中，$\mathcal{F}_T = \sigma(W_s, s \le T)$，$\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$。基于 $\{X_t, t \ge 0\}$ 的观测值，θ 在 P_θ 之下的极大似然估计量(MLE)为：

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T X_s dX_s}{\int_0^T X_s^2 ds}.$$

已知 $\hat{\theta}_T$ 是强相合的，但根据 θ 的值可知，分布行为和相应的速度是不同的。

1) 若 $\theta < 0$，(1)中过程 X 是遍历的，且

$$\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_T - \theta\right) \Rightarrow N(0, -2\theta),$$

其中$\Rightarrow$表示依分布收敛。Florens-Landais 和 Pham [2]利用 Gärtner-Ellis 定理得到了大偏差。Bercu 和 Rouault [3]提出了精细大偏差，而Guillin 和Liptser [4]得到了中偏差。Gao 和Jiang [5]研究了一些偏差不等式以及中偏差。

2) 若 $\theta > 0$，(1)中过程 X 是非常返的，且

$$\frac{e^{\theta T}}{\sqrt{2\theta}}\left(\hat{\theta}_T - \theta\right) \Rightarrow \frac{\nu}{\eta},$$

其中，ν 和 η 为两个独立的高斯随机变量[6]。

对于非平稳 Ornstein-Uhlenbeck 过程，如 $\theta > 0$ 的情况，Bercu，Coutin 和 Savy [7]已经研究了 $\hat{\theta}_T$ 的精细大偏差。本文受非平稳高斯自回归过程的中偏差启发，考虑估计量 $\hat{\theta}_T$ 的中偏差上界。

2. 引理及证明

接下来介绍两个关键引理。

令 $b_T, T \ge 0$ 为一个非负函数且满足 $b_T = o(T)$。

引理 1：若 $\theta > 0$，对任意的 $\alpha > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\log E_{P_\theta}\exp\left\{-\alpha e^{2b_T x - 2T\theta}\int_0^T X_t^2 dt\right\} = \begin{cases} -x, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

证明：由 Girsanov's 公式，对 $\mu > 0$，Florens-Landais 和 Pham [2]得到

$$\log E_{P_\theta}\exp\left\{-\mu\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}$$
$$=-\frac{T}{2}\left(\theta+\sqrt{\theta^2+2\mu}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2\sqrt{\theta^2+2\mu}}+\frac{\theta+\sqrt{\theta^2+2\mu}}{2\sqrt{\theta^2+2\mu}}\mathrm{e}^{-2T\sqrt{\theta^2+2\mu}}\right)$$
$$-\frac{x_0^2\mu}{\theta-\sqrt{\theta^2+2\mu}\coth\left(T\sqrt{\theta^2+2\mu}\right)}$$

当 $\theta>0$ 时，有

$$\log E_{P_\theta}\exp\left\{-\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}}+\frac{\theta+\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}}{2\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}}\mathrm{e}^{-2T\sqrt{\theta^2+2\alpha e^{2b_Tx-2T\theta}}}\right)$$
$$-\frac{x_0^2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}{\theta-\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}\coth\left(T\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}\right)}-\frac{T}{2}\left(\theta+\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}\right)$$
$$:=L_1(T)+L_2(T)+L_3(T)$$

由泰勒公式，我们有

$$\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}=\theta+\frac{\alpha}{\theta}\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}+o\left(\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}\right),$$

由此可推得

$$\lim_{T\to\infty}L_2(T)=-\theta x_0^2,\ L_3(T)=-\theta T+\mathrm{O}\left(T\mathrm{e}^{2b_Tx-2\theta T}\right). \tag{3}$$

对 $L_1(T)$，由简单计算得到

$$\frac{\theta}{2\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}}=\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}{\theta^2}}}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2\theta^2}\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}+o\left(\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}\right)$$

和

$$\frac{\theta+\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}}{2\sqrt{\theta^2+2\alpha\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}}\mathrm{e}^{-2T\sqrt{\theta^2+2\alpha e^{2b_Tx-2T\theta}}}=\mathrm{e}^{-2T\sqrt{\theta^2+2\alpha e^{2b_Tx-2T\theta}}}+o\left(\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}\right).$$

因此，

$$L_1(T)=-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\alpha}{2\theta^2}\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}+\mathrm{e}^{-2T\sqrt{\theta^2+2\alpha e^{2b_Tx-2T\theta}}}+o\left(\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}\right)\right). \tag{4}$$

若 $x\geq 0$，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}}{\mathrm{e}^{-2T\sqrt{\theta^2+2\alpha e^{2b_Tx-2T\theta}}}}=+\infty$$

利用(3)和(4)，可推得

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\left(L_1(T)+L_3(T)\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\left(-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\alpha}{2\theta^2}\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}+o\left(\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}\right)\right)-\theta T+\mathrm{O}\left(T\mathrm{e}^{2b_Tx-2T\theta}\right)\right)=-x \tag{5}$$

另一方面，若 $x<0$，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{e^{2b_T x-2T\theta}}{e^{-2T\sqrt{\theta^2+2\alpha e^{2b_T x-2T\theta}}}}=0,$$

可推得

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\left(L_1(T)+L_3(T)\right)\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\left(-\frac{1}{2}\log\left(e^{-2T\sqrt{\theta^2+2\alpha e^{2b_T x-2T\theta}}}+o\left(e^{2b_T x-2T\theta}\right)\right)-\theta T+O\left(Te^{2b_T x-2T\theta}\right)\right)=0\end{aligned}\tag{6}$$

结合(3)，(5)和(6)，引理1得证。

引理2：对任意 $r>0$，有

$$P_\theta\left(\left|\hat{\theta}_T-\theta\right|\ge r\right)\le 2\inf_{q>1}\left(E_{P_\theta}\exp\left\{-\frac{r^2}{2}(q-1)\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明：因为对任意 $p>1$，有

$$\exp\left\{\lambda p\int_0^T X_s\mathrm{d}W_s-\frac{p^2}{2}\lambda^2\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\},T\ge 0$$

是 $\mathcal{F}_T$-鞅，对任意 $\lambda>0$，

$$\begin{aligned}&P\left(\hat{\theta}_T-\theta\ge r\right)\\&\le E_{P_\theta}\exp\left\{\lambda\int_0^T X_s\mathrm{d}W_s-r\lambda\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\\&=E_{P_\theta}\exp\left\{\lambda\int_0^T X_s\mathrm{d}W_s-\frac{p}{2}\lambda^2\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s+\frac{p}{2}\lambda^2\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s-r\lambda\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\\&\le\left(E_{P_\theta}\exp\left\{\lambda p\int_0^T X_s\mathrm{d}W_s-\frac{p^2}{2}\lambda^2\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\left(E_{P_\theta}\exp\left\{\left(\frac{pq}{2}\lambda^2-qr\lambda\right)\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(E_{P_\theta}\exp\left\{\left(\frac{pq}{2}\lambda^2-qr\lambda\right)\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

其中，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。结合 $\inf_{\lambda>0}\left\{\frac{pq}{2}\lambda^2-qr\lambda\right\}=-\frac{r^2}{2}(q-1)$，可得

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_T-\theta\ge r\right)\le\inf_{q>1}\left(E_{P_\theta}\exp\left\{-\frac{r^2}{2}(q-1)\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

故引理2得证。

3. 主要结论及证明

定理：若 $\theta>0$，$\left\{\left|e^{\theta T}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\right|^{\frac{1}{b_T}},T>0\right\}$ 以速度 b_T 满足中偏差上界，且速率函数为

$$I(x)=\begin{cases}\log x, & x\ge 1;\\0, & 0<x<1;\\+\infty, & x\le 0.\end{cases}$$

如，对任意闭集 $F\subset\mathbb{R}$，

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\log P_\theta\left(\left|e^{\theta T}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\right|^{\frac{1}{b_T}}\in F\right)\le-\inf_{x\in F}I(x).$$

证明：对任意给定 $x>0$，由引理 2 有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\log P_\theta\left(\left|e^{\theta T}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\right|^{\frac{1}{b_T}}\ge x\right)\\
&=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\log P_\theta\left(\frac{\log\left|e^{\theta T}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\right|}{b_T}\ge\log x\right)\\
&=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\log P_\theta\left(\left|\hat{\theta}_T-\theta\right|\ge e^{b_T\log x-\theta T}\right)\\
&\le\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{b_T}\inf_{q>1}\frac{1}{q}\log\left(2E_{P_\theta}\exp\left\{-\frac{q-1}{2}e^{2b_T\log x-2\theta T}\int_0^T X_s^2\mathrm{d}s\right\}\right)\\
&=-\sup_{q>1}\frac{\log x}{q}=\begin{cases}-\log x, & x\ge1;\\ 0, & 0<x<1.\end{cases}
\end{aligned}$$

结合 Worms [8]中引理 3，定理得证。

基金项目

南京航空航天大学 2017 年研究生创新基地(实验室)开放基金立项资助项目(项目编号：kfjj20170805)。

参考文献

[1] Kutoyants, Yu.A. (2003) Statistical Inference for Ergodic Diffusion Process. Springer, Berlin.

[2] Florens-Landais, D. and Pham, H. (1999) Large Deviations in Estimate of an Ornstein-Uhlenbeck Model. *Journal of Applied Probability*, **36**, 60-77. https://doi.org/10.1239/jap/1032374229

[3] Bercu, B. and Rouault, A. (2002) Sharp Large Deviations for the Ornstein-Uhlenbeck Process. *Theory of Probability and Its Application*, **46**, 1-19. https://doi.org/10.1137/S0040585X97978737

[4] Guillin, A. and Liptser, R. (2006) Examples of Moderate Deviation Principles for Diffusion Processes. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, *Series B*, **6**, 77-102.

[5] Gao, F.Q. and Jiang, H. (2009) Deviation Inequalities and Moderate Deviations for Estimators of Parameters in an Ornstein-Uhlenbeck Process with Linear Drift. *Electronic Communications in Probability*, **14**, 210-223. https://doi.org/10.1214/ECP.v14-1466

[6] Dietz, H.M. and Kutoyants, Yu.A. (2003) Parameter Estimation for Some Non-Recurrent Solutions of SDE. S*tatist. Decisions*, **21**, 29-45. https://doi.org/10.1524/stnd.21.1.29.20321

[7] Bercu, B., Coutin, L. and Savy, N. (2012) Sharp Large Deviations for the Non-Stationary Ornstein-Uhlenbeck Process. *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 3393-3424. https://doi.org/10.1016/j.spa.2012.06.006

[8] Worms, J. (2001) Large and Moderate Deviations Upper Bounds for the Gaussian Autoregressive Process. *Statistics and Probability Letters*, **51**, 235-243. https://doi.org/10.1016/S0167-7152(00)00134-6

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org