**Pure Mathematics** 理论数学, 2019, 9(1), 46-48
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91006

Hans汉斯

# A Note on the Indeterminate

**Yi Chen, Xiaoyou Chen***

College of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan
Email: 1785253121@qq.com, *cxy19800222@163.com

Received: Dec. 12th, 2018; accepted: Jan. 1st, 2019; published: Jan. 9th, 2019

## Abstract

**Let $D$ be an integral domain and $Q$ be its field of fractions. It is proved in this note that $x$ is an indeterminate over $D$ if and only if so is $x$ over $Q$.**

## Keywords

**Indeterminate, Integral Domain, Field of Fractions, Polynomial Ring**

# 关于未定元的注记

**陈　意，陈晓友***

河南工业大学，理学院，河南　郑州
Email: 1785253121@qq.com, *cxy19800222@163.com

收稿日期：2018年12月12日；录用日期：2019年1月1日；发布日期：2019年1月9日

## 摘　要

**设$D$是一个整环，$Q$是其商域，本文证明了$x$是$D$上的未定元，当且仅当$x$是$Q$上的未定元。**

## 关键词

**未定元，整环，商域，多项式环**



*通讯作者。

文章引用: 陈意, 陈晓友. 关于未定元的注记[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 46-48.
DOI: 10.12677/pm.2019.91006

## 1. 引言

本文所使用的符号和术语都是标准的，可参考[1] [2]与[3] [4]。

假定 $R_0$ 是一个具有单位元的交换环，$R$ 是 $R_0$ 的子环并且包含 $R_0$ 的单位元。设 $\alpha \in R_0$，一个可以写成

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \left(a_i \in R, i = 0,1,2,\cdots,n\right)$$

形式的 $R_0$ 的元称作 $R$ 上的 $\alpha$ 的多项式，其中 $a_i$ 称为多项式的系数。

$R_0$ 的一个元 $x$ 称作 $R$ 上的一个未定元，如果在 $R$ 里找不到不全为零的元 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使得

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

令 $b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ 是环 $R$ 上一个一元多项式，则非负整数 $n$ 称为这个多项式的次数。特别地，多项式 0 没有次数。

值得注意的是，$R_0$ 中未必存在 $R$ 上的未定元。例如，有理数集合中就不存在整数集合上的未定元。不过，却有如下的结论：

给定具有单位元的交换环 $R$，必存在 $R$ 上的未定元 $x$，而也就有 $R$ 上的多项式环 $R[x]$ 存在。

在本文中，关于未定元的刻画，我们有下面的结论。

**命题 1**：设 $D$ 是一个整环，$Q$ 是 $D$ 的商域，则 $x$ 是 $D$ 上的一个未定元，当且仅当 $x$ 是 $Q$ 上的未定元。

## 2. 证明

为命题的证明，我们需要下面的几个引理，其中引理 1 与引理 3 分别是[3，第三章第十节定理 1]和[3，第三章第十节定理 3]。

**引理 1**：无零因子的交换环 $R$ 必是一个域 $F$ 的子环，其中 $F$ 刚好是由所有元

$$\frac{a}{b}\left(a, b \in R, b \neq 0\right)$$

所做成的，其中

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} = b^{-1}a\ 。$$

**引理 2**：若 $R$ 是一个整环，则 $R$ 上的一元多项式环 $R[x]$ 也是一个整环。

**证明**：注意到，$R[x]$ 是一个有单位元的交换环。要证 $R[x]$ 是一个整环，只需证明 $R[x]$ 是没有零因子。

设 $f(x), g(x) \in R[x], f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$，那么 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可写成

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \left(a_i \in R, i = 1,2,\cdots,m\right)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \left(b_j \in R, j = 1,2,\cdots,n\right)$$

的形式，这里 $a_m \neq 0, b_n \neq 0$。于是

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m+n} x^{m+n} \left(c_k \in R, k = 1,2,\cdots,m+n\right)。$$

但 $a_m, b_n \in R$，而 $R$ 无零因子，所以 $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$，从而 $f(x)g(x) \neq 0$。因此，$R[x]$ 无零因子。

**引理 3**：若 $R$ 是一个至少含两个元素的环，$F$ 是一个包含 $R$ 的域，则 $F$ 包含 $R$ 的一个商域。

**命题的证明：**若 $x$ 为 $Q$ 上的一个未定元，则由 $D\subset Q$ 可知 $x$ 也是 $D$ 上的未定元。

设 $x$ 为 $D$ 上的未定元，由 $Q$ 是 $D$ 的商域可知 $x\notin Q$，下证 $x$ 也是 $Q$ 上的未定元。因 $x$ 为 $D$ 上的未定元，所以存在一元多项式环 $D[x]$。由引理 2，可知 $D[x]$ 也为整环。从而，存在域 $F$ 使得 $D[x]$ 成为 $F$ 的子环。注意到，$D\subset F$。由引理 3，$Q\subset F$。

在 $F$ 中考虑运算，假设有 $Q$ 中不全为零的元 $\frac{c_0}{b_0},\frac{c_1}{b_1},\cdots,\frac{c_n}{b_n}$，其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n\in D$ 不全为零，$b_0,b_1,\cdots,b_n\in \mathrm{D}$ 均不为零，使得

$$\frac{c_0}{b_0}+\frac{c_1}{b_1}x+\cdots+\frac{c_n}{b_n}x^n=0。$$

于是，

$$\frac{1}{b_0b_1\cdots b_n}\left(c_0b_1\cdots b_n+c_1b_0b_2\cdots b_nx+\cdots+c_nb_0b_1\cdots b_{n-1}x^n\right)=0。$$

故

$$c_0b_1\cdots b_n+c_1b_0b_2\cdots b_nx+\cdots+c_nb_0b_1\cdots b_{n-1}x^n=0。$$

由于 $x$ 为 $D$ 上的未定元，所以，

$$c_0b_1\cdots b_n=0,c_1b_0b_2\cdots b_n=0,\cdots,c_nb_0b_1\cdots b_{n-1}=0$$

又 $D$ 无零因子，故 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 均为零，矛盾。

## 致　谢

作者感谢河南工业大学理学院科教融合项目以及河南工业大学“大学生创新创业训练计划项目”的支持。作者同时感谢审稿人的宝贵意见。

## 基金项目

本文由河南工业大学项目(26510009)、河南省教育厅项目(17A110004)以及科技厅项目(182102410049)资助。

## 参考文献

[1] Jacobson, N. (1985) Basic Algebra. W. H. Freeman and Company, New York.

[2] Rotman, J.J. (2000) A First Course in Abstract Algebra. Prentice Hall, Upper Saddle River.

[3] 张禾瑞. 近世代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978: 102-124.

[4] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org