Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 29-35
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91004

Compactness of Hardy-Type Toeplitz Operators on the Dirichlet Space

Youqi Liu, Xue Chen

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing
Email: itx026@163.com, 2471869189@qq.com

Received: Dec. 7th, 2018; accepted: Jan. 1st, 2019; published: Jan. 8th, 2019

Abstract

In this paper, we study the semi-commutativity, compactness, Fredholm properties and essential spectrum of Hardy-Type Toeplitz operators which are induced by Szegö projection and bounded harmonic symbol on the Dirichlet space. It gives that the operator is compact if and only if its symbol is zero. Also, it points out that the condition about the product of two operators is still a Toeplitz operator, and calculates the essential spectrum.

Keywords

Toeplitz Operator, Dirichlet Space, Semi-Commutativity, Compactness, Fredholm Properties, Essential Spectrum

Dirichlet空间上Hardy型Toeplitz算子的紧性

刘柚岐，陈　雪

重庆师范大学，数学科学学院，重庆
Email: itx026@163.com, 2471869189@qq.com

收稿日期：2018年12月7日；录用日期：2019年1月1日；发布日期：2019年1月8日

摘　要

本文讨论了**Dirichlet**空间上由**Szegö**投影以及有界调和符号诱导的**Hardy**型**Toeplitz**算子的半交换性、紧性、**Fredholm**性质和本质谱。给出了此算子紧的充分必要条件为算子的符号为零。同时，指出了两个算子的乘积仍然是**Toeplitz**算子时符号所满足的条件，并计算了本质谱。

关键词

Toeplitz算子，Dirichlet空间，半交换性，紧性，Fredholm性质，本质谱

文章引用: 刘柚岐, 陈雪. Dirichlet 空间上 Hardy 型 Toeplitz 算子的紧性[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 29-35.
DOI: 10.12677/pm.2019.91004

1. 引言

记 $\mathbb{D}$ 为复平面上的单位开圆盘，$\partial\mathbb{D}$ 表示开圆盘的边界，$\mathrm{d}A=\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 表示正规的面积测度。Sobolev 空间 $L^{2,1}$ 是由单位开圆盘 $\mathbb{D}$ 上满足 $\left|\int_{\mathbb{D}}u\mathrm{d}A\right|^2+\int_{\mathbb{D}}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right|^2\right)\mathrm{d}A<+\infty$ 的函数 u 构成的空间，且空间 $L^{2,1}$ 在内积

$$\langle u,v\rangle_{L^{2,1}}=\int_{\mathbb{D}}u\mathrm{d}A\int_{\mathbb{D}}\bar{v}\mathrm{d}A+\left\langle\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial z}\right\rangle_{L^2}+\left\langle\frac{\partial u}{\partial \bar{z}},\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right\rangle_{L^2}$$

下构成 Hilbert 空间。

Bergman 空间 L_a^2 是由 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 中所有解析函数构成的空间。L_a^2 是 Hilbert 空间，其内积规定为 $\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}}f\bar{g}\mathrm{d}A$。Dirichlet 空间 D 是由 Sobolev 空间 $L^{2,1}$ 中导数属于 L_a^2 且在原点取值为 0 的解析函数构成的空间。因此 D 也是 Hilbert 空间，内积为 $\langle f,g\rangle_D=\langle f',g'\rangle$。

Douglas 在文[1]中讨论了 Hardy 空间上 Teoplitz 算子的交换性。此外，Zhu & Zheng [2]主要刻画了 Hardy 空间和 Bergman 空间上的空间理论和算子理论。由于 Dirichlet 空间是由函数导数来定义的，因此其性质结构与经典的 Hardy 空间，Bergman 空间有着许多的不同之处。Cao [3]讨论了 Dirichlet 空间上 Toeplitz 算子的 Fredholm 性质及本质谱。Duistermaat [4]讨论了带调和符号的 Toeplitz 算子的交换性。Yu [5]刻画了 Dirichlet 空间的 Toeplitz 算子是紧的当且仅当此算子为零算子。在[6]中，Chartrand 主要研究了 Hardy 型、Bergman 型算子的有界性问题。

本文主要讨论了 Dirichlet 空间上 Hardy 型 Toeplitz 算子的半交换性、紧性、Fredholm 性质和本质谱。

2. 预备知识

我们知道空间 $D\subset H^2$ (Hardy 空间)。令 P_H 表示从 $L^2(\partial\mathbb{D})$ 到 $H^2(\mathbb{D})$ 上的正交投影。如果边界 $\partial\mathbb{D}$ 上的函数 φ 满足 $\varphi D\subset L^2(\partial\mathbb{D})$，则我们可以定义从 D 到 H^2 的 Toeplitz 算子为

$$T_\varphi f=P_H(\varphi f)=\int_{\partial\mathbb{D}}\varphi f\left(e^{i\theta}\right)\frac{1}{1-ze^{-i\theta}}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},\tag{1}$$

其中 $z\in\mathbb{D}$，$f\in D$ 且 $K_z\left(e^{i\theta}\right)=\frac{1}{1-\bar{z}e^{i\theta}}$ 表示 Szegö 投影的核。

记调和函数

$$\varphi=\varphi_1+\bar{\varphi}_2=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\chi_n+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}\chi_{-n},$$

其中 φ_1，φ_2 是解析函数。记正整数集为 $\mathbb{Z}^+$，由于 $\left\{\frac{z^l}{\sqrt{l}}\right\}(l\in\mathbb{Z}^+)$ 是空间 D 的标准正交基，所以 $f=\sum_{l=1}^{+\infty}b_l\frac{z^l}{\sqrt{l}}$，$f\in D$。从而

$$P_H(\varphi f)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{a_nb_l}{\sqrt{l}}z^{n+l}+\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{l}\frac{a_{-n}b_l}{\sqrt{l}}z^{l-n}=P_1+P_2。$$

令 $\hat{\varphi}_1$ 表示 φ_1 的 Poisson 积分。如果 $\hat{\varphi}_1 \in D$，$\varphi_2 \in L^2(\partial\mathbb{D})$，则

$$\|P_1\|_D^2 = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{a_n b_l}{\sqrt{l}}z^{n+l}\right\|_D^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{n+l}{l}|a_n b_l|^2 \le \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}|a_n b_l|^2 + \|\hat{\varphi}_1\|_D^2\|f\|_D^2,$$

$$\|P_2\|_D^2 = \left\|\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{l}\frac{a_{-n} b_l}{\sqrt{l}}z^{l-n}\right\|_D^2 = \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{l}\frac{l-n}{l}|a_{-n} b_l|^2 \le \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{l}|a_{-n} b_l|^2 \le \|\varphi_2\|_{L^2(\partial\mathbb{D})}^2\|f\|_D^2。$$

设 φ 是边界 $\partial\mathbb{D}$ 上的有界调和函数，令 $G=\{\varphi:\hat{\varphi}_1\in D,\varphi_2\in L^2(\partial\mathbb{D})\}$。若 $\varphi\in G$ 满足 $\varphi D\subset L^2(\partial\mathbb{D})$，那么 Toeplitz 算子 T_φ 可以定义在空间 D 上。因为 $\|P_1\|_D^2\le 2\|\hat{\varphi}_1\|_D^2\|f\|_D^2$，$\|P_2\|_D^2\le\|\varphi_2\|_{L^2(\partial\mathbb{D})}^2\|f\|_D^2$ 且 P_1 和 P_2 正交，则此算子 T_φ 在空间 D 上是有界的。

3. 紧性和半交换性

我们称 φ 是可导的指的是它到圆盘内部的 Possion 扩张是可导的。为了方便，这种意义下，我们不再区分 φ 和它的 Possion 扩张。一般地，$T_\varphi^*\ne T_{\bar{\varphi}}$。在[7]中，我们讨论了 $T_\varphi^*{=}T_{\bar{\varphi}}$ 的充要条件是 φ 为常值。

定理 3.1： 设 $\varphi\in G$。如果 $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\in L_a^2$，则 $T_\varphi^*-T_{\bar{\varphi}}$ 是紧算子当且仅当 φ 是共轭解析的。

证明： 对 $\forall f,g\in D$，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle\left(T_\varphi^*-T_{\bar{\varphi}}\right)f,g\right\rangle_D &= \left\langle f,T_\varphi g\right\rangle_D-\left\langle T_{\bar{\varphi}}f,g\right\rangle_D\\ &=\left\langle f,\varphi g\right\rangle_{L^{2,1}}-\left\langle\bar{\varphi}f,g\right\rangle_{L^{2,1}}\\ &=\left\langle f',\frac{\partial\varphi}{\partial z}g\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}f,g'\right\rangle\end{aligned}。$$

不失一般性，令 $f_l=z^l$，$g=z^k\left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$，则 f_l 在 D 上弱收敛到 0。从而

$$\begin{aligned}\left\langle\left(T_\varphi^*-T_{\bar{\varphi}}\right)f_l,g\right\rangle_D &= \left\langle f_l',\varphi_1'g\right\rangle-\left\langle\varphi_2'f_l,g'\right\rangle\\ &=\left\langle lz^{l-1},\sum_{n=0}^{+\infty}na_nz^{n-1+k}\right\rangle-\left\langle\sum_{n=1}^{+\infty}n\bar{a}_{-n}z^{n-1+l},kz^{k-1}\right\rangle\end{aligned}。$$

对固定的 k，总有 $l>k$。因此，我们有

$$\left\langle\left(T_\varphi^*-T_{\bar{\varphi}}\right)f_l,g\right\rangle_D=\left\langle lz^{l-1},\sum_{n=0}^{+\infty}na_nz^{n-1+k}\right\rangle=(l-k)\bar{a}_{l-k}。$$

于是，若 $T_\varphi^*-T_{\bar{\varphi}}$ 是紧算子，则 $\left\|\left(T_\varphi^*-T_{\bar{\varphi}}\right)f_l\right\|_D\to 0$。因此，由 Cauchy-Schwarz 不等式知 $(l-k)|\bar{a}_{l-k}|\to 0$。进一步地，我们有 $a_{l-k}=0$。又因为系数 $l-k\in\mathbb{N}$（自然数），故必要条件得证。反之，显然。证毕。

定理 3.2： 如果 $\varphi\in G$，则 T_φ 紧当且仅当 $\varphi=0$。

证明： 显然，如果 $\varphi{=}0$，则 T_φ 是紧的。若 T_φ 紧，令 $f_l=\frac{z^l}{\sqrt{l}}\left(l\in\mathbb{Z}^+\right)$，则 $\|f_l\|_D=1$，$f_l\xrightarrow{w}0$，$\|T_\varphi f_l\|_D\to 0$。

因为 $\frac{1}{1-ze^{-i\theta}}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-ik\theta}z^k$，于是由(1)知，

$$T_\varphi f_l(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}(\varphi f)\left(e^{i\theta}\right)e^{-ik\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}z^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\langle\varphi f,\chi_k\rangle_{H^2}z^k。$$

又 $\varphi f\left(e^{i\theta}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{l}}\chi_{n+l}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{-n}}{\sqrt{l}}\chi_{l-n}$，则

$$\left\|T_\varphi f_l\right\|_D^2=\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\left\langle\varphi f,\chi_k\right\rangle_{H^2}\right|^2\left\langle z^k,z^k\right\rangle_D=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{l}\left|a_{k-l}\right|^2。$$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，当 $l>N$ 时有 $\lim\limits_{l\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{l}\left|a_{k-l}\right|^2<\varepsilon$。固定 $l_0\left(l_0>N\right)$，对 $\forall k\in\mathbb{N}$，我们有 $\frac{k}{l_0}\left|a_{k-l_0}\right|^2<\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{l_0}\left|a_{k-l}\right|^2<\varepsilon$，于是 $\left|a_{k-l_0}\right|=0$，即 $a_{k-l_0}=0$。又因为 $k\geq0$，从而当 $l_0\to+\infty$ 时，系数 $k-l_0$ 可以取遍整数集。故 $a_n=0\left(n\in\mathbb{Z}\right)$，进而 $\varphi=0$。证毕。

接下来，我们考虑两个算子的乘积的紧性问题。假设

$$\psi=\psi_1+\overline{\psi}_2=\sum_{m=0}^{+\infty}b_m\chi_m+\sum_{m=1}^{+\infty}b_{-m}\chi_{-m}。$$

定理 3.3： 如果 $\varphi,\psi\in G$，则 $T_\varphi T_\psi-T_{\varphi\psi}$ 是紧算子当且仅当 φ 共轭解析或 $\overline{\psi}_2$ 是多项式。

证明： 对 $l\in\mathbb{Z}^+$，我们有

$$\begin{aligned}T_\varphi T_\psi z^l&=P_H\left[\varphi P_H\left(\psi z^l\right)\right]\\&=P_H\left[\left(\varphi_1+\overline{\varphi}_2\right)\left(\hat{\psi}_1z^l+P_H\left(\overline{\psi}_2z^l\right)\right)\right]\\&=\hat{\varphi}_1\hat{\psi}_1z^l+P_H\left(\overline{\varphi}_2\psi_1z^l\right)+P_H\left(\varphi_1P_H\left(\overline{\psi}_2z^l\right)\right)+P_H\left(\overline{\varphi}_2P_H\left(\overline{\psi}_2z^l\right)\right)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}T_{\varphi\psi}z^l&=P_H\left(\varphi\psi z^l\right)\\&=P_H\left(\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_1\overline{\psi}_2+\overline{\varphi}_2\psi_1+\overline{\varphi}_2\overline{\psi}_2\right)z^l\right)\\&=\hat{\varphi}_1\hat{\psi}_1z^l+P_H\left(\overline{\varphi}_2\psi_1z^l\right)+P_H\left(\varphi_1\overline{\psi}_2z^l\right)+P_H\left(\overline{\varphi}_2\overline{\psi}_2z^l\right)\end{aligned}。$$

此外，

$$P_H\left(\varphi_1P_H\left(\overline{\psi}_2z^l\right)\right)=P_H\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\chi_n\right)P_H\left(\sum_{m=1}^{+\infty}b_{-m}\chi_{-m}z^l\right)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{l}a_nb_{-m}z^{l+n-m},\tag{2}$$

$$P_H\left(\overline{\varphi}_2P_H\left(\overline{\psi}_2z^l\right)\right)=P_H\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{-n}\chi_{-n}\right)\left(\sum_{m=1}^{l}b_{-m}z^{l-m}\right)\right]=\sum_{m=1}^{l-1}\sum_{n=1}^{l-m}a_{-n}b_{-m}z^{l-n-m},\tag{3}$$

$$P_H\left(\varphi_1\overline{\psi}_2z^l\right)=P_H\left[\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\chi_n\sum_{m=1}^{+\infty}b_{-m}\chi_{-m}z^l\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{l+n}a_nb_{-m}z^{l+n-m},\tag{4}$$

$$P_H\left(\overline{\varphi}_2\overline{\psi}_2z^l\right)=P_H\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{-n}\chi_{-n}\right)\left(\sum_{m=1}^{+\infty}b_{-m}\chi_{-m}\right)z^l\right]=\sum_{m=1}^{l-1}\sum_{n=1}^{l-m}a_{-n}b_{-m}z^{l-n-m}。\tag{5}$$

记 $\Delta=T_\varphi T_\psi-T_{\varphi\psi}$，则由等式(2)，(3)，(4)和(5)知，

$$\left\|\Delta\left(z^l\right)\right\|_{H^2(\mathbb{D})}^2=\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}a_nb_{-m}z^{l+n-m}\right\|_{H^2(\mathbb{D})}^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}\left|a_nb_{-m}\right|^2。\tag{6}$$

由于 z^l 在空间 D 中是弱收敛到 0 的，从而如果 $T_\varphi T_\psi-T_{\varphi\psi}$ 是紧算子，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists L\in\mathbb{Z}^+$，当 $l>L$ 时有

$$\lim_{l\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}\left|a_nb_{-m}\right|^2<\varepsilon。$$

令 $l=l_0>L$，则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l_0+1}^{l_0+n}\left|a_nb_{-m}\right|^2<\varepsilon 。\tag{7}$$

由(7)有，$\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=l_0+1}^{l_0+n}\left|a_nb_{-m}\right|^2<\varepsilon$。因此对整数 $n=n_0\in[1,N]$，我们有

$$\left|a_{n_0}b_{-m}\right|^2<\sum_{m=l_0+1}^{l_0+n_0}\left|a_{n_0}b_{-m}\right|^2<\varepsilon 。$$

于是对整数 $n\in[1,+\infty)$ 有 $\left|a_nb_{-m}\right|^2=0$，即 $\left|a_n\right|=0$ 或 $\left|b_{-m}\right|=0$ （整数 $m\in[l_0+1,+\infty)$）。从而，如果 $T_\varphi T_\psi-T_{\varphi\psi}$ 是紧算子，则 φ 共轭解析或 $\overline{\psi}_2$ 是多项式。

反之，由于 $\left\{\frac{z^l}{\sqrt{l}}\right\}\left(l\in\mathbb{Z}^+\right)$ 是空间 D 的标准正交基和等式(6)，则充分条件是显然的。证毕。

注： 对 $\varphi,\psi\in G$，我们不能保证 $\varphi\psi\in G$。一般地，$\Delta\left(z^l\right)=T_\varphi T_\psi z^l-T_{\varphi\psi}z^l\notin D$，但是 $\Delta\left(z^l\right)$ 在空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上却是有意义的。

推论 3.4： 如果 $\varphi,\psi\in G$ 且 ψ 不是多项式，则 $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}$ 当且仅当 φ 是共轭解析的。

证明： 对 $\forall f\in D$，记 $f=\sum_{l=1}^{+\infty}c_lz^l$，$\Delta'=T_\varphi T_\psi-T_{\varphi\psi}$。若 $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}$，则 $\Delta'=0$，从而

$$\Delta'\left(z^l\right)=\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}a_nb_{-m}c_lz^{l+n-m}=0 。$$

进一步，我们有

$$\left\|\Delta'\left(z^l\right)\right\|_{H^2(\mathbb{D})}^2=\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}\left|a_nb_{-m}c_l\right|^2=0 。$$

于是当 $f\neq0$ 时，总存在某个 l，满足 $c_l\neq0$。因此，由定理 3.3 可知，φ 是共轭解析的。反之，显然。证毕。

定理 3.5： 如果 $\varphi,\psi\in G$，则 $T_\psi T_\varphi-T_\varphi T_\psi$ 是紧算子当且仅当下列条件中的一个成立：

1) φ 或 ψ 共轭解析；

2) $\overline{\varphi}_2$，$\overline{\psi}_2$ 都是多项式。

证明： 通过计算，我们有

$$T_\psi T_\varphi z^l=\hat{\varphi}_1\hat{\psi}_1z^l+P_H\left(\overline{\psi}_2\varphi_1z^l\right)+P_H\left(\psi_1P_H\left(\overline{\varphi}_2z^l\right)\right)+P_H\left(\overline{\psi}_2P_H\left(\overline{\varphi}_2z^l\right)\right)。$$

同时，

$$P_H\left(\overline{\psi}_2\varphi_1z^l\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{l+n}a_nb_{-m}z^{l+n-m}，\quad P_H\left(\psi_1P_H\left(\overline{\varphi}_2z^l\right)\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{l}a_{-n}b_mz^{l+m-n}，$$

$$P_H\left(\overline{\psi}_2P_H\left(\overline{\varphi}_2z^l\right)\right)=\sum_{n=1}^{l-1}\sum_{m=1}^{l-n}a_{-n}b_{-m}z^{l-n-m} 。\tag{8}$$

记 $\Delta''=T_\psi T_\varphi-T_\varphi T_\psi$。我们已经得到了(2)，(3)，为了计算 $\Delta''\left(z^l\right)$，我们还需要计算 $P_H\left(\overline{\varphi}_2\psi_1z^l\right)$。事实上，$P_H\left(\overline{\varphi}_2\psi_1z^l\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{l+m}a_{-n}b_mz^{l+m-n}$。此外，由于等式(3)和(8)是相等的，因此

$$\Delta''\left(z^l\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}a_nb_{-m}z^{l+n-m}-\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=l+1}^{l+m}a_{-n}b_mz^{l+m-n} 。$$

从而，

$$\left\|\Delta''\left(z^l\right)\right\|_D^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}\left|a_n b_{-m}\right|^2\left(l+n-m\right)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=l+1}^{l+m}\left|a_{-n}b_m\right|^2\left(l+m-n\right)。\tag{9}$$

如果 $T_\psi T_\varphi-T_\varphi T_\psi$ 是紧算子，则 $\left\|\Delta''\left(z^l\right)\right\|_D^2\to 0$。对 $\forall\varepsilon>0$ 以及固定的 l，$\left\|\Delta''\left(z^l\right)\right\|_D^2\to 0$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=l+1}^{l+n}\left|a_n b_{-m}\right|^2\left(l+n-m\right)<\varepsilon$，$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=l+1}^{l+m}\left|a_{-n}b_m\right|^2\left(l+m-n\right)<\varepsilon$ 同时成立。故 $\left|a_n b_{-m}\right|^2=0$ 和 $\left|a_{-n}b_m\right|^2=0$ 同时成立，从而得到必要条件。反之，由等式(9)易得。证毕。

4. 本质谱

事实上，对 Toeplitz 算子 T_φ 而言，我们有 $T_\varphi-\lambda I=T_{\varphi-\lambda}$，从而 $\sigma\left(T_\varphi\right)=\sigma(\varphi)=\Re(\varphi)$ (φ的值域)。此外，如果 T_φ 为 Fredholm 算子，则 $\sigma_e\left(T_\varphi\right)\subset\sigma\left(T_\varphi\right)=\sigma(\varphi)=\Re(\varphi)$，其中 $\sigma_e\left(T_\varphi\right)$ 表示 T_φ 的本质谱。自然地，我们想得到本质谱和谱之间的关系。为了达到这个目的，我们还需要以下引理。

引理 4.1： 设 $\varphi\in G$，则 $\left\|\left(T_\varphi f\right)'\right\|_{L_a^2}^2<2\left\|\varphi f'\right\|_{L^2(\partial\mathbb{D})}^2+2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}f\right\|_{L_a^2}^2$。

证明： 令 $f=\sum_{m=1}^{+\infty}c_m z^m\left(z\in\mathbb{D}\right)$。由 $\varphi f\left(e^{i\theta}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}a_n c_m\chi_{n+m}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}a_{-n}c_m\chi_{m-n}$，则

$$P_H\left(\varphi f\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}a_n c_m z^{n+m}+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{m}a_{-n}c_m z^{m-n}。$$

从而

$$\begin{aligned}\left\|\left(T_\varphi f\right)'\right\|_{L_a^2}^2&=\left\|T_\varphi f\right\|_D^2=\left\langle P_H\left(\varphi f\right),P_H\left(\varphi f\right)\right\rangle_D\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|a_n c_m\right|^2\left(m+n\right)+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{m}\left|a_{-n}c_m\right|^2\left(m-n\right)\end{aligned}。\tag{10}$$

由于

$$\varphi f'\left(e^{i\theta}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}ma_n c_m\chi_{n+m-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}ma_{-n}c_m\chi_{m-n-1},$$

则

$$\left\|\varphi f'\right\|_{L^2(\partial\mathbb{D})}^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}m^2\left|a_n c_m\right|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}m^2\left|a_{-n}c_m\right|^2。\tag{11}$$

另外，由于

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}f\right)(z)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}na_n z^{n-1}\right)\left(\sum_{m=1}^{+\infty}c_m z^m\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}na_n c_m z^{m+n-1},$$

则

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}f\right\|_{L_a^2}^2=\left\langle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}na_n c_m z^{m+n-1},\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}na_n c_m z^{m+n-1}\right\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}n^2\left|a_n c_m\right|^2\left(\frac{1}{m+n}\right)。\tag{12}$$

故由(10)，(11)和(12)得，$\left\|\left(T_\varphi f\right)'\right\|_{L_a^2}^2<2\left\|\varphi f'\right\|_{L^2(\partial\mathbb{D})}^2+2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}f\right\|_{L_a^2}^2$。证毕。

定理 4.2： 设 $\varphi\in G$，则 $\sigma_e\left(T_\varphi\right)=\sigma\left(T_\varphi\right)=\sigma(\varphi)=\Re(\varphi)$。

证明： 我们只需要证明 $\Re(\varphi)\subset\sigma_e(T_\varphi)$。如果 $0\in\Re(\varphi)$，则存在 $\lambda=e^{i\theta_0}\in\partial\mathbb{D}$ 使得 $\varphi(\lambda)=0$。令 $f_k(z)=\left(\frac{1+z\bar{\lambda}}{2}\right)^k$，则在空间 D 上有 $F_k=\frac{f_k}{\|f_k\|_D}\xrightarrow{w}0$。由于函数 $\left|1+e^{i(\theta-\theta_0)}\right|^2$ 在 $\theta=\theta_0$ 处取得最大值，则对 $\forall k\in\mathbb{Z}^+$，我们有

$$
\begin{aligned}
\left\|\varphi F_k'\right\|_{L^2(\partial\mathbb{D})}^2 &= \int_{\partial\mathbb{D}}\left|\varphi F_k'\right|^2\frac{d\theta}{2\pi}\\
&=\int_{\partial\mathbb{D}}\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\left(\frac{k}{2^k}\right)^2\frac{\left|1+e^{i(\theta-\theta_0)}\right|^{2(k-1)}}{\|f_k\|_D^2}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&=\int_{\partial\mathbb{D}}\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\frac{\left|\frac{1}{2}\left(1+e^{i(\theta-\theta_0)}\right)\right|^{2(k-1)}}{\|f_{k-1}\|_{L_a^2}^2}\frac{d\theta}{2\pi}\\
&=0
\end{aligned}
。
$$

又 $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_k\right\|_{L_a^2}\le\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\|_{L_a^2}\|F_k\|_{L_a^2}$，$\|F_k\|_{L_a^2}\to0$，因此由引理 4.1 知，$\|T_\varphi F_k\|_D\to0$。从而 T_φ 不可能是一个 Fredholm 算子，因此 $0\in\sigma_e(T_\varphi)$。证毕。

推论 4.3： 设 $\varphi\in G$。如果 T_φ 是一个 Fredholm 算子，则 $\varphi\ne0$。

证明： 如果 T_φ 是一个 Fredholm 算子，则 $0\notin\sigma_e(T_\varphi)$。由定理 4.2 知，$0\notin\Re(\varphi)$，故 $\varphi\ne0$。证毕。

基金项目

国家自然科学基金(NO. 11501068)，重庆市教委科研项目(NO. KJ1600302)。

参考文献

[1] Douglas, R.G. (1998) Banach Algebra Techniques in Operator Theory. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1656-8

[2] Zhu, K.H. (1990) Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker, New York.

[3] Cao, G.F. (1999) Fredholm Properties of Toeplitz Operators on Dirichlet Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **188**, 209-223. https://doi.org/10.2140/pjm.1999.188.209

[4] Duistermaat, J.J. and Lee, Y.J. (2004) Toeplitz Operators on the Dirichlet Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **300**, 54-67. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.05.031

[5] Yu, T. (2010) Toeplitz Operators on the Dirichlet Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **67**, 163-170. https://doi.org/10.1007/s00020-010-1754-2

[6] Chartrand, R. (2002) Toeplitz Operators on Dirichlet-Type Spaces. *Journal of Operator Theory*, **48**, 3-13.

[7] Liu, Y.Q. and Huang, S. Algebraic Properties of Hardy-Type Toeplitz Operators on the Dirichlet Space. Chongqing Normal University (Natural Science), Preprint.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org