Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 20-28
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91003

Classification of Gradient Shrinking Ricci Solitons

Jinnan Li, Xiang Gao*

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: 18363995873@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

Received: Dec. 6th, 2018; accepted: Dec. 22nd, 2018; published: Dec. 29th, 2018

Abstract

There are two important aspects of Ricci solitons. One looks at the influence on the topology by the Ricci solitons structure of the Riemannian manifold, and the other looks at its geometric properties and invariant. In this paper, we are interested in summarizing the classification of Ricci soliton and give some results about gradient shrinking Ricci solitons under the assumption of curvature or Weyl tensor.

Keywords

Shrinking Ricci Soliton, Curvature, Weyl Tensor, Classification

梯度收缩Ricci孤立子的分类

李金楠，高　翔*

中国海洋大学，数学科学学院，山东 青岛
Email: 18363995873@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

收稿日期：2018年12月6日；录用日期：2018年12月22日；发布日期：2018年12月29日

摘　要

Ricci孤立子的研究有两个重要的方向，一个是研究黎曼流形上Ricci孤立子的结构对其拓扑结构的影响，另一个是研究Ricci孤立子的几何性质及几何不变量。本文，我们将系统的阐述满足一定曲率及Weyl张量等条件下梯度收缩孤立子的分类。

*通讯作者。

文章引用: 李金楠, 高翔. 梯度收缩 Ricci 孤立子的分类[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 20-28.
DOI: 10.12677/pm.2019.91003

关键词

收缩Ricci孤立子，曲率，Weyl张量，分类

1. 引言

20 世纪 80 年代，Hamilton [1]提出了 Ricci 流的概念，实际上 Ricci 流的最初引进是为了解决 3 维流形著名的 Poincaré 猜想(任意单连通的 3 维完备闭流形同胚于 3 维闭球面)。Ricci 孤立子是 Ricci 流的自相似解[2]且经常出现在 Ricci 流方程的奇异点经伸缩变换后的极限中[3] [4] [5] [6]。一方面，Ricci 孤立子的研究有助于更好的理解 Ricci 流的奇异结构，从而结合几何手术的方法可以得到一些重要的几何和拓扑结构。另一方面，Ricci 孤立子是爱因斯坦度量的自然推广也称为 quasi-Einetein 度量，在规范场论与超弦理论中有重要的应用，因此 Ricci 孤立子的几何性质及几何不变量对于数学及物理学的发展均具有重要的研究意义。

Ricci 孤立子介绍

黎曼度量 g_{ij}，若其 Ricci 张量满足 $R_{ij}=\rho g_{ij}$ （ρ 为常数)，则称 g_{ij} 为爱因斯坦度量。一个光滑流形 M^n 带有爱因斯坦度量，则称该流形为爱因斯坦流形，Ricci 孤立子是爱因斯坦度量的自然推广。

光滑流形上的一个完备度量 g_{ij} 称为 Ricci 孤立子，若存在光滑向量场 $V=\left(V^i\right)$ 使其 Ricci 张量满足

$$R_{ij}+\frac{1}{2}\left(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i\right)=\rho g_{ij}$$

ρ 为常数。此外，若 V 为一个梯度向量场，对光滑函数 f 满足

$$R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f=\rho g_{ij}$$

则称 g_{ij} 为梯度 Ricci 孤立子。光滑函数 f 称为 Ricci 孤立子的势函数。当 $\rho=0$ 时称为稳定 Ricci 孤立子，$\rho>0$ 为收缩 Ricci 孤立子， $\rho<0$ 时称为扩张 Ricci 孤立子。

由于 $\nabla_i V_j+\nabla_j V_i$ 为度量 g_{ij} 在方向 V 上的 Lie 导数，故上述 Ricci 方程分别可以写作 $Ric+\frac{1}{2}L_V g=\rho g$ 和 $Ric+\nabla^2 f=\rho g$。注意到 $V=0$ (即 f 为常函数)的情况即 g 为爱因斯坦度量，因此 Ricci 孤立子为爱因斯坦度量的自然推广，且经过适当的伸缩变换可标准化令 $\rho=0$，$+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$。

2. 梯度收缩 Ricci 孤立子的分类

梯度 Ricci 孤立子为 Hamilton-Ricci 流的自相似解且对应于奇异模型，因而对于研究 Ricci 流至关重要。完备梯度收缩 Ricci 孤立子对应于 Ricci 流的第 I 类奇点模型，因此理解梯度收缩 Ricci 孤立子的几何性质有助于我们理解 Ricci 流古典解的渐近行为。Ricci 孤立子的分类对数学及物理的研究与发展都具有重要的意义，对 Ricci 孤立子进行分类的关键是结合孤立子方程运用微分几何与几何分析的方法寻找和构造其上一些重要的几何不变量，建立一些有意义的几何估计、几何比较定理并计算一些拓扑不变量，最

终结合黎曼几何与拓扑学的重要定理给出其分类结果。Ricci 孤立子的研究主要分为紧致与非紧致两大部分，在流形紧致的条件下，Perelman [2]证明了 Ricci 孤立子一定是梯度孤立子，因此对紧致 Ricci 孤立子的研究可转化为对梯度 Ricci 孤立子的研究。特别地，紧致稳定或扩张 Ricci 孤立子必为爱因斯坦度量[8] [9]，且 2、3 维紧致收缩 Ricci 孤立子也是爱因斯坦度量。类似的结论在高维情形未必成立，但对于具有正曲率算子的紧致收缩 Ricci 孤立子，Hamilton [5] (维数为 3 的情况)，[10] (维数为 4)及 Böhm-Wilking [11] (维数大于 4)证明了它一定是球面的有限商空间。Hamilton 还证明了任意 2 维 Ricci 流的完备非平坦古典解若具有有界曲率，则必为 S^2， RP^2 或 cigar 孤立子，2 维 Ricci 孤立子的分类已经十分完善且有很多非常好的结果。在流形完备非紧致的条件下，又可以分为收缩、稳定、扩张的情形进行研究。其中关于收缩孤立子有很多经典且重要的结果：[12]中证明了完备收缩 Ricci 孤立子为紧致的当且仅当其上的向量场有界；在具有有界非负截面曲率的 3 维流形上，Perelman [3]给出了 k -非坍塌的非平坦梯度收缩 Ricci 孤立子的完全分类；后来 Ni-Wallach [13]给出了去掉 k -非坍塌条件并将有界非负截面曲率条件减弱为满足一定增长非负曲率条件从而得到了同 Perelman 同样的结论；4 维情况下，Naber [14]给出了具有有界非负曲率算子的收缩 Ricci 孤立子的分类并证明了具有有界曲率算子的完备非紧致收缩 Ricci 孤立子必为梯度孤立子且为非坍塌的；另一方面，Hamilton-Ivey 拼挤估计表明 3 维完备收缩 Ricci 孤立子具有非负截面曲率，因此 Ricci 曲率满足一定增长条件的 3 维梯度收缩 Ricci 孤立子一定是 R^3， S^3 或 $S^2\times R$ 的有限商空间；特别地，Cao-Chen-Zhu [7]得到了没有任何曲率条件的收缩 Ricci 孤立子的完全分类结果(3 维完备梯度收缩 Ricci 孤立子必为 R^3， S^3 或 $S^2\times R$ 的有限商空间)；高维情形下，Petersen-Wylie [15]证明了 Weyl 张量为零的 n 维梯度收缩 Ricci 孤立子若 Ricci 曲率有下界且满足一定的增长条件则一定是 R^n， S^n 或 $S^{n-1}\times R$ 的有限商空间；利用局部化的，Hamilton-Ivey 拼挤估计，Zhang [16]将此结果改进为任意张量为零的维收缩梯度孤立子必为 R^n， S^n 或 $S^{n-1}\times R$ 的有限商空间。

2.1. 三维梯度收缩 Ricci 孤立子的分类

3 维梯度收缩 Ricci 孤立子作为最简单的孤立子，由于维数的特殊性已得到的结论及分类相对完善。

定理 2.1.1：(Perelman)不存在具有有界正截面曲率的 3 维完备非紧致 k -非坍塌梯度收缩 Ricci 孤立子。

由梯度收缩 Ricci 孤立子方程及 Hamilton 最大值原理，Perelman [3]还证明了：

定理 2.1.2：令 $\left(M^3,g_{ij},f\right)$ 为 3 维流形上的一个非平坦的梯度收缩 Ricci 孤立子，具有有界非负截面曲率且对于 $k>0$ 为 k -非坍塌的。则 $\left(M^3,g_{ij}\right)$ 为以下情况之一：

a) 3 维球面 S^3 或其有限商空间；b) 柱面 $S^2\times R$ 或其 Z_2 商空间。

随后 Cao [17]概括总结了 Perelman 的结果并证明了具有有界非负截面曲率的 3 维完备非紧致的 k -非坍塌梯度收缩 Ricci 孤立子为 R^3 或 $S^2\times R$ 的商空间。

通过去掉 k -非坍塌假设并用非负 Ricci 曲率代替非负截面曲率，上述结果由 Ni-Wallach [13]和 Naber [14]进一步优化：

定理 2.1.3 令 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ 为一个 Ricci 曲率非负且满足 $\left|R_{ijkl}\right|(x)\le \exp\left(a\left(r(x)+1\right)\right)$ 的梯度收缩 Ricci 孤立子， $a>0$， $r(x)$ 为到流形上固定点的距离函数，则流形 M 为紧致的。

推论 2.1.4：任意 3 维完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子 $\left(M^3,g_{ij},f\right)$，若具有非负 Ricci 曲率 $Ric\ge 0$ 且满足 $\left|Rm\right|(x)\le Ce^{ar(x)}$， 则 M 为 S^3 或 $S^2\times R$ 的一个商空间。

在没有假设 k -非坍塌及曲率一致有界的情况下，他们还给出了 3 维梯度收缩孤立子分类的一般结果：

推论 2.1.5：令 $\left(M^3,g_{ij},f\right)$ 为一个完备梯度收缩 Ricci 孤立子，截面曲率非负且其 Ricci 曲率满足

$\left|Ric\right|(y,t)\le\exp\left(\varepsilon r^2(x)+\beta(\varepsilon)\right)$，$\varepsilon>0$，$\beta(\varepsilon)>0$，任意 $y\in B_{g\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(x,\frac{r(x)}{2}\right)$，$t\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$，则 M 必为 S^3 的商空间。

推论 2.1.6： 令 $\left(M^3,g_{ij},f\right)$ 为一个完备梯度收缩 Ricci 孤立子，若 Ricci 曲率非负且满足 $\left|Ric\right|(y,t)\le\exp\left(\varepsilon r^2(x)+\beta(\varepsilon)\right)$，$\varepsilon>0$，$\beta(\varepsilon)>0$，任意 $y\in B_{g\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(x,\frac{r(x)}{2}\right)$，$t\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$，则其万有覆盖为 M 为 R^3，S^3 或 $S^2\times R$。

利用 Hamilton 最值原理，Naber [14]证明了具有有界曲率 $Ric\ge 0$ 的 3 维梯度收缩 Ricci 孤立子为 R^3，S^3 或 $S^2\times R$ 的有限商空间。在不需曲率有界的条件下，Cao-Chen-Zhu [7]证明了任意 3 维完备非平坦梯度收缩 Ricci 孤立子为 S^3 或 $S^2\times R$ 的一个商空间；任意 3 维完备非紧致非平坦的梯度收缩 Ricci 孤立子为 $S^2\times R$ 的一个商空间。

由此拓展到非梯度 Ricci 孤立子的情况，有：

推论 2.1.7： 令 $\left(M^3,g_{ij},f\right)$ 为一个 3 维完备非紧致收缩 Ricci 孤立子，其曲率有界且 $r\to\infty$ 时有 $\left|\nabla X\right|=o\left(\left|X\right|\right)$，则 M 等距于 R^3，S^3 或 $S^2\times R$ 的一个有限商空间。

2.2. *N* 维梯度收缩 Ricci 孤立子曲率条件下的分类

经典的高维($n\ge 4$)收缩孤立子分类定理表明任意维非平坦 k-非坍塌的旋转对称收缩 Ricci 孤立子若具有有界非负截面曲率则必为 $S^n\times R$ 或 S^{n+1} 的一个有限商空间。随后，Kotschwar [18]改进该定理并证明了任意完备旋转对称梯度收缩 Ricci 孤立子为 R^{n+1}，$S^n\times R$ 或 S^{n+1} 的一个有限商空间。Hamilton 球面定理与 Hamilton 强极值原理的结合给出了具有非负 Ricci 曲率的 3 维紧致收缩 Ricci 孤立子的一个完整分类。利用最值原理，将维数推广到 4 维情形时，Hamilton [10]给出了一个 4 维微分球面定理：

定理 2.2.1： 一个具有正曲率算子的 4 维紧致流形微分同胚于球面 S^4 或实射影空间 RP^4。

进一步 Hamilton 概括证明了具有正曲率算子的紧致 4 维流形微分同胚于球面 S^4，CP^2，$S^2\times S^2$ 或空间 S^4，CP^2，$S^3\times S^1$，$S^2\times S^2$，$S^2\times R^2$，R^4 的一个有限商空间。显然我们会问：一个具有正曲率算子的紧致黎曼流形 M^n ($n\ge 5$)是否也微分同胚于一个空间形式？事实上，Hamilton 首先提出该猜想，Böhm-Wilking [11]通过构造闭凸集的方法证明了一个具有双曲率算子的 n 维($n\ge 5$)黎曼流形 M^n 微分同胚于一个球形空间形式。1988 年，Micallef-Moore [19]证明了任意具有正各向同性曲率的 n 维紧致单连通流形同构于 n 维球面 S^n，显然正各向同性曲率的条件弱于正曲率算子。

最近，曲率条件假设下的梯度收缩 Ricci 孤立子的分类又有了许多新的结果。

$n=4$ 时，Ni-Wallach [20]证明了 4 维完备收缩 Ricci 孤立子若具有非负曲率算子、正各向同性曲率及其他条件，则为 S^4 或 $S^3\times R$ 的一个商空间。在 Hamilton [10]及 Ni-Wallach [20]工作的基础上，Naber [14]证明了任意 4 维具有有界非负曲率算子的完备非紧致的收缩 Ricci 孤立子等距于 R^4 或为 $S^2\times R^2$，$S^3\times R$ 的一个有限商空间。接着 Naber 还证明了具有有界非负曲率算子的非平坦的 4 维完备非紧致收缩 Ricci 孤立子等距于 $S^2\times R^2$ 或 $S^3\times R$ 的一个有限商空间。更高维情况下，Gu-Zhu [21]证明任意 $n\left(n\ge 3\right)$ 维完备非平坦旋转对称的 k-非坍塌梯度收缩 Ricci 孤立子若具有有界非负截面曲率则必为球面 S^n 或柱面 $S^{n-1}\times R$。

定理 2.2.2：(Petersen-Wylie [22]) 令 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ 为一个梯度收缩 Ricci 孤立子，若具有非负截面曲率且数量曲率满足 $S\le 2\rho$，则 M 的万有覆盖等距于 R^n 或 $S^2\times R^{n-2}$。

定理 2.2.3： 令 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ 为一个局部共形平坦的完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子，Ricci 曲率满足 $\left|R_{ij}\right|(x)\le\exp\left(a\left(r(x)+1\right)\right)$，则 M 的万有覆盖为 R^n 或 $S^{n-1}\times R$。

推论 2.2.4：(Munteanu [23])令$\left(M^n, g_{ij}, f\right)$为一个梯度收缩 Ricci 孤立子，若$|Rc| \le \frac{1}{100n^2}$，则$M$等距于 Gaussian 孤立子。

推论 2.2.5：(Cai [24])令$\left(M^n, g_{ij}, f\right)$为一个完备非紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子，设其具有有界非负截面曲率且存在$\delta > 0$使得$\int_M e^{\delta f} |DRic| \mathrm{d}vol_g < \infty$，则$\left(M^n, g_{ij}\right)$等距于$N \times R^m$，其中$N$为紧致爱因斯坦流形。

上述定理为高维情况下第一个不需要满足 Weyl 张量条件的刚性定理。已知势函数相对于距离函数呈二次方形式增长，因此$DRic$条件表明它以指数方式衰减。

推论 2.2.6：(Cai [24])令$\left(M^n, g_{ij}, f\right)$为一个具有有界非负截面曲率的完备梯度收缩 Ricci 孤立子，设f的最小值为一个光滑紧致的临界子流形，$DRic$与D^2Ric在其最小值点上为零，则$\left(M^n, g_{ij}\right)$为非紧致的且等距于$N \times R^m$，其中N为一个紧致爱因斯坦流形。

定理 2.2.7：令$\left(M^4, g_{ij}, f\right)$为 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子，若$div^4 Rm = 0$，则$\left(M^4, g_{ij}\right)$为爱因斯坦流形，或为 Gaussian 收缩孤立子R^4，$S^2 \times R^2$或柱面$S^3 \times R$的一个有限商空间。

进一步结合梯度估计及 Weyl 张量，Zhang [16]还证明了 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子若满足$div^3 Rm(\nabla f) = 0$或$div^3 W(\nabla f) = 0$则为爱因斯坦流形或为R^4，$S^2 \times R^2$，$S^3 \times R$的一个有限商空间。一般地，结合刚性性质可知 4 维刚性的梯度收缩 Ricci 孤立子为爱因斯坦流形或为R^4，$S^2 \times R^2$，$S^3 \times R$的一个有限商空间。

2.3. *N* 维梯度收缩 Ricci 孤立子 Weyl 张量条件下的分类

$n \ge 3$时，Weyl 张量定义为：

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right) - \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}\right)$$

Cotton 张量定义为：

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}\left(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R\right)$$

Schouten 张量定义为：

$$A_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}$$

Bach 张量定义为：

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla^k \nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{ij}^{kl}$$

Weyl 张量满足曲率张量的对称性，且其度量的迹为零。若 Weyl 张量为零，则该黎曼流形为局部共形平坦的。Ricci 孤子可视为 Ricci 张量的规定条件，即黎曼张量的取迹的部分。因此，我们可以只考虑黎曼张量取迹部分的条件对孤立子分类结果的影响，$n \ge 4$时，即 Weyl 张量的影响。高维情形下，结合一定的 Weyl 张量条件，已知完备局部共形平坦的梯度收缩 Ricci 孤立子为S^n，R^n或$S^{n-1} \times R$的一个有限商空间。进一步，在更弱的调和 Weyl 张量条件假设下，n维完备收缩 Ricci 孤立子为爱因斯坦流形或为$N^k \times R^{n-k}$的一个有限商空间，其中$0 \le k \le n$，N^k为一个具有正数量曲率的k维爱因斯坦流形。

定理 2.3.1：任意局部共形平坦的n维 Ricci 孤立子为R^n，S^n或H^n的商空间。

Ktoschwar [18]通过关于旋转不变的梯度收缩 Ricci 孤立子的研究证明了n ($n \ge 4$)维局部平坦的梯度

收缩 Ricci 孤立子为球面 S^n，Gaussian 孤立子或 $S^{n-1}\times R$ 的商空间，其中该 Gaussian 孤立子为 $\left(M,g,\frac{\alpha|x|^2}{2n}\right)$，$\alpha>0$ 为实常数。

不需要假设曲率一致有界，甚至也不需要满足 k-非坍塌条件，只需控制黎曼曲率满足适当的增长条件下 Ni-Wallach [13]还给出了一个分类定理：

定理 2.3.2: 令 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ 为一个具有非负 Ricci 曲率的梯度收缩 Ricci 孤立子，维数 $n\ge 4$，设 $\left(M^n,g_{ij}\right)$ 局部共形平坦，且 $\left|R_{ijkl}\right|(x)\le \exp\left(a\left(r(x)+1\right)\right)$，常数 $a>0$，$r(x)$ 为距离函数，则 M 的万有覆盖为 R^n，S^n 或 $S^{n-1}\times R$。

接着，Ni-Wallach 还证明了局部共形平坦的完备非紧致梯度收缩 Ricci 孤立子若其 Ricci 曲率满足 $\left|R_{ijkl}\right|(x)\le \exp\left(a\left(r(x)+1\right)\right)$ 则为 R^n 或 $S^{n-1}\times R$ 的一个商空间。在不需假设梯度收缩 Ricci 孤立子为非坍塌或曲率一致有界时，Ni-Wallach [13]还给出了依赖于距离函数的曲率的相关分类。

推论 2.3.3： 令 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ 为一个局部共形平坦的梯度收缩 Ricci 孤立子，设 Ricci 曲率非负且满足 $|Ric|(y,t)\le \exp\left(\varepsilon r^2(x)+\beta(\varepsilon)\right)$，$\varepsilon>0$，$\beta(\varepsilon)>0$，任意 $y\in B_{g\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(x,\frac{r(x)}{2}\right)$ 及 $t\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$，则 M 的万有覆盖为 R^n，S^n 或 $S^{n-1}\times R$。

推论 2.3.4：(Catino-Mantegazza [25]) 任意 n 维($n\ge 4$)具有常数量曲率的局部共形平坦 Ricci 孤立子 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ 为 S^n，R^n，H^n，$R\times S^{n-1}$ 或 $R\times H^{n-1}$ 的一个商空间。

同时，对于 Ricci 张量满足一定条件时，他们[25]还证明了任意 n 维($n\ge 4$)具有非负 Ricci 张量的局部共形平坦 Ricci 孤立子为 S^n，R^n 或 $R\times S^{n-1}$ 的一个商空间。

基于高维情形下的 Hamilton-Ivey 型估计：$R\ge(-\nu)\left[\log(-\nu)+\log(1+t)-\frac{n(n+1)}{2}\right]$，其中 $t\ge 0$，且 $\nu<0$。在没有任何曲率假设条件下，利用局部化的 Hamilton-Ivey 拼挤估计 Zhang [16]证明了如下定理：

定理 2.3.5： 任意满足 Weyl 张量为零($W=0$)的完备梯度收缩 Ricci 孤立子必为 R^n，S^n 或 $S^{n-1}\times R$ 的一个有限商空间。

众所周知，完备局部共形平坦即 $W_{ikjl}=0$，且任意旋转对称度量的 Weyl 张量也为零。结合 Ricci 曲率及 Weyl 张量条件，Petersen-Wylie [15]证明了 n 维($n\ge 3$)完备收缩 Ricci 孤立子若满足 $\int_M |Ric|^2 e^{-f}\mathrm{d}vol_g<\infty$ 及 $W=0$，则 M 为 R^n，S^n 或 $S^{n-1}\times R$ 的一个有限商空间。

不需要假设孤立子的度量为局部共形平坦($W_{ikjl}=0$)的情形下，Catino [26]给出了具有非负 Ricci 曲率并满足一定 Weyl 张量估计条件的完备梯度收缩 Ricci 孤立子的分类定理。

定理 2.3.6： 任意 n 维具有非负曲率的完备梯度收缩 Ricci 孤立子 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ 若满足

$$|W|S\le\sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(|T|-\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}S\right)^2$$

则 M 为 S^n，$R\times S^{n-1}$ 或 R^n 的一个有限商空间，其中 $T=Ric-\frac{1}{n}Sg$。

对于一般孤立子，Catino-Mastrolia-Monticelli-Rigoli [27]对上述定理进行推广得：

推论 2.3.7： 令 $\left(M^n,g_{ij},f\right)$ ($n>3$)为一个一般的完备收缩 Ricci 孤立子，若 M 非紧致，设其曲率有界且当 $r\to\infty$ 时，$|\nabla X|=o\left(|X|\right)$。若 $|Ric|\le\Lambda S$，常数 $\Lambda>0$，且其 Weyl 张量满足

$$|W|S \le \sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(|T| - \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}S\right)^2$$

则 M 等距于 S^n， R^n 或 $R \times S^{n-1}$ 的一个有限商空间。

维数更高时，Fu- Xiao [28]利用比上述定理中积分曲率条件更弱的条件也得到了有关梯度收缩 Ricci 孤立子的一个分类定理($4 \le n \le 6$ 时，Cation [26]曾给出过类似结论)。

推论 2.3.8： 令 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ （$n \ge 4$）为一个完备收缩 Ricci 孤立子，设

$$\left(\int_M \left|W + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}\right| T\|^{\frac{2}{n}}\right) + \sqrt{\frac{(n-4\gamma)^2(n-1)}{8\gamma^2(n-2)}}\lambda vol(g)^{\frac{2}{n}} < \left(\frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}}\mu([g])$$

其中 $\gamma = \dfrac{n + \sqrt{n^2 + 8n(n-2)^2}}{8(n-2)}$， 则 $\left(M^n, g_{ij}\right)$ 等距于球面 S^n 的一个商空间。

Munteanu-Sesum [29]首先给出了有调和 Weyl 张量的梯度收缩 Ricci 孤立子的分类：

定理 2.3.9： 任意具有调和 Weyl 张量的完备梯度收缩 Ricci 孤立子 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ 必为 R^n， S^n 或 $S^{n-1} \times R$ 的一个有限商空间。

进一步给出 Weyl 张量及 Cotton 张量的相关定义：

$$div^4(W) = \nabla_k \nabla_j \nabla_l \nabla_i W_{ikjl}, \quad div^3(C) = \nabla_i \nabla_j \nabla_k C_{ijk}$$

由此可知 $n \ge 4$ 时， $div^4(W) = 0$ 当且仅当 $div^3(C) = 0$ 。随后，Catino-Mastrolia-Monticell [30]根据上述公式改进了满足具有调和 Weyl 张量的梯度收缩 Ricci 孤立子的分类定理。

推论 2.3.10： 任意完备梯度收缩 Ricci 孤立子 $\left(M^n, g_{ij}, f\right)$ （$n \ge 4$）若满足 $div^4(W) = 0$，则 M 为爱因斯坦流形或等距于 $N^{n-k} \times R^k$ 的一个有限商空间，其中 N^{n-k} 为爱因斯坦流形， R^k （$k > 0$）为 Gaussian 孤立子。

2.4. 四维梯度收缩 Ricci 孤立子的分类

4 维孤立子是 $n > 3$ 时的最低维数，因此某些分类结论可单独进行研究。4 维情况下，由 Hodge 分裂可将 2-微分形式所在空间分为自对偶和反自对偶部分，且曲率张量和 Weyl 张量分别对应该分裂。自然可以考虑 Weyl 张量的自对偶和反自对偶部分 $W^{\pm}$，称为半 Weyl 张量。Chen-Wang [31]首先证明了半共形平坦($W^{\pm} = 0$)的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子为 S^4， CP^2， R^4 或 $S^3 \times R$ 的一个有限商空间，其中半共形平坦也称 $W^- = 0$ 和 $W^+ = 0$ 。Chen-Wang 还证明了任意 4 维具有有界曲率且 $W^+ = 0$ 的完备梯度收缩 Ricci 孤立子必等距于 R^4， $S^3 \times R$， S^4 或 CP^2 的有限商空间。

众所周知，一个具有正数量曲率的 4 维紧致半共形爱因斯坦流形为 S^4 或 CP^2 。在此基础上，Chen-Wang [31]证明了任意 4 维紧致半共形平坦的梯度收缩 Ricci 孤立子等距于 S^4 或 CP^2 。Kähler-Einstein 流形上的 4 维紧致的梯度收缩 Ricci 孤立子若 $\delta W^{\pm} = 0$ 且各具有非负曲率算子，则为 S^4 的一个有限商空间。随后 Wu-Wu-Wylie [32]完善了具有调和半 Weyl 张量的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子的分类。

推论 2.4.1： 满足 $\delta W^{\pm} = 0$ 的 4 维梯度收缩 Ricci 孤立子为爱因斯坦流形或为 $S^3 \times R$， $S^2 \times R^2$ 或 R^4 的一个有限商空间。

2.5. Bach 平坦 Ricci 孤立子的分类

任意 n 维流形 $\left(M^n, g_{ij}\right)$， $(n \ge 4)$，Bach 张量定义为：

$$B_{ij}=\frac{1}{n-3}\nabla^k\nabla^l W_{ikjl}+\frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ij}^{kl}$$

其中 W_{ikjl} 为 Weyl 张量。显然若 (M^n,g_{ij}) 为局部共形平坦(i.e. $W_{ikjl}=0$)或为爱因斯坦流形时，(M^n,g_{ij}) 为 Bach 平坦的(即 $B_{ij}=0$)，可以看作有关 Weyl 张量中二阶和零阶项的消失条件。另外，一个 4 维流形是半共形平坦的或为局部共形平坦的那么也是 Bach 平坦的。最近，Cao-Chen [33]证明了 Bach 平坦的梯度收缩 Ricci 孤立子为爱因斯坦流形或 R^n 为或 $N^{n-1}\times R$ 的一个有限商空间，其中 N^{n-1} 为 $n-1$ 维的爱因斯坦流形。

定理 2.5.1: 令 (M^n,g_{ij},f) $(n\ge 5)$为完备 Bach 平坦的梯度收缩 Ricci 孤立子，则 M 为爱因斯坦流形，或 Gaussian 孤立子 R^n 的一个有限商空间，或 $N^{n-1}\times R$ 的一个有限商空间，其中 N^{n-1} 为具有正数量曲率的爱因斯坦流形。

对于 4 维情况，Cao-Chen 还证明了完备的 Bach 平坦梯度收缩孤立子为爱因斯坦流形或为 R^4、$S^3\times R$ 的一个有限商空间。在研究局部共形平坦及 Bach 平坦梯度孤立子时，他们还引进了一个有关势函数水平面几何性质的 3 维张量 D_{ijk}：

$$D_{ijk}=\frac{1}{n-2}\left(A_{jk}\nabla_i f-A_{ik}\nabla_j f\right)+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left(g_{jk}E_{il}-g_{jk}E_{jl}\right)\nabla_l f$$

其中 A_{ij} 为 Schouten 张量， E_{ij} 为爱因斯坦张量。并由此得到一个新的分类结果：

推论 2.5.2: 令 (M^n,g_{ij},f) $(n\ge 4)$为一个完备的梯度收缩 Ricci 孤立子，若 $D_{ijk}=0$，则

1) (M^4,g_{ij},f) 为爱因斯坦流形或为 R^4 或 $S^3\times R$ 的一个有限商空间；

2) 若 $n\ge 5$，则 (M^n,g_{ij},f) 为爱因斯坦流形或为 R^n 或 $N^{n-1}\times R$ 的一个有限商空间，其中 N^{n-1} 为爱因斯坦流形。

完备梯度收缩 Ricci 孤立子的分类有非常多的结论。在微分几何的发展过程中，拓扑学与复数分析结合起来以后产生了复几何，对应黎曼流形的 Ricci 孤立子，自然有相应复流形上的 Kähler-Ricci 孤立子。未来，复几何必定为微分几何研究的主流，因此关于 Kähler-Ricci 孤立子的分类及其几何性质与几何不变量也是几何学研究的重点，我们期待能够得到更多更好的对于收缩 Kähler-Ricci 孤立子的分类结果。

基金项目

本文由山东省自然科学基金(ZR2018MA006)及山东省研究生导师指导能力提升项目(SDYY17009)支持。

参考文献

[1] Hamilton, R.S. (1998) The Ricci Flow on Surfaces. *Contemporary Mathematics*, **71**, 237-261. https://doi.org/10.1090/conm/071/954419

[2] Perelman, G. (2002) The Entropy Formula for the Ricci Flow and It's Geometric Applications. arXiv: math. DG/0211159

[3] Perelman, G. (2003) Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds. arXiv: math.DG/0303109

[4] Perelman, G. (2003) Finite Extinction Time for the Solutions to the Ricci Flow on Certain Three-Manifolds. arXiv: math. DG/0307245

[5] Hamilton, R.S. (1982) Three Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **17**, 255-306. https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922

[6] Hamilton, R.S. (1993) Eternal Solutions to the Ricci Flow. *Journal of Differential Geometry*, **38**, 1-11. https://doi.org/10.4310/jdg/1214454093

[7] Cao, H.D., Chen, B.L. and Zhu, X.P. (2008) Recent Developments on Hamilton's Ricci Flow. Geometric flows, Sur-

veys in Differential Geometry, 47-112.

[8] Hamilton, R.S. (1993) The Formation of Singularities in the Ricci Flow. *Surveys in Differential Geometry*, **2**, 7-136.

[9] Ivey, T. (1993) Ricci Solitons on Compact Three-Manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, **3**, 301-330. https://doi.org/10.1016/0926-2245(93)90008-O

[10] Hamilton, R.S. (1986) Four-Manifolds with Positive Curvature Operator. *Journal of Differential Geometry*, **24**, 153-179. https://doi.org/10.4310/jdg/1214440433

[11] Böhm, C. and Wilking, B. (2008) Manifolds with Positive Curvature Operator Are Space Forms. *Annals of Mathematics*, **167**, 1079-1097. https://doi.org/10.4007/annals.2008.167.1079

[12] Löpez, M.F. and Río, E.G. (2008) A Remark on Compact Ricci Solitons. *Mathematische Annalen*, **340**, 893-896. https://doi.org/10.1007/s00208-007-0173-4

[13] Ni, L. and Wallach, N. (2008) On a Classification of the Gradient Shrinking Solitons. *Mathematical Research Letters*, **15**, 941-955. https://doi.org/10.4310/MRL.2008.v15.n5.a9

[14] Naber, A. (2010) Noncompact Shrinking Four Solitons with Nonnegative Curvature. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **645**, 125-153. https://doi.org/10.1515/crelle.2010.062

[15] Petersen, P. and Wylie, W. (2010) On the Classification of Gradient Ricci Solitons. *Geometry & Topology*, **14**, 2277-2300. https://doi.org/10.2140/gt.2010.14.2277

[16] Zhang, Z.H. (2009) Gradient Shrinking Solitons with Vanishing Weyl Tensor. *Pacific Journal of Mathematics*, **242**, 189-200. https://doi.org/10.2140/pjm.2009.242.189

[17] Cao, H.D. (2009) Geometry of Complete Gradient Shrinking Ricci Solitons. *Mathematics*, **17**, 1149-1169.

[18] Kotschwar, B. (2008) On Rotationally Invariant Shrinking Ricci Solitons. *Pacific Journal of Mathematics*, **236**, 73-88. https://doi.org/10.2140/pjm.2008.236.73

[19] Micallef, M. and Moore, J.D. (1998) Minimal Two-Spheres and the Topology of Manifolds with Positive Curvature on Totally Isotropic Two-Planes. *Annals of Mathematics*, **127**, 199-227.

[20] Ni, L. and Wallach, N. (2008) On Four-Dimensional Gradient Shrinking Solitons. *International Mathematics Research Notices*, **2008**, rnm152.

[21] Gu, H.L. and Zhu, X.P. (2007) The Existence of Type II Singularities for the Ricci Flow on S^{n+1}. *Communications in Analysis and Geometry*, **16**, 467-494.

[22] Petersen, P. and Wylie, W. (2012) Rigidity of Gradient Ricci Solitons. *Pacific Journal of Mathematics*, **241**, 329-345. https://doi.org/10.2140/pjm.2009.241.329

[23] Munteanu, O. and Wang, M.T. (2011) The Curvature of Gradient Ricci Solitons. *Mathematical Research Letters*, **18**, 1051-1070. https://doi.org/10.4310/MRL.2011.v18.n6.a2

[24] Cai, M.L. (2013) On Shrinking Gradient Ricci Solitons with Nonnegative Sectional Curvature.

[25] Catino, G. and Mantegazza, C. (2013) The Evolution of the Weyl Tensor under the Ricci Flow. *Annales de l'Institut Fourier*, **61**, 1407-1435. https://doi.org/10.5802/aif.2644

[26] Catino, G. (2013) Complete Gradient Shrinking Ricci Solitons with Pinched Curvature. *Mathematische Annalen*, **355**, 629-635. https://doi.org/10.1007/s00208-012-0800-6

[27] Catino, G., Mastrolia, P., Monticelli, D.D. and Rigoli, M. (2014) Analytic and Geometric Properties of Generic Ricci Solitons. *Transactions of the AMS*, **368**.

[28] Fu, H.P. and Xiao, L.Q. (2015) Rigidity Theorem for Integral Pinched Shrinking Ricci Solitons. Monatshefte Fur Mathematik, 1-8.

[29] Munteanu, O. and Sesum, N. (2013) On Gradient Ricci Solitons. *Journal of Geometric Analysis*, **23**, 539-561. https://doi.org/10.1007/s12220-011-9252-6

[30] Catino, G., Mastrolia, P. and Monticell, D.D. (2017) Gradient Ricci Solitons with Vanishing Conditions on Weyl. *Journal De Mathematiques Pures et Appliquees*, **108**, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2016.10.007

[31] Chen, X.X. and Wang, Y.Q. (2015) On Four-Dimensional Anti-Self-Dual Gradient Ricci Solitons. *Journal of Geometric Analysis*, **25**, 1335-1343. https://doi.org/10.1007/s12220-014-9471-8

[32] Wu, J.Y., Wu, P. and Wylie, W. (2014) Gradient Shrinking Ricci Solitons of Half Harmonic Weyl Curvature.

[33] Cao, H.D. and Chen, Q. (2009) On Bach-Flat Gradient Shrinking Ricci Solitons. *Journal of Differential Geometry*, **85**, 175-185. https://doi.org/10.4310/jdg/1287580963

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org