Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 71-82
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91010

On the Decay of Higher-Order Norms of the Solutions to the Compressible Micropolar Fluids System

Liang Mao, Qingqing Liu*

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 1178922825@qq.com, *maqqliu@scut.edu.cn

Received: Dec. 24th, 2018; accepted: Jan. 11th, 2019; published: Jan. 18th, 2019

Abstract

This paper primarily studies the decay of higher-order derivatives of the solution to the Cauchy problem on the compressible micropolar fluid system in $\mathbb{R}^3$. The L^2 norm decay rates have been investigated by Liu and Zhang [1]. We show that the decay rate of the first order spatial derivatives of solution is $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$ by applying the Fourier splitting method and have generalized the result of the paper [1].

Keywords

Compressible Micropolar Fluids, Fourier Splitting Method, Optimal Time Decay

可压缩微极流体系统解的衰减估计

毛　亮，刘青青*

华南理工大学，数学学院，广东 广州
Email: 1178922825@qq.com, *maqqliu@scut.edu.cn

收稿日期：2018年12月24日；录用日期：2019年1月11日；发布日期：2019年1月18日

摘　要

本文主要研究了可压缩微极流体系统在$\mathbb{R}^3$中柯西问题解的高阶导数的衰减估计。解的L^2范数的衰减率已

*通讯作者。

文章引用: 毛亮, 刘青青. 可压缩微极流体系统解的衰减估计[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 71-82.
DOI: 10.12677/pm.2019.91010

经被刘和张[1]研究，本文利用傅里叶变换的方法证明了该系统解的一阶导数的衰减率为$(1+t)^{-\frac{5}{4}}$，推广了文[1]的结果。

关键词

可压缩微极流体，傅里叶变换，衰减估计

1. 前言

我们下面考虑的系统满足下列方程：

$$\begin{cases} \rho_t + div(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + div(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) = (\mu+\zeta)\Delta u + (\mu+\lambda-\zeta)\nabla div\ u + 2\zeta\nabla\times\omega, \\ (\rho\omega)_t + div(\rho u\otimes\omega) + 4\zeta\omega = \mu'\Delta\omega + (\mu'+\lambda')\nabla div\ \omega + 2\zeta\nabla\times u. \end{cases} \tag{1.1}$$

该方程中的 $\rho=\rho(x,t)\ge 0,\ u=u(x,t)\in\mathbb{R}^3,\ \omega=\omega(x,t)\in\mathbb{R}^3$ 和 $p(\rho)$ 分别表示密度，速度，微自转速度和压力，其中 $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^3$。常数 $\mu,\lambda,\mu',\lambda',\zeta$ 是流体的一些粘性系数，并且满足 $\mu>0$、$2\mu+3\lambda-4\zeta\ge 0$、$\mu'>0$、$2\mu'+3\lambda'\ge 0$ 和 $\zeta>0$。

初始值为

$$(\rho,u,\omega)(0,x) = (\rho_0,u_0,\omega_0)(x), x\in\mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

在无穷远处

$$(\rho,u,\omega)(t,x)\to(1,0,0)\quad |x|\to\infty, t\ge 0 \tag{1.3}$$

这个系统被称为微极流体模型，可以描述等熵可压缩微极流体的运动[2]。与经典的 Navier-Stokes 方程相比，这个模型引入了一种新的向量场，即粒子旋转的角速度场。在数学上，这种微旋转速度可能导致一些新的困难；物理上，微极流体可能代表由悬浮在粘性介质中的刚性、随机定向(或球形)粒子组成的流体，在这种介质中，粒子的形变被忽略，多元悬浮液、动物血液和液晶都是这种介质。

由于微极流体系统在数学和物理学的重要性，有非常多的文献研究了它的数学理论。对不可压缩的流体，也即是 ρ 为常数，$\nabla\cdot u=0$，我们可以参考文献[3] [4] [5]。

对于可压缩的微极流体方程，Mujaković 在一维空间或具有球对称的三维空间中，对该模型解的局部存在性、整体存在性和正则性做了一系列的研究[6]-[12]。其他作者，如陈[13]证明了初始带真空的一维模型强解的整体存在性。在三维模型中，陈、黄、张[14]证明了柯西问题强解的爆破准则。陈、徐、张[15]解决了具有真空和不连续初始值的整体弱解。Mujaković 和她的合作者 Dražić 建立了可压缩的球对称、等方性、粘性和热传导的微极流体模型，对于这个模型他们分别先后证明了齐次边界条件下解的局部存在性，整体存在性，长时间行为和解的唯一性[16] [17] [18] [19]。

最近，刘和张[1]证明了该系统的平衡解的整体稳定性和最优衰减估计，主要结果如下。

引理 1.1：当 $N\ge 4$ 时，存在 $\delta_0>0, C_0$ 使得

$$\left\|\left[\rho_0-1,u_0,\omega_0\right]\right\|_N \le \delta_0 \tag{1.4}$$

对于该微极流体系统的柯西问题(1.1)~(1.3)有唯一的整体解$\left[\rho(t,x),u(t,x),\omega(t,x)\right]$满足

$$\left\|\left[\rho(t)-1,u(t),\omega(t)\right]\right\|_N^2+\int_0^t\left(\left\|\nabla\rho(s)\right\|_{N-1}^2+\left\|\nabla u(s)\right\|_N^2+\left\|\nabla\omega(s)\right\|_N^2\right)ds \le C_0\left\|\left[\rho_0-1,u_0,\omega_0\right]\right\|_N^2 \tag{1.5}$$

并且，存在$\delta_1>0,C_1$使得

$$\left\|\left[\rho_0-1,u_0,\omega_0\right]\right\|_N+\left\|\left[\rho_0-1,u_0,\omega_0\right]\right\|_{L^1} \le \delta_1 \tag{1.6}$$

则$\left[\rho(t,x),u(t,x),\omega(t,x)\right]$满足

$$\left\|\left[\rho-1,u\right]\right\| \le C_1(1+t)^{-\frac{3}{4}},\left\|\omega\right\| \le C_1(1+t)^{-\frac{5}{4}} \tag{1.7}$$

注 1.1：在本文中，我们假设$N=4$，那么在引理 1.1 中，结合(1.4)和(1.5)可以得到

$$\left\|\left[\rho(t)-1,u(t),\omega(t)\right]\right\|_{H^4}^2 \le C_0\delta_0^2 \tag{1.8}$$

这里我们用$C_0\delta_0^2$代表小量ε_0^2。

受稳定性和L^2范数衰减结果的影响，本文的主要工作是研究该微极流体系统解的一阶衰减估计。我们的主要结果是下面的定理。

定理 1.1：假设初始值$\left\|\left[\rho_0-1,u_0,\omega_0\right]\right\| \in H^4$，并且满足(1.1)~(1.3)中所有的条件，那么该微极流体系统柯西问题的整体解$(\rho-1,u,\omega)$存在时间衰减估计为

$$\left\|\nabla\left[\rho-1,u,\omega\right]\right\| \le C(1+t)^{-\frac{5}{4}} \tag{1.9}$$

最后，我们需要引入时间球S_0的概念，

$$S_0:=\left\{\xi\in\mathbb{R}^3 \middle| |\xi| \le \left(\frac{R}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

S_0在我们的证明中起到了非常重要的作用，它可以帮助我们通过使用低阶导数的衰减得到高阶导数的衰减估计，可以参看 Navier-Stokes 系统[20] [21]。本文用这种方法得到高阶导数的衰减估计。

注 1.2：在本文中，我们用$H^s(\mathbb{R}^3)(s\in\mathbb{R})$来表示通常意义下的 Sobolev 空间的范数$\|\cdot\|_{H^s}$和$L^p(\mathbb{R}^3)(1\le p\le\infty)$来表示通常意义下的$L^p$空间的范数$\|\cdot\|_{L^p}$。我们定义

$$\nabla^k v=\left\{\partial_x^\alpha v_i \middle| |\alpha|=k;i=1,2,3\right\},v=(v_1,v_2,v_3)$$

为方便后面的使用，下面是一些需要用到的不等式。

引理 1.2：若$f\in H^4(\mathbb{R}^3)$，那么我们有下列不等式：

$$\begin{aligned}&(1)\ \|f\|_{L^6} \le C\|\nabla f\|_{L^2},\\&(2)\ \|f\|_{L^p} \le C\|f\|_{H^1},2\le p\le 6,\\&(3)\ \|f\|_{L^\infty} \le C\|\nabla f\|_{H^1}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

引理 1.3：(Moser-type 型积分不等式)若$s\ge1$是整数，那么就有

1) 对于$f,g\in H^s\cap L^1$并且$m\le s$，

$$\left\|\nabla^m(fg)\right\|_{L^2} \le C\left(\|f\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m g\right\|_{L^2}+\|g\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m f\right\|_{L^2}\right). \tag{1.11}$$

2) 对于 $f\in H^m$, $\nabla f\in L^\infty$, $g\in H^{m-1}\bigcap L^\infty$ 并且 $m\le s$，

$$\left\|\nabla^m\left(fg\right)-f\nabla^m g\right\|_{L^2}\le C\left(\left\|\nabla f\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{m-1}g\right\|_{L^2}+\left\|g\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m f\right\|_{L^2}\right). \tag{1.12}$$

2. 微极流体系统的线性化

问题重塑

假设稳态的微级流体系统是平凡的，取 ρ=1,u=0,ω=0。令 $n=\rho-1$。

那么 $U:=\left[n,u,\omega\right]$ 满足

$$n_t+divu=S_1, \tag{2.1}$$

$$u_t+\gamma\nabla n-\left(\mu+\zeta\right)\Delta u-\left(\mu+\lambda-\zeta\right)\nabla divu-2\zeta\nabla\times\omega=S_2, \tag{2.2}$$

$$\omega_t+4\zeta\omega-\mu'\Delta\omega-\left(\mu'+\lambda'\right)\nabla div\omega-2\zeta\nabla\times u=S_3. \tag{2.3}$$

这里的 $S_i\left(i=1,2,3\right)$ 分别为

$$\begin{cases}S_1=-ndiv\ u-u\cdot\nabla n,\\ S_2=-u\cdot\nabla u-f\left(n\right)\left[\left(\mu+\zeta\right)\Delta u+\left(\mu+\lambda-\zeta\right)\nabla div\ u+2\zeta\nabla\times\omega\right]-h\left(n\right)\nabla n,\\ S_3=-u\cdot\nabla\omega-f\left(n\right)\left[\mu'\Delta\omega+\left(\mu'+\lambda'\right)\nabla div\ \omega-4\zeta\omega+2\zeta\nabla\times u\right].\end{cases} \tag{2.4}$$

其中

$$\gamma=\frac{p'\left(1\right)}{1},f\left(n\right)=\frac{n}{n+1},h\left(n\right)=\frac{p'\left(n+1\right)}{n+1}-\frac{p'\left(1\right)}{1}\sim n.$$

初始值为

$$\left(n,u,\omega\right)\left(x,0\right)=\left(n_0,u_0,\omega_0\right)\left(x\right).$$

3. 证明定理 1.1

引理 3.1：在(1.1)~(1.3)式的条件下，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\left(\sqrt{\gamma}n,u,\omega\right)\right\|_{H^3}^3+C_1\left\|\nabla^2u\right\|_{H^3}^2+C_2\left\|\nabla^2\omega\right\|_{H^3}^2\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2n\right\|_{H^2}^2+C\left\|\nabla n\right\|_{H^1}^2\left\|\omega\right\|_{L^2}^2. \tag{3.1}$$

证明：对(2.1)，(2.2)，(2.3)式中左右两边同时关于空间求 $m\left(m=1,2,3,4\right)$ 阶空间导数，再分别乘以 $\nabla^m n,\nabla^m u,\nabla^m\omega$，然后在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，我们可以得到

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2+\left\langle\nabla^m n,\nabla^m\nabla div\ u\right\rangle=\left\langle\nabla^m n,\nabla^m S_1\right\rangle,\\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+\gamma\left\langle\nabla^m u,\nabla^m\nabla n\right\rangle-(\mu+\zeta)\left\langle\nabla^m u,\nabla^m\Delta u\right\rangle\\ \qquad-\left(\mu+\lambda-\zeta\right)\left\langle\nabla^m u,\nabla^m\nabla div\ u\right\rangle-2\zeta\left\langle\nabla^m u,\nabla^m\nabla\times\omega\right\rangle=\left\langle\nabla^m u,\nabla^m S_2\right\rangle,\\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}^2+4\zeta\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m\omega\right\rangle-\mu'\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m\Delta\omega\right\rangle-(\mu'+\lambda')\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m\nabla div\ u\right\rangle\\ \qquad-2\zeta\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m\nabla\times u\right\rangle=\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m S_3\right\rangle.\end{cases} \tag{3.2}$$

然后将 $\gamma\left(3.2\right)_1,\left(3.2\right)_2$ 和 $\left(3.2\right)_3$ 求和，我们可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^m \omega\right\|_{L^2}^2\right)+(\mu+\zeta)\left\|\nabla^m\nabla u\right\|_{L^2}^2$$
$$+(\mu+\lambda-\zeta)\left\|\nabla^m divu\right\|_{L^2}^2+4\zeta\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}^2+\mu'\left\|\nabla^m\nabla\omega\right\|_{L^2}^2+(\mu'+\lambda')\left\|\nabla^m div\omega\right\|_{L^2}^2 \tag{3.3}$$
$$=4\zeta\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m\nabla\times u\right\rangle+\gamma\left\langle\nabla^m n,\nabla^m S_1\right\rangle+\left\langle\nabla^m u,\nabla^m S_2\right\rangle+\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m S_3\right\rangle$$

根据柯西不等式，我们知道

$$4\zeta\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m\nabla\times u\right\rangle\le 4\zeta\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}^2+\zeta\left\|\nabla^m\nabla\times u\right\|_{L^2}^2 \tag{3.4}$$

结合(3.3)和(3.4)，我们可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^m \omega\right\|_{L^2}^2\right)+\mu\left\|\nabla^m\nabla u\right\|_{L^2}^2+(\mu+\lambda-\zeta)\left\|\nabla^m divu\right\|_{L^2}^2+\mu'\left\|\nabla^m\nabla\omega\right\|_{L^2}^2$$
$$+(\mu'+\lambda')\left\|\nabla^m div\omega\right\|_{L^2}^2\le\gamma\left\langle\nabla^m n,\nabla^m S_1\right\rangle+\left\langle\nabla^m u,\nabla^m S_2\right\rangle+\left\langle\nabla^m\omega,\nabla^m S_3\right\rangle \tag{3.5}$$

第一步：我们处理$\left\langle\nabla^m n,\nabla^m S_1\right\rangle$这一项。

1) 当$m=1$时，根据分部积分法和**引理(1.1)**，我们可以得到

$$\left\langle\nabla(ndivu),\nabla n\right\rangle=-\left\langle ndivu,\nabla^2 n\right\rangle\le\|n\|_{L^3}\|\nabla divu\|_{L^2}\|\nabla n\|_{L^2}^2\le\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{L^2}^2+\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \tag{3.6}$$

类似的，我们可以得到

$$\left\langle\nabla(u\cdot\nabla n),\nabla n\right\rangle=-\left\langle u\cdot\nabla n,\nabla^2 n\right\rangle\le\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.7}$$

结合(3.6)和(3.7)，可以得到

$$\left\langle\nabla S_1,\nabla n\right\rangle\le\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{L^2}^2+\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 \tag{3.8}$$

2) 当$m=2,3,4$时，利用 Hőlder 不等式和**引理(1.1)~引理(1.3)**，我们可以得到

$$\left\langle\nabla^m(ndivu),\nabla^m n\right\rangle\le C\left\|\nabla^m(ndivu)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.9}$$

对于第二部分

$$\left\langle\nabla^m(u\cdot\nabla n),\nabla^m n\right\rangle=\left\langle\nabla^m(u\cdot\nabla n)-u\cdot\nabla^m\nabla n,\nabla^m n\right\rangle+\left\langle u\cdot\nabla^m\nabla n,\nabla^m n\right\rangle$$
$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2 \tag{3.10}$$

利用柯西不等式和**引理(1.1)~引理(1.3)**，我们有

$$\mathrm{I}_1\le C\left(\|\nabla u\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{m-1}\nabla n\right\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}$$
$$\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2 \tag{3.11}$$

利用分部积分法和 Hőlder 不等式，可以得到

$$\mathrm{I}_2=\left\langle u,\frac{1}{2}\nabla\left|\nabla^m n\right|^2\right\rangle=-\left\langle\nabla\cdot u,\frac{1}{2}\left|\nabla^m n\right|^2\right\rangle\le\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.12}$$

所以，结合(3.11)和(3.12)，可以得到

$$\left\langle\nabla^m(u\cdot\nabla n),\nabla^m n\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2 \tag{3.13}$$

结合(3.9)和(3.13)，我们有

$$\left\langle\nabla^m S_1,\nabla^m n\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2,(m=2,3,4) \tag{3.14}$$

对 $\left\langle\nabla^m S_1,\nabla^m n\right\rangle$ 从 $m=1$ 到 $m=4$ 求和，根据(3.8)和(3.14)，可以得到

$$\sum_{m=1}^{4}\left\langle\nabla^m S_1,\nabla^m n\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{H^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{H^3}^2 \tag{3.15}$$

第二步：接下来处理 $\left\langle\nabla^m u,\nabla^m S_2\right\rangle$ 这一项。

1) 当 $m=1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla u,\nabla S_2\right\rangle&=-\left\langle\nabla(u\cdot\nabla u),\nabla u\right\rangle-\left\langle\nabla(n\Delta u),\nabla u\right\rangle-\left\langle\nabla(n\nabla divu),\nabla u\right\rangle\\&\quad-\left\langle\nabla(n\nabla\times\omega),\nabla u\right\rangle-\left\langle\nabla(n\nabla n),\nabla u\right\rangle\\&=\sum_{i=1}^{5}\mathrm{I}_i\end{aligned} \tag{3.16}$$

利用分部积分法，Hőlder 不等式和**引理(1.1)~引理(1.3)**，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}_1=\left\langle u\cdot\nabla u,\nabla^2 u\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\&\mathrm{I}_2=\left\langle n\Delta u,\nabla^2 u\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\&\mathrm{I}_3=\left\langle n\nabla div\, u,\nabla^2 u\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2\\&\mathrm{I}_4=\left\langle n\nabla\times\omega,\nabla^2 u\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2\\&\mathrm{I}_5=\left\langle n\nabla n,\nabla^2 u\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.17}$$

将(3.17)代入(3.16)中，我们可以得到

$$\left\langle\nabla u,\nabla S_2\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2 \tag{3.18}$$

2) 当 $2\le m\le 4$ 时。首先利用柯西不等式和**引理(1.1)~引理(1.3)**，可以得到

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla^m(u\cdot\nabla u),\nabla^m u\right\rangle&\le C\left(\|u\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m\nabla u\right\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}\\&\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.19}$$

同理，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\left\langle\nabla^m(n\nabla\times\omega),\nabla^m u\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}\omega\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2\\&\left\langle\nabla^m(n\nabla n),\nabla^m u\right\rangle\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.20}$$

另一方面，我们需要处理 $\left\langle\nabla^m(n\Delta u),\nabla^m u\right\rangle$ 这一项。利用分部积分法，可以得到

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla^m(n\Delta u),\nabla^m u\right\rangle&=\left\langle\nabla^m\left[\nabla(n\cdot divu)-\nabla n\cdot divu\right],\nabla^m u\right\rangle\\&=\left\langle\nabla^m\left[\nabla(n\cdot divu)\right],\nabla^m u\right\rangle-\left\langle\nabla^m\left[\nabla n\cdot divu\right],\nabla^m u\right\rangle=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2\end{aligned} \tag{3.21}$$

再利用柯西不等式、Hőlder 不等式和**引理(1.1)~引理(1.3)**，我们可以分别得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&\le C\left(\|n\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}+\|div\, u\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}\\&\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2\\\mathrm{I}_2&\le C\left(\|\nabla n\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}+\|div\, u\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}\\&\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.22}$$

将(3.22)代入到(3.21)中，得到

$$\left\langle \nabla^m\left(n\Delta u\right),\nabla^m u\right\rangle \le C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.23}$$

同理可以得到

$$\left\langle \nabla^m\left(n\nabla divu\right),\nabla^m u\right\rangle \le C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.24}$$

将$\left\langle \nabla^m u,\nabla^m S_2\right\rangle$从$m=1$到$m=4$求和，根据(3.18)，(3.19)，(3.20)，(3.23)，(3.24)得到

$$\sum_{m=1}^{4}\left\langle \nabla^m u,\nabla^m S_2\right\rangle \le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{H^3}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{H^3}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{H^2}^2 \tag{3.25}$$

第三步：最后我们来处理$\left\langle \nabla^m\omega,\nabla^m S_3\right\rangle$这一项.

1) 当$m=1$时，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla\omega,\nabla S_3\right\rangle &= -\left\langle \nabla(u\cdot\nabla\omega),\nabla\omega\right\rangle-\left\langle \nabla(n\Delta\omega),\nabla\omega\right\rangle-\left\langle \nabla\left(n\nabla div\omega\right),\nabla\omega\right\rangle\\ &\quad -\left\langle \nabla(n\omega),\nabla\omega\right\rangle-\left\langle \nabla(n\nabla\times u),\nabla\omega\right\rangle\\ &=\sum_{i=1}^{5}\mathrm{I}_i\end{aligned} \tag{3.26}$$

类似于(3.17)，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}_1\le\|u\|_{L^3}\|\nabla\omega\|_{L^6}\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2\\ &\mathrm{I}_2\le\|n\|_{L^2}\|\Delta\omega\|_{L^2}\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2\\ &\mathrm{I}_3\le\|n\|_{L^2}\|\nabla div\ \omega\|_{L^2}\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2\\ &\mathrm{I}_4\le\|n\omega\|_{L^2}\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}\le\varepsilon\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla n\|_{H^1}^2\|\omega\|_{L^2}^2\\ &\mathrm{I}_5\le\|n\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.27}$$

将(3.27)代入到(3.26)中得到

$$\left\langle \nabla\omega,\nabla S_3\right\rangle \le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^2\omega\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla n\|_{H^1}^2\|\omega\|_{L^2}^2 \tag{3.28}$$

2) 当$2\le m\le 4$时。利用柯西不等式、Hőlder不等式和**引理(1.1)~引理(1.3)**，可以得到

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^m\left(u\nabla\omega\right),\nabla^m\omega\right\rangle &\le C\left(\|u\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m\nabla\omega\right\|_{L^2}+\|\nabla\omega\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}\\ &\le \mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^m u\right\|_{L^2}^2+\mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}\omega\right\|_{L^2}^2+\mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.29}$$

同理可以得到，

$$\begin{aligned}&\left\langle \nabla^m\left(n\nabla\times u\right),\nabla^m\omega\right\rangle \le \mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}u\right\|_{L^2}^2+\mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}^2+\mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2\\ &\left\langle \nabla^m\left(n\omega\right),\nabla^m\omega\right\rangle \le \mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2+\mathrm{C}\varepsilon_0\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.30}$$

对于$\left\langle \nabla^m\left(n\Delta\omega\right),\nabla^m\omega\right\rangle$这一项，我们先用**引理(1.1)**和分部积分法来处理

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^m\left(n\Delta\omega\right),\nabla^m\omega\right\rangle &= \left\langle \nabla^m\left(n\Delta\omega\right)-n\nabla^m\Delta\omega,\nabla^m\omega\right\rangle+\left\langle n\nabla^m\Delta\omega,\nabla^m\omega\right\rangle\\ &\le C\left(\|\nabla n\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{m-1}\Delta\omega\right\|_{L^2}+\|\Delta\omega\|_{L^\infty}\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}+\left\langle n\nabla^m\Delta\omega,\nabla^m\omega\right\rangle\\ &\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^{m+1}\omega\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m\omega\right\|_{L^2}^2+C\varepsilon_0\left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.31}$$

同样的我们可以得到

$$\left\langle \nabla^m \left(n\nabla div\omega\right), \nabla^m \omega\right\rangle \le C\varepsilon_0 \left\|\nabla^{m+1}\omega\right\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \left\|\nabla^m \omega\right\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \left\|\nabla^m n\right\|_{L^2}^2 \tag{3.32}$$

将$\left\langle \nabla^m \omega, \nabla^m S_3\right\rangle$从$m=1$到$m=4$求和，根据(3.28)~(3.32)，得到

$$\sum_{m=1}^{4}\left\langle \nabla^m \omega, \nabla^m S_3\right\rangle \le C\varepsilon_0 \left\|\nabla^2 n\right\|_{H^2}^2 + C\varepsilon_0 \left\|\nabla^2 u\right\|_{H^3}^2 + C\varepsilon_0 \left\|\nabla^2 \omega\right\|_{H^3}^2 + C\left\|\nabla n\right\|_{H^1}^2 \left\|\omega\right\|_{L^2}^2 \tag{3.33}$$

第四步：将(3.5)式左右两边从$m=1$到$m=4$求和，根据(3.15)、(3.25)和(3.33)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\left(\sqrt{\gamma}n, u, \omega\right)\right\|_{H^3}^3 + C_1\left\|\nabla^2 u\right\|_{H^3}^2 + C_2\left\|\nabla^2 \omega\right\|_{H^3}^2 \le C\varepsilon_0 \left\|\nabla^2 n\right\|_{H^2}^2 + C\left\|\nabla n\right\|_{H^1}^2 \left\|\omega\right\|_{L^2}^2 .$$

引理 3.2：在(1.1)~(1.3)式的条件下，我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{3}\left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla n\right\rangle\right) + \gamma\left\|\nabla^2 n\right\|_{H^2}^2 \le C\left\|\nabla^2 u\right\|_{H^3}^2 + C\left\|\nabla^2 \omega\right\|_{H^2}^2 \tag{3.34}$$

证明：在方程(2.2)式中，左右两边同时取m阶导数，然后同时乘以$\nabla^k \nabla n\left(k=1,2,3\right)$，得到

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^k u_t, \nabla^k \nabla n\right\rangle + \gamma\left\|\nabla^k \nabla n\right\|_{L^2}^2 &= \left(\mu+\zeta\right)\left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k \Delta u\right\rangle + \left(\mu+\lambda-\zeta\right)\left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k div\ u\right\rangle \\ &\quad +2\zeta\left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k \nabla\times\omega\right\rangle + \left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k S_2\right\rangle\end{aligned} \tag{3.35}$$

为了处理掉$\left\langle \nabla^k u_t, \nabla^k \nabla n\right\rangle$这一项，我们需要用到分部积分法和方程(2.1)

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^k u_t, \nabla^k \nabla n\right\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla n\right\rangle - \left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla n_t\right\rangle \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla n\right\rangle - \left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla S_1\right\rangle + \left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla div\ u\right\rangle\end{aligned} \tag{3.36}$$

将(3.36)代入(3.35)中得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla n\right\rangle + \gamma\left\|\nabla^k \nabla n\right\|_{L^2}^2 &= \left\|\nabla^k div\ u\right\|_{L^2}^2 + \left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla S_1\right\rangle + \left(\mu+\zeta\right)\left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k \Delta u\right\rangle \\ &\quad + \left(\mu+\lambda-\zeta\right)\left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k \nabla div\ u\right\rangle + 2\zeta\left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k \nabla\times\omega\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k S_2\right\rangle\end{aligned} \tag{3.37}$$

第一步：我们需要处理$\left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla S_1\right\rangle$这一项。当$k=1$时，利用分部积分法和柯西不等式，得到

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla u, \nabla\nabla S_1\right\rangle &= -\left\langle \nabla divu, \nabla S_1\right\rangle = \left\langle \nabla divdivu, S_1\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla divdivu, ndivu\right\rangle + \left\langle \nabla divdivu, u\nabla n\right\rangle \\ &\le \left\|n\right\|_{L^3}\left\|div\ u\right\|_{L^6}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2} + \left\|u\right\|_{L^3}\left\|\nabla n\right\|_{L^6}\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2} \\ &\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0\left\|\nabla^2 n\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.38}$$

当$k=2,3$时，利用分部积分法和**引理(1.1)~引理(1.3)**得

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla S_1\right\rangle &= -\left\langle \nabla^k divu, \nabla^k S_1\right\rangle \\ &= -\left\langle \nabla^k divu, \nabla^k\left(ndivu\right)\right\rangle - \left\langle \nabla^k divu, \nabla^k\left(u\cdot\nabla n\right)\right\rangle \\ &\le C\left(\left\|\nabla n\right\|_{H^1}\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_{L^2} + \left\|\nabla divu\right\|_{H^1}\left\|\nabla^k n\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_{L^2} \\ &\quad + C\left(\left\|\nabla u\right\|_{H^1}\left\|\nabla^{k+1}n\right\|_{L^2} + \left\|\nabla^2 n\right\|_{H^1}\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_{L^2} \\ &\le C\varepsilon_0\left\|\nabla^{k+1}u\right\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0\left\|\nabla^k u\right\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0\left\|\nabla^{k+1}n\right\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0\left\|\nabla^k n\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.39}$$

对 $\langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla S_1 \rangle$ 从 $k=1$ 到 $k=3$ 求和，根据(3.38)和(3.39)得到

$$\sum_{k=1}^{3} \langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla S_1 \rangle \le C\varepsilon_0 \|\nabla^2 u\|_{H^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^2 n\|_{H^2}^2 \tag{3.40}$$

应用柯西不等式和 Hőlder 不等式，得到

$$\begin{aligned} \langle \nabla^k \Delta u, \nabla^k \nabla n \rangle &\le \|\nabla^k \Delta u\|_{L^2} \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2} \le \varepsilon \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2}^2 + C\|\nabla^{k+2} u\|_{L^2}^2 \\ \langle \nabla^k \nabla div\ u, \nabla^k \nabla n \rangle &\le \|\nabla^k \nabla div\ u\|_{L^2} \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2} \le \varepsilon \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2}^2 + C\|\nabla^{k+2} u\|_{L^2}^2 \\ \langle \nabla^k \nabla \times \omega, \nabla^k \nabla n \rangle &\le \|\nabla^k \nabla \times \omega\|_{L^2} \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2} \le \varepsilon \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2}^2 + C\|\nabla^{k+1} \omega\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

第二步：处理 $\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k S_2 \rangle$ 这一项。当 $k=1$ 时，类似于(3.38)可以得到

$$\begin{aligned} &\langle \nabla\nabla n, \nabla(u\nabla u) \rangle = -\langle \nabla^2 divn, u\nabla u \rangle \le C\varepsilon_0 \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 \\ &\langle \nabla\nabla n, \nabla(n\Delta u) \rangle \le C\varepsilon_0 \|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 \\ &\langle \nabla\nabla n, \nabla(n\nabla divu) \rangle \le C\varepsilon_0 \|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 \\ &\langle \nabla\nabla n, \nabla(u\nabla \times \omega) \rangle \le C\varepsilon_0 \|\nabla^2 \omega\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 \\ &\langle \nabla\nabla n, \nabla(n\nabla n) \rangle \le C\varepsilon_0 \|\nabla^2 n\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

当 $k=2,3$ 时，我们有

$$\begin{aligned} \langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k(u\nabla u) \rangle &\le \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2} \|\nabla^k(u\nabla u)\|_{L^2} \\ &\le C\left(\|u\|_{L^\infty} \|\nabla^k \nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^\infty} \|\nabla^k u\|_{L^2}\right) \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2} \\ &\le C\varepsilon_0 \|\nabla^k u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^{k+1} u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^{k+1} n\|_{L^2}^2 \\ \langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k(n\Delta u) \rangle &\le C\varepsilon_0 \|\nabla^{k+2} u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 \\ \langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k(n\nabla divu) \rangle &\le C\varepsilon_0 \|\nabla^{k+2} u\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 \\ \langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k(n\nabla \times \omega) \rangle &\le C\varepsilon_0 \|\nabla^{k+1} \omega\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^k \nabla n\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 \\ \langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k(n\nabla n) \rangle &\le C\varepsilon_0 \|\nabla^{k+1} n\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.46}$$

将 $\langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k S_2 \rangle$ 从 $k=1$ 到 $k=3$ 求和，根据(3.45)和(3.46)，得到

$$\sum_{k=1}^{3} \langle \nabla^k \nabla n, \nabla^k \nabla S_2 \rangle \le C\varepsilon_0 \|\nabla^2 u\|_{H^3}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^2 n\|_{H^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\nabla^2 \omega\|_{H^2}^2 \tag{3.47}$$

第三步：将(3.37)式左右两边从 $k=1$ 到 $k=3$ 求和，根据(3.40)、(3.41)和(3.47)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{3} \langle \nabla^k u, \nabla^k \nabla n \rangle\right) + \gamma' \|\nabla^2 n\|_{H^2}^2 \le C\|\nabla^2 u\|_{H^3}^2 + C\|\nabla^2 \omega\|_{H^2}^2 .$$

证明定理 1.1：(3.34)式乘以 $\dfrac{2C_4\varepsilon_0}{\gamma'}$ 加上(3.1)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) + \mathrm{C}_5\left(\|\nabla^2 n\|_{H^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{H^3}^2 + \|\nabla^2 \omega\|_{H^3}^2\right) \le \mathrm{C}\|\nabla n\|_{H^1}^2 \|\omega\|_{L^2}^2 \tag{3.48}$$

其中

$$N(t):=\|\nabla(n,u,\omega)\|_{H^3}^2+\frac{2C_4\varepsilon_0}{\gamma'}\sum_{k=1}^{3}\left\langle\nabla^k u,\nabla^k\nabla n\right\rangle$$

根据柯西不等式和小量 ε_0，可以得到如下等价关系

$$C_6^{-1}\|\nabla(n,u,\omega)\|_{H^3}^2\le N(t)\le C_6\|\nabla(n,u,\omega)\|_{H^3}^2 \tag{3.49}$$

根据(3.48)式，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)+\frac{C_5}{2}\left(\|\nabla^2 n\|_{H^2}^2+\|\nabla^2 n\|_{H^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{H^3}^2+\|\nabla^2\omega\|_{H^3}^2\right)\le \mathrm{C}\|\nabla n\|_{H^1}^2\|\omega\|_{L^2}^2 \tag{3.50}$$

对常数 R 我们可以定义一个时间球 S_0

$$S_0:=\left\{\xi\in\mathbb{R}^3\middle||\xi|\le\left(\frac{R}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

然后我们就有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla^5 u\right|^2\mathrm{d}x&\ge\int_{\mathbb{R}^3/S_0}|\xi|^{10}|\hat{u}|^2\mathrm{d}\xi\\&\ge\frac{R}{1+t}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^8|\hat{u}|^2\mathrm{d}\xi-\left(\frac{R}{1+t}\right)^2\int_{S_0}|\xi|^6|\hat{u}|^2\mathrm{d}\xi\\&\ge\frac{R}{1+t}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla^4 u\right|^2\mathrm{d}\xi-\left(\frac{R}{1+t}\right)^2\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla^3 u\right|^2\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{3.51}$$

也即是

$$\|\nabla^5 u\|_{L^2}^2\ge\frac{R}{1+t}\|\nabla^4 u\|_{L^2}^2-\left(\frac{R}{1+t}\right)^2\|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 \tag{3.52}$$

同理就有

$$\|\nabla^5\omega\|_{L^2}^2\ge\frac{R}{1+t}\|\nabla^4\omega\|_{L^2}^2-\left(\frac{R}{1+t}\right)^2\|\nabla^3\omega\|_{L^2}^2 \tag{3.53}$$

那于是就有

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 n\|_{H^2}^2&\ge\frac{R}{1+t}\|\nabla n\|_{H^2}^2-\left(\frac{R}{1+t}\right)^2\|n\|_{H^2}^2\\\|\nabla^2 u\|_{H^3}^2&\ge\frac{R}{1+t}\|\nabla u\|_{H^3}^2-\left(\frac{R}{1+t}\right)^2\|u\|_{H^3}^2\\\|\nabla^2\omega\|_{H^3}^2&\ge\frac{R}{1+t}\|\nabla\omega\|_{H^3}^2-\left(\frac{R}{1+t}\right)^2\|\omega\|_{H^3}^2\end{aligned} \tag{3.54}$$

根据(3.50)和(3.54)，利用**引理 1.1** 中的衰减，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)+\frac{C_5}{2}\left[\frac{R}{1+t}\left(\|\nabla n\|_{H^2}^2+\|\nabla u\|_{H^3}^2+\|\nabla\omega\|_{H^3}^2\right)+\|\nabla^2 n\|_{H^2}^2\right]\\&\le C(1+t)^{-2}\left(\|n\|_{H^2}^2+\|u\|_{H^3}^2+\|\omega\|_{H^3}^2\right)+C\|\nabla n\|_{H^1}^2\|\omega\|_{L^2}^2\\&\le C(1+t)^{-2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}+C(1+t)^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{5}{2}}\\&\le C(1+t)^{-\frac{7}{2}}\end{aligned} \tag{3.55}$$

对于时间 t 足够大时，有 $t \ge R-1$，即 $\frac{R}{1+t} \le 1$，那么就有

$$\frac{R}{1+t}\left\|\nabla^2 n\right\|_{H^2}^2 \le \left\|\nabla^2 n\right\|_{H^2}^2 \tag{3.56}$$

将(3.56)代入(3.55)中，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)+\frac{C_5 R}{2(1+t)}\left(\|\nabla n\|_{H^3}^2+\|\nabla u\|_{H^3}^2+\|\nabla \omega\|_{H^3}^2\right) \le C(1+t)^{-\frac{7}{2}} \tag{3.57}$$

根据等价关系(3.49)可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)+\frac{C_5 R}{2C_6(1+t)}N(t) \le C(1+t)^{-\frac{7}{2}} \tag{3.58}$$

在(3.58)式中，取 $R=\frac{8C_6}{C_5}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)++\frac{4}{1+t}N(t) \le C(1+t)^{-\frac{7}{2}} \tag{3.59}$$

在(3.59)式中，左右两边同时乘以 $(1+t)^4$，再同时在 $[0,t]$ 上取积分，可以得到

$$N(t) \le C(1+t)^{-4}\left\{N(0)+C(1+t)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{3.60}$$

所以，就可以得到

$$N(t) \le C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \tag{3.61}$$

根据等价关系，也即是有

$$\|\nabla n\|_{H^3}^2+\|\nabla u\|_{H^3}^2+\|\nabla \omega\|_{H^3}^2 \le C(1+t)^{-\frac{5}{2}}$$

对所有的 $t \ge T_2 := 8C_6C_5^{-1}-1$。因此，我们完成了**定理 1.1** 的证明。

致 谢

感谢导师朱长江教授对我论文的研究方向做出的指导性意见和推荐；刘青青的研究得到国家自然科学基金(No. 11501217)和广东省自然科学基金(No. 2016A030310416)的支持。

参考文献

[1] Liu, Q.Q. and Zhang, P.X. (2016) Optimal Time Decay of the Compressible Micropolar Fluids. *Differential Equations*, **260**, 7634-7661. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.01.037

[2] Eringen, A.C. (1966) Theory of Micropolar Fluids. *International Journal of Mathematics and Mechanics*, **16**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1967.16.16001

[3] Chen, Q. and Miao, C. (2012) Global Well-Posedness for the Micropolar Fluid System in Critical Besov Spaces. *Differential Equations*, **252**, 2698-2724. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.09.035

[4] Chen, M.T. (2013) Global Well-Posedness of the 2D Incompressible Micropolar Fluid Flows with Partial Viscosity and Angular Viscosity. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, **33**, 929-935.

[5] Galdi, G.P. and Rionero, S. (1977) A Note on the Existence and Uniqueness of Solutions of the Micropolar Fluid Equations. *International Journal of Engineering Science*, **15**, 105-108. https://doi.org/10.1016/0020-7225(77)90025-8

[6] Mujaković, N. (1998) One-Dimensional Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid: A Local Existence Theorem. *Glasnik Matematicki. Serija III*, **33**, 71-91.

[7] Mujaković, N. (2001) One-Dimensional Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid: Regularity of the Solution. *Boundary Value Prolems*, **10**, 181-193.

[8] Mujaković, N. (2005) Global in Time Estimates for One-Dimensional Compressible Viscous Micropolar Fluid Model. *Glasnik Matematicki*. *Serija III*, **40**, 103-120.

[9] Mujaković, N. (2005) One-Dimensional Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid: The Cauchy Problem. *Mathematical Communications*, **10**, 1-14.

[10] Mujaković, N. (2007) Non-Homogeneous Boundary Value Problem for One-Dimensional Compressible Viscous Micropolar Fluid Model: A Local Existence Theorem. *Annali dell'Universita di Ferrara*. *Sezione VII*. *Scienze Matematiche*, **53**, 361-379. https://doi.org/10.1007/s11565-007-0023-z

[11] Mujaković, N. (2008) Nonhomogeneous Boundary Value Problem for One-Dimensional Compressible Viscous Micropolar Fluid Model: Regularity of the Solution. *Boundary Value Problems*, **2008**, Article ID: 189748. https://doi.org/10.1155/2008/189748

[12] Mujaković, N. (2009) Non-Homogeneous Boundary Value Problem for One-Dimensional Compressible Viscous Micropolar Fluid Model: A Global Existence Theorem. *Mathematical Inequalities & Applications*, **12**, 651-662. https://doi.org/10.7153/mia-12-49

[13] Chen, M.T. (2011) Global Strong Solutions for the Viscous, Micropolar, Compressible Flow. *Partial Differential Equation*, **24**, 158-164.

[14] Chen, M.T., Huang, B. and Zhang, J.W. (2013) Blowup Criterion for the Three-Dimensional Equations of Compressible Viscous Micropolar Fluids with Vacuum. *Nonlinear Analysis*, **79**, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.10.013

[15] Chen, M.T., Xu, X.Y. and Zhang, J.W. (2015) Global Weak Solutions of 3D Compressible Micropolar Fluids with Discontinuous Initial Data and Vacuum. *Communications in Mathematical Sciences*, **13**, 225-247. https://doi.org/10.4310/CMS.2015.v13.n1.a11

[16] Dražić, I. and Mujaković, N. (2012) 3-D Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid with Spherical Symmetry: A Local Existence Theorem. *Boundary Value Problems*, **2012**, 69. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2012-69

[17] Dražić, I. and Mujaković, N. (2015) 3-D Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid with Spherical Symmetry: A Global Existence Theorem. *Boundary Value Problems*, **2015**, 98. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0357-x

[18] Dražić, I. and Mujaković, N. (2015) 3-D Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid with Spherical Symmetry: Large Time Behavior of the Solution. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **431**, 545-568. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.002

[19] Mujaković, N. (2014) 3-D Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid with Spherical Symmetry: Uniqueness of a Generalized Solution. *Boundary Value Problems*, **2014**, 226. https://doi.org/10.1186/s13661-014-0226-z

[20] Schonbek, M.E. and Wiegner, M. (1996) On the Decay of Higher-Order Norms of the Solutions of Navier-Stokes Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **126**, 677-685. https://doi.org/10.1017/S0308210500022976

[21] Schonbek, M.E. (1985) L^2 Decay for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **88**, 209-222. https://doi.org/10.1007/BF00752111