Pure Mathematics 理论数学, **2019, 9(2), 142-146**
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92018

Coleman Automorphisms of Finite Groups with a Self-Centralizing Normal Subgroup

Jianxia Liu, Jinke Hai*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1368651339@qq.com, *haijinke@qdu.edu.cn

Received: Feb. 13th, 2019; accepted: Feb. 28th, 2019; published: Mar. 7th, 2019

Abstract

Let G be a finite group with a self-centered normal subgroup N. In this note, we studied the effects of the properties of the self-centered normal subgroup N on the structure of the Coleman outer automorphism group of G and proved that all Coleman automorphisms of G are inner when N is under some conditions. Such Coleman automorphisms play an important role in the research of normalizer problem for integral group rings.

Keywords

Perfect Group, Almost Simple Group, Coleman Automorphism

具有自中心化正规子群的有限群的Coleman自同构

刘建霞，海进科*

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 1368651339@qq.com, *haijinke@qdu.edu.cn

收稿日期：2019年2月13日；录用日期：2019年2月28日；发布日期：2019年3月7日

摘 要

设G为具有自中心化正规子群N的有限群。在这篇注记中，我们研究了自中心化正规子群N的性质对G的Coleman外自同构群结构的影响，证明了N在某些条件下G的Coleman自同构均为内自同构。这样的

*通讯作者。

文章引用: 刘建霞, 海进科. 具有自中心化正规子群的有限群的 Coleman 自同构[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 142-146.
DOI: 10.12677/pm.2019.92018

Coleman自同构对研究整群环的正规化子问题有着重要的作用。

关键词

完全群，几乎单群，Coleman自同构

1. 引言

设 G 为有限群，σ 为 G 的一个自同构，如果 σ 在 G 的任意一个 $Sylow$ 子群上的限制等于 G 的某个内自同构在其上的限制，则称 σ 为 G 的一个 Coleman 自同构。G 的所有的 Coleman 自同构组成了 $Aut(G)$ 的一个子群，记为 $Aut_{Col}(G)$。显然 $Inn(G)\trianglelefteq Aut_{Col}(G)$，称商群 $Aut_{Col}(G)/Inn(G)$ 为 G 的 Coleman 外自同构群，记为 $Out_{Col}(G)$。在文献[1]中，Hertweck 和 Kimmerle 证明了 $Out_{Col}(G)$ 是交换群，给出了 $Out_{Col}(G)$ 是 p'-群的一些充分条件。在文献[2]中，海进科等研究了因子群的性质对有限群 G 的 Coleman 外自同构群的影响，也给出了 $Out_{Col}(G)$ 是 p'-群的一些充分条件。在文献[3]中，李正兴等证明了具有唯一非平凡正规子群的有限群 G 的 Coleman 自同构为内自同构。Antwerpen 在文献[4]中研究了具有自中心化特征单的正规子群的有限群的 Coleman 自同构，证明了这样的群的 Coleman 自同构也为内自同构。在文献[5]中，赵文英等人也研究了具有自中心化正规子群的有限群的 Coleman 自同构，并给出了 $Out_{Col}(G)=1$ 的一些充分条件。其它有关 Coleman 自同构方面的结果可参见文献[6] [7]。

设 G 是一个有限群，我们用 ZG 表示 G 在整群环 Z 上的整群环，用 $U(ZG)$ 表示 ZG 的单位群，用 $N_{U(ZG)}(G)$ 表示 G 在单位群 $U(ZG)$ 中的正规化子。对任意 $u\in N_{U(ZG)}(G)$，用 φ_u 表示由 u 通过共轭诱导的 G 的自同构，记 $Aut_Z(G)=\left\{\varphi_u \middle| u\in N_{U(ZG)}(G)\right\}$，令 $Out_Z(G)=Aut_Z(G)/Inn(G)$。由文献[8]中的问题 43 知，G 具有正规化子性质当且仅当 $Out_Z(G)=1$。由著名的 Coleman 引理知 $Out_Z(G)\le Out_{Col}(G)$，所以只要能够证明 $Out_{Col}(G)=1$，那么 G 具有正规化子性质，这促使人们去研究什么样的有限群 G 满足 $Out_{Col}(G)=1$。

称 G 为完全群，如果 $Z(G)=1$ 且 $Aut(G)=Inn(G)$。称 H 为几乎单群，如果存在非交换单群 G，使得 $G\le H\le Aut(G)$。称 G 为有限群 S 和有限群 H 的圈积，如果 G 是 $S^{|H|}$ 和 H 的半直积，其中 $S^{|H|}=S\times\cdots\times S$ 为 $|H|$ 个 S 的直积，记为 $G=SwrH$。本文我们继续研究自中心化正规子群 N 的性质对 G 的 Coleman 外自同构群结构的影响，证明了下面主要结果：

定理 1.1： 设 N 为有限群 G 自中心化的正规的子群。如果 N 是完全群，则 G 的 Coleman 自同构均为内自同构，即 $Out_{Col}(G)=1$。

定理 1.2： 设 N 为有限群 G 的自中心化的正规子群。如果 N 是几乎单群，则 G 的 Coleman 自同构均为内自同构，即 $Out_{Col}(G)=1$。

定理 1.3： 设 $G=SwrH$ 是 S 和 H 的圈积，其中 S 为有限单群，H 为 n 阶有限群，则 G 的 Coleman 自同构均为内自同构，即 $Out_{Col}(G)=1$。

本文所讨论的群均为有限群。设 $N\le G$，$\sigma\in Aut(G)$，用 $\sigma|_N$ 表示 σ 在 N 上的限制。若 $N\trianglelefteq G$ 且 $N^\sigma=N$，则用 $\sigma|_{G/N}$ 表示 σ 所诱导的 G/N 的自同构。设 $g\in G$，用 $conj(g)$ 表示由 g 通过共轭诱导的 G 的内自同构。记 $\pi(G)=\{p \mid p \mid |G|\}$，其中 p 为素数。本文使用的概念与术语是标准的，参见文献[8] [9]。

2. 定理的证明

定义 2.1 [1]：设$\sigma \in Aut(G)$，$p \in \pi(G)$。如果存在$P \in Syl_p(G)$，使得$\sigma|_P = id|_P$，则称σ为G上的p-中心自同构。

引理 2.1 [1]：设G为单群，则存在一个素数$q \in \pi(G)$，使得G的q-中心自同构为内自同构。

引理 2.2 [1]：设G为几乎单群，则存在一个素数$q \in \pi(G)$，使得G的q-中心自同构为内自同构。

引理 2.3 [4]：设G为有限群，$p \in \pi(G)$，σ是G上的一个p-方幂阶自同构。如果存在$N \trianglelefteq G$，使得$\sigma|_N = id|_N$，$\sigma|_{G/N} = id|_{G/N}$，并且存在$G$的一个$Sylow$ p-子群P，满足$\sigma|_P = id|_P$，则$\sigma \in Inn(G)$。

引理 2.4 [2]：设N为有限群G的正规子群。如果$\sigma \in Aut_{Col}(G)$，则$\sigma|_N \in Aut(N)$。

引理 2.5 [9]：设$H \le G$，H在G中的正规闭包是指G中所有包含H的正规子群的交，记为H^G，即$H^G = \cap\{K \trianglelefteq G | H \le K\}$，则

1) H^G为G中包含H的唯一最小正规子群；

2) $H^G = \langle h^g | h \in H, g \in G \rangle$。

引理 2.6 [9]：设G为有限群S和有限群H的圈积，则G是$S^{|H|}$和H的半直积且$C_G\left(S^{|H|}\right) \le \mathcal{Z}\left(S^{|H|}\right)$，其中$\mathcal{Z}\left(S^{|H|}\right)$表示群$S^{|H|}$的中心。

引理 2.7：设G是有限群，σ是G的p-方幂阶自同构，$g \in G$，并记$\sigma_1 = \sigma conj(g)$。令$o(\sigma_1) = p^j m$，其中$j, m$为非负整数，且$(p, m) = 1$。如果$\sigma_1^m \in Inn(G)$，则$\sigma \in Inn(G)$。

证明：因为σ是p-方幂阶的 Coleman 自同构，所以可设$o(\sigma) = p^i$，其中i为非负整数。由题意可知$(p^i, m) = 1$，从而存在整数s, t，使得$sp^i + tm = 1$。由于$Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$，所以

$$\sigma_1^{tm} = \left(\sigma conj(h^{-1})\right)^{tm} \in \left(\sigma Inn(G)\right)^{tm} = \sigma^{tm} Inn(G)。$$

因此可令$\sigma_1^{tm} = \sigma^{tm} conj(y) = \sigma^{1-sp^i} conj(y) = \sigma conj(y)$，显然$\sigma_1^{tm} \in Inn(G)$，故$\sigma \in Inn(G)$。

定理 1.1 的证明：设σ是G的 Coleman 自同构。因为$N \trianglelefteq G$，由引理 4 知$\sigma|_N \in Aut(N)$。因为N为完全群，所以$\sigma|_N \in Inn(N)$，即存在$n \in N$，使得$\sigma|_N = conj(n)|_N$。记$\beta = \sigma conj(n^{-1})$，则$\beta|_N = id|_N$。由于$N \trianglelefteq G$，所以对任意的$x \in G, n \in N$，有

$$x^{-1}nx = \left(x^{-1}nx\right)^\beta = \left(x^{-1}\right)^\beta n^\beta x^\beta = \left(x^{-1}\right)^\beta n x^\beta，$$

因此$x^\beta x^{-1} \in C_G(N) \le N$。又因为$\mathcal{Z}(N) = 1$，所以$x^\beta x^{-1} = 1$。由$x$的任意性可知$\beta = id$，注意到$\beta = \sigma conj(n^{-1})$，故$\sigma \in Inn(G)$。

定理 1.2 的证明：设σ是G的 Coleman 自同构，Q为N的$Sylow$ q-子群。由$Sylow$定理知，存在G的$Sylow$ q-子群P，使得$Q \le P$。

由于$\sigma \in Aut_{Col}(G)$，则存在$h \in G$，使得$\sigma|_P = conj(h)|_P$。记$\rho_1 = \sigma conj(h^{-1})$，则$\rho_1|_P = id|_P$。因为$Q \le P$，所以$\rho_1|_Q = id|_Q$。注意到且$\rho_1 \in Aut_{Col}(G)$，由引理 4 知，$\rho_1|_N \in Aut(N)$。因此$\rho_1$为$N$的$q$-中心自同构。

因为N为几乎单群，由引理 2 知，$\rho_1|_N \in Inn(N)$，即存在$g \in N$，使得$\rho_1|_N = conj(g)|_N$。记$\rho_2 = \rho_1 conj(g^{-1})$，则$\rho_2|_N = id|_N$。由于$N \trianglelefteq G$，则对任意的$x \in G, n \in N$，有

$$x^{-1}nx = \left(x^{-1}nx\right)^{\rho_2} = \left(x^{-1}\right)^{\rho_2} n^{\rho_2} x^{\rho_2} = \left(x^{-1}\right)^{\rho_2} n x^{\rho_2}，$$

因此$x^{\rho_2} x^{-1} \in C_G(N) \le N$。又因为$\mathcal{Z}(N) = 1$，所以$x^{\rho_2} x^{-1} = 1$。由$x$的任意性可知$\rho_2 = id$，注意到$\rho_2 = \rho_1 conj(g^{-1}) = \sigma conj(h^{-1}) conj(g^{-1})$，故$\sigma \in Inn(G)$。

定理 1.3 的证明：设σ是G的p-方幂阶 Coleman 自同构，我们只需证$\sigma \in Inn(G)$。

因为$G = SwrH$，并且H为n阶有限群，所以$G = (S^n) \rtimes H$，其中$S^n = S \times \cdots \times S$为$n$个$S$的直积。

设 Q 为 S 的 $Sylow\quad q$-子群，则 Q^n 为 S^n 的 $Sylow\quad q$-子群。由 $Sylow$ 定理知，存在 G 的 $Sylow\quad q$-子群 P，使得 $Q^n = Q\times\cdots\times Q \le P$。

由于 $\sigma \in Aut_{Col}(G)$，则存在 $h\in G$，使得 $\sigma\big|_P = conj(h)\big|_P$。记 $\rho_1 = \sigma conj(h^{-1})$，则 $\rho_1\big|_P = id\big|_P$。令 k 表示 $\mathrm{o}(\rho_1)$ 的 p' 部分，记 $\rho_2 = \rho_1^{\,k}$，则 ρ_2 是 p-方幂阶的 Coleman 自同构且 $\rho_2\big|_P = id\big|_P$。由于 $Q^n = Q\times\cdots\times Q \le P$，所以 $\rho_2\big|_Q = id\big|_Q$。

先证 ρ_2 为 S 的 q-中心自同构，即证 $\rho_2\big|_S \in Aut(S)$。此处记 $S^n = S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$，其中 $S_1 = S_2 = \cdots = S_n = S$，相应的 $Q^n = Q_1\times Q_2\times\cdots\times Q_n$，其中 $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$。因为 $Q_j \le S_j$ 且 S_j 为单群，其中 $j = 1,2,\cdots,n$，由引理 5 知，$S_j = Q_j^{\,S} = \left\langle g^h \,\middle|\, g\in Q_j, h\in S_j\right\rangle$，即对任意的 $z\in S_j$，可设 $z = g^h$，其中 $g\in Q_j$，$h\in S_j$，$j = 1,2,\cdots,n$，从而

$$z^{\rho_2} = \left(h^{-1}gh\right)^{\rho_2} = \left(h^{-1}\right)^{\rho_2} g^{\rho_2} h^{\rho_2} = \left(h^{-1}\right)^{\rho_2} g h^{\rho_2}。$$

又因为 $S^n \trianglelefteq G$，由引理 4 知，$\rho_2\big|_{S^n} \in Aut(S^n)$，所以 $h^{\rho_2} \in S^n = S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$。因此不妨设 $h^{\rho_2} = x_1x_2\cdots x_n$，其中 $x_j\in S_j$，$j = 1,2,\cdots,n$，所以

$$z^{\rho_2} = \left(h^{-1}\right)^{\rho_2} g h^{\rho_2} = x_n^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1} g x_1x_2\cdots x_n \in S_j，$$

即 $\rho_2\big|_{S_j} \in Aut(S_j)$。这就证明了 $\rho_2\big|_S \in Aut(S)$，因此 ρ_2 为 S 的 q-中心自同构。

由于 S 为单群，由引理 1 知，$\rho_2\big|_S \in Inn(S)$，即存在 $g\in S$，使得 $\rho_2\big|_S = conj(g)\big|_S$。又因为 $Inn(S^n) = Inn(S)\times Inn(S)\times\cdots\times Inn(S)$，所以存在 $m\in S^n$，使得 $\rho_2\big|_{S^n} = conj(m)\big|_{S^n}$。

下分两种情形进行讨论：

情形 1：如果 S 为非交换单群，记 $\rho_3 = \rho_2 conj(m^{-1})$，则 $\rho_3\big|_{S^n} = id\big|_{S^n}$。因为 $S^n \trianglelefteq G$，所以对任意的 $x\in G, y\in S^n$，有 $x^{-1}yx = \left(x^{-1}yx\right)^{\rho_3} = \left(x^{-1}\right)^{\rho_3} y^{\rho_3} x^{\rho_3} = \left(x^{-1}\right)^{\rho_3} y x^{\rho_3}$，因此 $x^{\rho_3}x^{-1} \in C_G(S^n)$。由引理 6 知，$C_G(S^n) \le \mathcal{Z}(S^n) \le S^n$，又因为 $\mathcal{Z}(S^n) = 1$，所以 $x^{\rho_3}x^{-1} = 1$。由 x 的任意性可知 $\rho_3 = id$，由于 $\rho_3 = \rho_2 conj(m^{-1})$，所以 $\rho_2 \in Inn(G)$。注意到 $\rho_2 = \rho_1^{\,k} = \left(\sigma conj(h^{-1})\right)^k$，由引理 7 可知，$\sigma conj(h^{-1}) \in Inn(G)$，故 $\sigma \in Inn(G)$。

情形 2：如果 S 为交换单群，那么 $S = C_q$，其中 C_q 为 q 阶循环群。因为 S 和 S^n 都为交换群，且 $\rho_2\big|_{S^n} \in Inn(S^n)$，所以 $\rho_2\big|_{S^n} = id\big|_{S^n}$。由于 $S^n \trianglelefteq G$，则对任意的 $x\in G$，$y\in S^n$，有

$$x^{-1}yx = \left(x^{-1}yx\right)^{\rho_2} = \left(x^{-1}\right)^{\rho_2} y^{\rho_2} x^{\rho_2} = \left(x^{-1}\right)^{\rho_2} y x^{\rho_2}，$$

从而 $x^{\rho_2}x^{-1} \in C_G(S^n)$。而由引理 6 知，$C_G(S^n) \le \mathcal{Z}(S^n) \le S^n$。因此任取 $lS^n \in G/S^n$，都有 $\left(lS^n\right)^{\rho_2} = l^{\rho_2}S^n = lS^n$，即 $\rho_2\big|_{G/S^n} = id\big|_{G/S^n}$。

对于这种情形，我们又可以将其分为两种情况：

① 如果 $q = p$，则 $\rho_2\big|_P = id\big|_P$。又 $\rho_2\big|_{S^n} = id\big|_{S^n}$，$\rho_2\big|_{G/S^n} = id\big|_{G/S^n}$ 且 ρ_2 $\rho_2 = \rho_1^{\,k} = \left(\sigma conj(h^{-1})\right)^k$ 是 p-方幂阶的 Coleman 自同构，由引理 3 知，$\rho_2 \in Inn(G)$。因为，由引理 7 可知，$\sigma conj(h^{-1}) \in Inn(G)$，故 $\sigma \in Inn(G)$。

② 如果 $q \ne p$，则对任意 $u\in G$，存在 $v\in S^n$，使得 $u^{\rho_2} = uv$。因为 ρ_2 是 p-方幂阶的，所以可设

$o(\rho_2)=p^r$，其中 r 为非负整数，那么 $u=u^{\rho_2^{p^r}}=uv^{p^r}$，因此 $v^{p^r}=1$，而 S^n 为 q-群，所以 $v=1$。由 u 的任意性可知 $\rho_2=id$。又因为 $\rho_2=\rho_1^k=\left(\sigma conj\left(h^{-1}\right)\right)^k$，由引理 7 可知，$\sigma conj\left(h^{-1}\right)\in Inn(G)$，故 $\sigma\in Inn(G)$。

基金项目

国家自然科学基金(11871292)。

参考文献

[1] Hertweck, M. and Kimmerle, W. (2002) Coleman Automorphisms of Finite Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **242**, 203-215. https://doi.org/10.1007/s002090100318

[2] Hai, J.K. and Li, Z.X. (2014) On Coleman Outer Automorphism Groups of Finite Groups. *Acta Mathematica Scientia*, **34**, 790-796. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60049-7

[3] Li, Z.X., Hai, J.K. and Yang, S.X. (2014) Coleman Automorphisms of Finite Groups with a Unique Nontrivial Normal Subgroup. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **34**, 301-306.

[4] Antwerpen, A.V. (2018) Coleman Automorphisms of Finite Groups and Their Minimal Normal Subgroups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **222**, 3379-3394. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2017.12.013

[5] 赵文英, 海进科. 关于有限内幂零群和 Frobenius 群的 Coleman 自同构[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(10): 4-6.

[6] Hai, J.K. and Zhu, Y.X. (2018)On Coleman Automorphisms of Extensions of Finite Quasinilpotent Groups by Some Groups. *Algebra Colloquium*, **25**, 181-188. https://doi.org/10.1142/S1005386718000123

[7] Hai, J.K., Ge S.B. and He, W.P. (2017) The Normalizer Property for Integral Group Rings of Holomorphs of Finite Nilpotent Groups and the Symmetric Groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, **16**, 39-44. https://doi.org/10.1142/S0219498817500256

[8] Sehgal, S.K. (1993)Units in Integral Group Rings. Longman Scientific and Technical Press, Harlow.

[9] Rose, J.S. (1978) A Course on Group Theory. Cambridge University Press, Cambridge.