Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(2), 212-216
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92027

Tilted Algebras under Base Field Extensions

Juxiang Sun

School of Mathematics and Statistics, Shangqiu Normal University, Shangqiu Henan
Email: sunjx8078@163.com

Received: Feb. 28th, 2019; accepted: Mar. 15th, 2019; published: Mar. 22nd, 2019

Abstract

In this paper, we study the invariant properties of tilted algebras under base field extensions. Let *K* be an algebraic closed field, *A* be a finite-dimensional *K*-algebra, and *F* be a separable extension of *K*. We prove that *A* is a tilted algebra if and only if so is $A\otimes_K F$.

Keywords

Tilting Module, Tilted Algebra, Base Field Extension

基域扩张下的倾斜代数

孙菊香

商丘师范学院数学与统计学院，河南 商丘
Email: sunjx8078@163.com

收稿日期：2019年2月28日；录用日期：2019年3月15日；发布日期：2019年3月22日

摘 要

本文讨论了倾斜代数在基本域扩张下的倾斜不变性。设*K*是一个代数封闭域，*A*是一个有限维*K*-代数，*F*是一个可分*K*-扩张。本文主要证明*A*是倾斜代数当且仅当 $A\otimes_K F$ 是倾斜代数。

关键词

倾斜模，倾斜代数，基域扩张

文章引用: 孙菊香. 基域扩张下的倾斜代数[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 212-216.
DOI: 10.12677/pm.2019.92027

1. 引言

经典的 1-倾斜模和倾斜代数是倾斜理论的两个基本的研究对象。前者是由 Brenner 和 Buttler 在[1]中提出的；后者作为遗传代数上 1-倾斜模的自同态代数是由 Happel 和 Ringel 在[2]中引入的。对于任一个正整数 m，Miyashita 在[3]中将 1-倾斜模的概念推广到 m-倾斜模。众所周知，倾斜模和倾斜代数在代数表示论中起到十分重要的作用，研究诸如代数扩张等具有一定联系的两个代数间的倾斜不变性一直为人们所关注[4] [5] [6]。

设 A 是一个有限维 K-代数，F 是一个 MaLand 意义下[7] [8]的可分 K-扩张，则 $A\otimes_K F$ 是 A 的一类重要的代数扩张。Passman [6]证明了 $A\otimes_K F$ 既是 A 的优化扩张还是 A 的 Frobienus 扩张。因而，$A\otimes_K F$ 和 A 之间的不变性质一直是人们重要研究对象。诸如表示型，整体维数，Gorenstein-整体维数等等都在 $A\otimes_K F$ 和 A 之间保持不变[5] [6] [8]。南京大学黄兆泳教授和本文作者在[4]中证明了二者具有相同的有限维数和表示维数。从[4]中可知 $A\otimes_K F$ 是遗传代数当且仅当 A 是遗传代数。而遗传代数恰好是一类重要的倾斜代数。一个自然的问题就是：如果 $A\otimes_K F$ 和 A 中有一个是倾斜代数，那么另一个是否为倾斜代数？本文给出了一个完整的回答。本文的主要定理

定理 1.1：设 K 是一个代数封闭域，A 是一个有限维 K-代数，F 是一个可分 K-扩张。则 A 是倾斜代数当且仅当 $A\otimes_K F$ 是倾斜代数。

2. 预备知识

本文中的所有代数都是有限维 K-代数，其中 K 是一个代数封闭域，所有模都是有限生成右模。设 A 有限维 K-代数，将所有有限生成的 A-模构成的范畴记为 mod A。记 pd_AT 和 add_AT 分别为 A-模 T 的投射维数和 A-模 T 有限直和的直和项，记 gl.dim A 为 A 的整体维数。

设 A 是一个有限维 K-代数，F 是一个可分 K-扩张。因为 $A\otimes_K F$ 既是 A 的优化扩张还是 A 的 Frobienus 扩张，我们有以下结论。

引理 2.1：设 A 是一个有限维 K-代数，F 是一个可分 K-扩张。

1) 对于任一个 $A\otimes_K F$-模 M，则 M 是 $A\otimes_K F$-模 $M\otimes_K F$ 的直和项；

2) 对于任一个 $A\otimes_K F$-模 N，有 $pd_{A\otimes_K F}N = pd_A N = pd_A\left(N\otimes_K F\right)_{A\otimes_K F}$；

3) 如果 I 是内射 A-模，则 $I\otimes_K F$ 是内射 $A\otimes_K F$-模；

4) $gl.dim\ A = gl.dim\ A\otimes_K F$。

定义 2.2 [3]：有限生成 A-模 T 称为 m-倾斜模，如果

1) $pd_AT \le m$；

2) 对于任意正整数 i，都有 $Ext_A^i\left(T,T\right)=0$；

3) mod A 中存在长正合列：$0\to A\to T_0\to T_1\to\cdots\to T_m\to 0, \forall T_i\in add_AT$。

定义 2.3 [2]：有限维代数 A 称为倾斜代数，如果存在遗传代数 B 上的 1-倾斜模 T，使得 $A = End_BT$。

不难证明有限维 A 是倾斜代数当且仅当存在一个自同态代数为遗传代数的 1-倾斜 A-模。

设 $\Im$ 是加法范畴，$\left(\Im^{OP},\Im B\right)$ 为由 $\Im$ 到 AB (Abel 群范畴)的所有反变函子组成的范畴。称函子 $F:\Im^{OP}\to AB$ 是凝聚函子，如果 $\left(\Im^{OP},AB\right)$ 中存在正合列：

$$Hom_A\left(-,A_1\right)\to Hom_A\left(-,A_0\right)\to F\to 0,$$

$A_1 \in \Im$，$i = 0,1$。我们将$\left(\Im^{OP}, AB\right)$中所有凝聚函子组成的子范畴记为$\bar{\Im}$。由 Yoneda's 引理，$\bar{\Im}$的投射对象是$\left(\Im^{OP}, \Im B\right)$中的形如$Hom_A\left(X,-\right)$，$X \in \Im$的函子。

$\bar{\Im}$的整体维数定义为所有凝聚函子的投射维数的上确界。下面的引理给出了自同态代数的整体维数和凝聚函子范畴的整体维数之间的联系。

引理 2.4 [9]：设 A 是有限维 K-代数，M 是有限生成 A-模。则

$$gl.dim\ End_A M = gl.dim\ \overline{add_A T}\ 。$$

3. 主要结果

引理 3.1：设 K 是一个域，A 是一个有限维 K-代数，F 是 K 上的一个可分域扩张，M 是一个 $A \otimes_K F$ 模，m 是正整数。则

1) 如果 X 是 m-倾斜 A-模，则 $X \otimes_K F$ 是 m-倾斜 $A \otimes_K F$ -模。

2) 如果 Y 是 m-倾斜 A-模，则 Y 是 m-倾斜 $A \otimes_K F$ -模。

证明：首先，由([4]，引理 3.5)得 $A \otimes_K F$ 是有限维 K-代数。

1) 由 m-倾斜代数的定义，结论显然成立。

2) 设$\left(F:K\right) = n$。

我们先证明必要性。

a) 设 M 是一个 m-倾斜 $A \otimes_K F$ -模，则由引理 2.1 可得 $pd_A M = pd_{A\otimes_K F} M \le m$。

b) 设 I 是 $Y_{A\otimes_K F}$ 的一个内射分解，则对于任意正整数 i，则我们有以下同构

$$\begin{aligned} Ext^i_{A\otimes_K F}\left(Y,Y\right) \otimes_K F &\cong H_{-i}\left(Hom_{A\otimes_K F}\left(Y,I\right)\right) \otimes_K F \\ &\cong H_{-i}\left(Hom_{A\otimes_K F}\left(Y, I\otimes_K F\right)\right) \\ &\cong H_{-i}\left(Hom_{A\otimes_K F}\left(Y, Hom_A\left(A\otimes_K F, I\right)\right)\right)。 \\ &\cong H_{-i}\left(Hom_A\left(Y_{A\otimes_K F}\left(A\otimes_K F\right), I\right)\right) \\ &\cong H_{-i}\left(Hom_A\left(Y,I\right)\right) \cong Ext^i_A\left(Y,Y\right) \end{aligned}$$

因为对于任意正整数 i，$Ext^i_{A\otimes_K F}\left(Y,Y\right) = 0$，故 $Ext^i_A\left(Y,Y\right) \cong Ext^i_{A\otimes_K F}\left(Y,Y\right) \otimes_K F = 0$。

c) 由 m-倾斜模的定义可得 $\mathrm{mod}\left(A\otimes_K F\right)$ 正合列

$$0 \to A\otimes_K F \to Y'_0 \to Y'_1 \to \cdots \to Y'_m \to 0,$$

其中，所有 $Y'_i \in add_{A\otimes_K F} Y$。显然，上面的正合列也是 $\mathrm{mod}\,A$ 中的正合列。

因为 A 是 A-模 $A\otimes_K F$ 的直和项，我们有正合列：

$$0 \to A \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_m \to 0\ 。$$

其中，$Y_i \in add_A Y, i = 1,2,3,\cdots,m$。

综合 a)，b)，c)，由 m-倾斜模的定义可知，Y 是一个 m-倾斜 A-模。

再证充分性。假设 Y 是一个 m-倾斜 A-模。因为 $pd_A Y \le m$，由引理 2.1 可得 $pd_{A\otimes_K F} Y \le m$。

对于任意正整数 i，因为 $Ext^i_A\left(Y,Y\right) = 0$，所以 $Ext^i_{A\otimes_K F}\left(Y\otimes_K F, Y\otimes_K F\right) \cong Ext^i_A\left(Y,Y\right) \otimes_K F = 0$

根据 m-倾斜模的定义，我们有正合列

$$0 \to A \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_m \to 0$$

其中，$Y_i \in add_A Y, i = 1,2,3,\cdots,m$。

用正变函子-$\otimes_K F$ 到上述正合列中，可得 $\mathrm{mod}\left(A\otimes_K F\right)$ 中的正合列

$$0 \to A \otimes_K F \to Y_0 \otimes_K F \to Y_1 \otimes_K F \to \cdots \to Y_m \otimes_K F \to 0 。$$

另一方面，因为 $(F:K)=n$，我们有 $(A\otimes_K F, A\otimes_K F)$-双模同构

$$(A\otimes_K F)\otimes_K F \cong (A\otimes_K F)\otimes_{A\otimes_K F}((A\otimes_K F)\otimes_K F) \cong (A\otimes_K F)^n 。$$

从而可得 $A\otimes_K F$-模同构

$$Y\otimes_K F \cong Y\otimes_{A\otimes_K F}(A\otimes_K F)\otimes_K F \cong Y\otimes_{A\otimes_K F}((A\otimes_K F)\otimes_K F) \cong Y^n$$

因此，$Y_i\otimes_K F \in add_{A\otimes_K F} Y, i=1,2,3,\cdots,m$。从而可得 Y 是一个 m-倾斜 $A\otimes_K F$-模。

下面的引理在本文的主要定理的证明中起到十分重要的作用，并且引理本身也是一个十分有趣的结论。

引理 3.2：设 A 是 Artin 代数，T 是有限生成的 A-模，使得 $Ext_A^1(T,T)=0$。则 $gl.dim\ End_A T \le 1$ 当且仅当 $add_A T$ 对子模封闭。

证明：先证必要性。要证 $add_A T$ 对子模封闭，只需证明 T 的有限直和的任意子模仍在 $add_A T$ 中。设 M 为 T^t 的任一个子模，其中 t 是正整数，$\alpha: M\to T^t$ 是嵌入映射。则范畴($(add_A T)^{op}$，Ab)中存在一个正合列：

$$0 \to Hom_A(-,M) \xrightarrow{(-,\alpha)} Hom_A(-,T^t) \to H \to 0,$$

其中 $H = Coker(-,\alpha)$。由([9]，引理 1.3)可得 $Hom_A(-,M) \in \overline{add_A T}$。因此，$H \in \overline{add_A T}$。由题设和引理 2.4 可得 $pd_{\overline{add_A T}} H \le 1$。

因此，$Hom_A(-,M)$ 是范畴 $\overline{add_A T}$ 的投射对象。从而，由 Yoneda's 引理得 $M \in add_A T$。

下证必要性。对于任意 $F \in \overline{add_A T}$，mod A 中存在态射 $f: T_1 \to T_2$，使得

$$Hom_A(-,T_1) \to Hom_A(-,T_0) \to F \to 0$$

在 $\overline{add_A T}$ 中正合。

令 $T_2 = Ker\, f$，$Y = Img\, f$，由题设可得 $T_2, Y \in add_A T$。

因为 $Ext_A^1(T,T)=0$，故正合列 $0\to T_2 \to T_1 \to Y \to 0$ 可裂。

因此，序列 $0\to Hom_A(-,T_2) \to Hom_A(-,T_1) \to Hom_A(-,Y) \to 0$ 在 $\overline{add_A T}$ 中正合。由此得到 $\overline{add_A T}$ 上的正合列：

$$0 \to Hom_A(-,T_2) \to Hom_A(-,T_1) \to F \to 0$$

从而 $pd_{\overline{add_A T}} F \le 1$。由引理 2.4 可得 $gl.dim\ End_A T = gl.dim\ \overline{add_A T} \le 1$。

定理 3.3：设 A 有限维 K-代数，F 是 K 的有限域扩张。则 A 是倾斜代数当且仅当 $A\otimes_K F$ 是倾斜代数。

证明：先证必要性。因为 A 是倾斜代数，则存在 1-倾斜 A-模 T，使得 $End_A T$ 是遗传代数。

由引理 3.1 可知，$T\otimes_K F$ 是 1-倾斜 $A\otimes_K F$-模。

因为 $End_{A\otimes_K F}(T\otimes_K F) \cong (End_A T)\otimes_K F$，由引理 2.1 可得 $gl.dim\ End_{A\otimes_K F}(T\otimes_K F) = gl.dim\ End_A T \le 1$。由倾斜代数的定义可知 $A\otimes_K F$ 是倾斜模。

再证充分性。设 $A\otimes_K F$ 是一个倾斜代数，则存在 1-倾斜 $A\otimes_K F$-模 X，使得 $End_{A\otimes_K F} X$ 是一个遗传代数，从而 $add_{A\otimes_K F} X$ 对子模封闭。又由引理 3.1 可得 X 是一个 1-倾斜 A-模。

以下证明 X_A 对子模封闭。设 N 是 X_A^m 的任一个子模，其中 $m \ge 1$ 为自然数，则 $N\otimes_K F$ 与 $X^m\otimes_K F$ 的一个子模同构。由 $A\otimes_K F$-模同构

$$X\otimes_K F \cong X\otimes_{A\otimes_K F}(A\otimes_K F)\otimes_K F \cong Y^m$$

可得 $\left(N\otimes_K F\right)_{A\otimes_K F}\in add_{A\otimes_K F}X$，故 $\left(N\otimes_K F\right)_A\in add_A X$。又由引理 2.1 可得 N_A 为 $\left(N\otimes_K F\right)_A$ 的直和项，从而，我们有 $N_A\in add_A X$。

由引理 3.2 可得，$End_A X$ 是一个遗传代数。因此，A 是一个倾斜代数。

基金项目

此项研究受国家自然科学基金资助项目(11601304)和商丘师范学院校级青年骨干教师资助项目(2015GGJS04)资助。

参考文献

[1] Brenner, S. and Butler, M.C.R. (1980) Generalizations of the Bernstein-Gelgang-Ponomarev Reflection Functors. In: Dlab, V. and Gabriel P., Eds., *Representation Theory II. Lecture Notes in Mathematics*, vol 832, Springer-Verlag, Berlin, 103-169. https://doi.org/10.1007/BFb0088461

[2] Happel, D., Reiten, I. and Smalø, S.O. (1996) Tilting in Abelian Categories and Quasitilted Algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **120**, 13-34. https://doi.org/10.1090/memo/0575

[3] Miyashita, Y. (1986) Tilting Modules of Finite Projective Dimension. *Mathematische Zeitschrift*, **193**, 113-146. https://doi.org/10.1007/BF01163359

[4] Huang, Z.Y. and Sun, J.X. (2012) Invariant Properties of Representations under Excellent Extensions. *Journal of Algebra*, **358**, 87-101. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.03.004

[5] Reiten, I. and Riedtmann, C. (1985) Skew Group Algebras in the Representation Theory of Artin Algebras. *Journal of Algebra*, **92**, 224-282. https://doi.org/10.1016/0021-8693(85)90156-5

[6] Jensen, C.U. and Lenzing, H. (1982) Homological Dimension and Representation Type of Algebras under Base Field Extension. *Manuscripta Mathematica*, **39**, 1-13. https://doi.org/10.1007/BF01312441

[7] Jacobson, N. (1964) Lectures in Abstract Algebra, Vol. III, Theory of Fields and Galois Theory. Van Nostrand Reinhold Inc., Princeton, 3087.

[8] Passman, D.S. (1977) The Algebraic Structure of Group Rings. Wiley-Interscience, New York London-Sydney.

[9] Auslander, M. (1971) Representation Dimension of Artin Algebras. Queen Mary College, London.