

Research of Stock Market Based on Pair Copula and GARCH(1,1) Model

Wen Zhang, Kun He

Department of Mathematics, Donghua University, Shanghai
Email: zhw_07@126.com, hekun@dhu.edu.cn

Received: Jan. 8th, 2019; accepted: Jan. 22nd, 2019; published: Jan. 29th, 2019

Abstract

In this paper, based on the GARCH(1,1)-model, we use the Pair Copula dimension reduction method to explore the correlation between the stock markets with nonlinear structure. We construct the GARCH(1,1)-models basing on four different forms of residual error distributions. We check the significance test of GARCH(1,1) with these four kinds of residual error distributions, and find out only when the residual error follows the generalized error distribution, the model passes the significance test. Therefore, we get a better choice for the edge distribution for financial asset series. With the help of Pair Copula reduction method and AIC/BIC criterion (Akaike Information Criterion/Bayesian Information Criterion), we find out that D-Vine structure is more suitable than C-Vine structure to describe the correlation between the stock markets. Finally we construct the correlation function between the stock markets basing on the D-Vine structure Pair Copula function.

Keywords

Pair Copula, GARCH(1,1), Residual Error, Stock Market

基于Pair Copula和GARCH(1,1)模型的股市研究

张雯, 何坤

东华大学数学系, 上海
Email: zhw_07@126.com, hekun@dhu.edu.cn

收稿日期: 2019年1月8日; 录用日期: 2019年1月22日; 发布日期: 2019年1月29日

摘要

本文在GARCH(1,1)模型的基础上, 运用Pair Copula降维法探究非线性结构的股票市场间相关性。我们基于4种不同的残差分布来构建GARCH(1,1)模型, 对比发现只有残差服从广义误差分布时, 模型通过显著性检验, 从而找到相对好的金融资产序列的边缘分布拟合模型。我们使用Pair Copula降维方法, 依据AIC/BIC准则(赤池信息准则/贝叶斯信息准则), 发现D-Vine结构比C-Vine结构更适合描述股票市场间相关关系, 于是最终选用D-vine结构来构建市场间相关结构的Pair Copula函数。

关键词

Pair Copula, GARCH(1,1), 残差, 股票市场

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

经济全球化的发展致使各国之间愈加紧密的经济联动, 如果某一国家的金融领域发生危机, 危机将在各国金融市场间快速传播。为了降低金融危机的负面影响, 人们愈加重视金融市场间关联性的研究。在准确把握市场关联性的基础上进行金融对冲, 投资获利的同时有效降低商业风险。

在非线性金融市场相关关系研究方面, Copula 函数有着显著的优势, 由 Embrechts 等[1]开创了将其应用于金融领域的先河。Copula 函数的概念经由 Sklar [2]提出, 文献[3] [4] [5] [6]对其进行进一步研究。后来为了降低高维相关性研究的难度, 解决单一 Copula 函数的约束性, Bedford 等[7]首次于研究中应用了藤 Copula 结构, Aas 等[8]提出了藤 Copula 降维方法即 Pair Copula 降维法。

研究金融资产相关性最重要的前提条件是确定资产收益率序列的拟合模型, 即边缘拟合模型。Engle Robert [9]发明了 ARCH 模型(自回归条件异方差模型), 但当模型残差序列的异方差函数具有长期自相关性时, ARCH 模型的拟合精度会受到影响。为此 Bollerslev [10]以 ARCH 模型为基础, 提出了 GARCH 模型(广义自回归条件异方差模型), 该模型很好地描述出市场波动的异方差性和波动集群性。

在动态研究金融变量间的相依关系领域, 韦艳华等[11]利用 Copula-GARCH 模型建立金融市场间的非线性相关关系, 优点是边缘拟合 GARCH 模型残差择优服从 t 分布或 GED 分布, 缺点是高维相关结构整体为 Gaussian Copula 函数。黄恩喜等[12]基于 Pair Copula-GARCH- t 模型研究了三只股票的相关关系, 缺点是 GARCH 模型残差只考虑服从 t 分布, 优点是运用藤 Copula 结构将高维相依分离为多个二维相依 Copula, 但二维 Copula 结构统一为 t -Copula 函数。宋志坚[13]运用 Copula-GARCH 模型研究国际原油价格与三种可再生能源股价的相关性, 缺点是边缘拟合只考虑残差服从 t 分布, 优点是二维相关性研究采用四种 Copula 函数中较适合模型。

由于, GARCH 模型的残差分布影响边缘拟合的效果, 在拟合边缘分布时需要多比较几种残差分布, 根据模型的实际拟合效果选取较好的模型。运用 C-Vine 结构或 D-Vine 结构的 Pair-Copula 降维法将高维相关研究转化为多个二维相关时, 两种 Pair-Copula 降维结构在三维时一样但其余高维存在优劣, 而且转化成的二维相关性可能有各自的特点且适合不同的 Copula 函数。因此, 本文在 GARCH 模型中比较了残差服从四种不同分布的情况, 选出较优的边缘分布拟合模型, 并在此基础上, 参考李嘉琪等[14]研究中较

全面的二维 Copula 函数族, 使用 Pair Copula 降维法来研究四维股票市场联动风险特征。

2. 理论基础

2.1. Copula 函数

Copula 理论即可以将一个联合分布函数分解成多个边缘分布函数和一个 Copula 函数, 适合描述多维随机变量相关关系的复杂性。

定理[2]: 令 F 为一个 n 维随机向量的联合分布函数, 其中各变量的边缘分布函数记为 F_i , 那么一定存在一个 Copula 函数 C , 使得 $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, 其中 $F_i(x_i) \in (0, 1), i = 1, \dots, n$ 。若边缘分布函数 F_i 是连续的一元函数, 则 Copula 函数 C 的形式是唯一确定的。

Copula 理论发展出了各种形式的家族函数, 经常使用的类型主要分为两类: 一类是椭球 Copula, 常用的包括 Gaussian Copula 和 t -Copula; 另外一类是由生成函数 $\varphi(t)$ (t 为边缘分布) 生成的阿基米德 Copula, 包括 Clayton Copula、Gumbel Copula 和 Frank Copula。其中以边缘分布函数 (u, v) 为自变量的二元 Gaussian Copula、 t -Copula、Clayton Copula、Gumbel Copula、Frank Copula [14] 分布函数具体的表达式分别如式(1)~(5)所示。

$$C_1(u, v; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-(s^2+r^2-2\rho sr)}{2(1-\rho^2)}\right) ds dr \quad (1)$$

式中: $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 的逆函数; 相关系数 $\rho \in (-1, 1)$; s, r 分别为 u, v 的自变量。

$$C_2(u, v; \rho, m) = \int_{-\infty}^{T_m^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_m^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[1 + \frac{-(s^2+r^2-2\rho sr)}{m(1-\rho^2)}\right]^{\frac{m+2}{2}} ds dr \quad (2)$$

式中: $T_m^{-1}(\cdot)$ 为自由度是 m 的一元 t 分布函数 $T_m(\cdot)$ 的逆函数; 相关系数 $\rho \in (-1, 1)$; s, r 分别为 u, v 的自变量。

$$C_3(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{1}{\theta}} \quad (3)$$

式中: 生成函数 $\varphi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}, \theta \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ 。

$$C_4(u, v; \theta) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\frac{1}{\theta}} + (-\ln v)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\theta}\right) \quad (4)$$

式中: 生成函数 $\varphi(t) = (-\ln t)^{\frac{1}{\theta}}, \theta \in (0, 1]$ 。

$$C_5(u, v; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right) \quad (5)$$

式中: 生成函数 $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}, \theta \neq 0$ 。

2.2. 藤式 Copula

为了降低 Copula 函数研究多维变量相关性的复杂程度, Aas 等[8]提出了对 Copula 降维的 Pair Copula 分解法, 即令 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 为 n 维随机变量, 其联合分布概率密度函数可分解为式(6)。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(x_n) \cdot f(x_{n-1} | x_n) \cdot f(x_{n-2} | x_{n-1}, x_n) \cdots f(x_1 | x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

以四维随机变量为例, 有星型结构的 C-Vine (表达式如式(7)所示)和平行结构的 D-Vine (表达式如式(8)所示)两种藤结构对其四维 Copula 函数进行降维。

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_4) &= f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \times c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \\ &\quad \times c_{14}(F_1(x_1), F_4(x_4)) \times c_{23|1}(F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)) \times c_{24|1}(F(x_2|x_1), F(x_4|x_1)) \\ &\quad \times c_{34|12}(F(x_3|x_1, x_2), F(x_4|x_1, x_2)) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_4) &= f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \times c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \\ &\quad \times c_{34}(F_3(x_3), F_4(x_4)) \times c_{13|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)) \times c_{24|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)) \\ &\quad \times c_{14|23}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)) \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $F(\cdot)$ 为边缘分布函数; $f(\cdot)$ 为边缘密度函数; $c(\cdot)$ 是二维 Pair Copula 密度函数。

2.3. 边缘分布模型

采用 GARCH (p, q) 模型能够很好的描述收益率序列的尖峰、厚尾、非对称、波动聚集等特征, 模型构建如式(9)所示。

$$\begin{cases} R_{nt} = \mu_n + \varepsilon_{nt}, \\ \varepsilon_{nt} = \sigma_{nt} z_{nt}, \\ \sigma_{nt}^2 = \varpi_n + \alpha_{n1} \varepsilon_{n,t-1}^2 + \cdots + \alpha_{nq} \varepsilon_{n,t-q}^2 + \beta_{n1} \sigma_{n,t-1}^2 + \cdots + \beta_{np} \sigma_{n,t-p}^2, \end{cases} \quad (9)$$

式中: μ_n 是第 n 项收益率序列 R_{nt} 的均值; 误差 ε_{nt} 的条件方差是 σ_{nt}^2 ; 残差 z_{nt} 与 σ_{nt}^2 相互独立; 常数 $\varpi_n > 0$; 常数 $\alpha_{ni} \geq 0, \beta_{nj} \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^q \alpha_{ni} + \sum_{j=1}^p \beta_{nj} < 1, p > 0, q > 0$, 其中 q 是 ARCH 项的阶数、 p 是 GARCH 项的阶数。

确保模型稳定性, 将阶数设为 1, 则本文数据边缘拟合 GARCH(1,1)模型如(10)所示。

$$\begin{cases} R_{nt} = \mu_n + \varepsilon_{nt}, \\ \varepsilon_{nt} = \sigma_{nt} z_{nt}, \\ \sigma_{nt}^2 = \varpi_n + \alpha_{n1} \varepsilon_{n,t-1}^2 + \beta_{n1} \sigma_{n,t-1}^2, \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\mu_n, \varpi_n, \alpha_{n1}$ 和 β_{n1} 为待估参数。

本文基于 GARCH(1,1)模型拟合边缘分布, 考虑了残差服从四种分布的情况, 在四种残差结构中选择较优的拟合模型。如果残差 z_{nt} 有 $z_{nt} \sim N(0,1)$, 误差 ε_{nt} 有 $\varepsilon_{nt} \sim N(0, \sigma_{nt}^2)$, 则构建的边缘分布函数是 GARCH(1,1)- N 模型; 如果残差 z_{nt} 有 $z_{nt} \sim t(m_n)$, 即残差 z_{nt} 符合自由度为 m_n 、均值为 0 以及方差为 1 的 t 分布函数, 则构建的边缘分布函数是 GARCH(1,1)- t 模型; 如果残差 z_{nt} 的概率密度函数如式(11)所示, 则构建的边缘分布函数是 GARCH(1,1)-GED; 如果残差 z_{nt} 的概率密度函数如式(12)所示, 则构建的边缘分布函数是 GARCH(1,1)-SGED。

$$f(x; \nu) = \frac{\nu \Gamma(3/\nu)^{1/2}}{2 \Gamma(1/\nu)^{3/2}} \exp \left[-|x|^\nu \left[\frac{\Gamma(3/\nu)}{\Gamma(1/\nu)} \right]^{\nu/2} \right] \quad (11)$$

式中: $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数; 形状参数 $\nu \in (-\infty, +\infty)$ 为待估参数。

$$f(x; \nu, \lambda) = A \cdot \exp\left(-\frac{|x-G|}{[1-\text{sign}(x-G)\lambda]^\nu B^\nu}\right) \quad (12)$$

式中: $A = \frac{\nu}{2B} \Gamma(1/\nu)^{-1}$; $B = \Gamma(1/\nu)^{1/2} \Gamma(3/\nu)^{-1/2} S(\lambda)^{-1}$; $G = 2\lambda \cdot D \cdot S(\lambda)^{-1}$; $S(\lambda) = (1 + 3\lambda^2 - 4D^2\lambda^2)^{1/2}$; $D = \Gamma(2/\nu) \Gamma(1/\nu)^{-1/2} \Gamma(3/\nu)^{-1/2}$; $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数; 形状参数 $\nu > 0$; 偏度参数 $\lambda \in (-1, 1)$ 。

3. 实证研究

3.1. 数据选取及基本分析

本文选取基于 A 股产生的沪深 300 指数、新综指、中型综指和新指数的每日收盘价数据作为研究对象, 选取的样本时间从 2013 年 4 月 1 日至 2018 年 3 月 30 日。数据来自锐思金融数据库(<http://www.resnet.cn>), 数据的研究与处理主要依靠 Excel 和 R 语言来完成。

算术收益率是当期资产的价格与上一期资产的价格的差再比上上一期的资产价格的比值, 对数收益率是当期资产的价格比上上一期资产的价格后再对其取对数。因为对数收益率具有时间可加性而且方便建模, 所以本文采用对数收益率代表股指, 表达式如式(13)所示。四种指数的对数收益率随时间的波动如图 1 所示。

$$R_t = 100 \times \ln(P_t/P_{t-1}) \quad (13)$$

式中: t 是任意一个交易日; P_t 定义为股指的日收盘价。

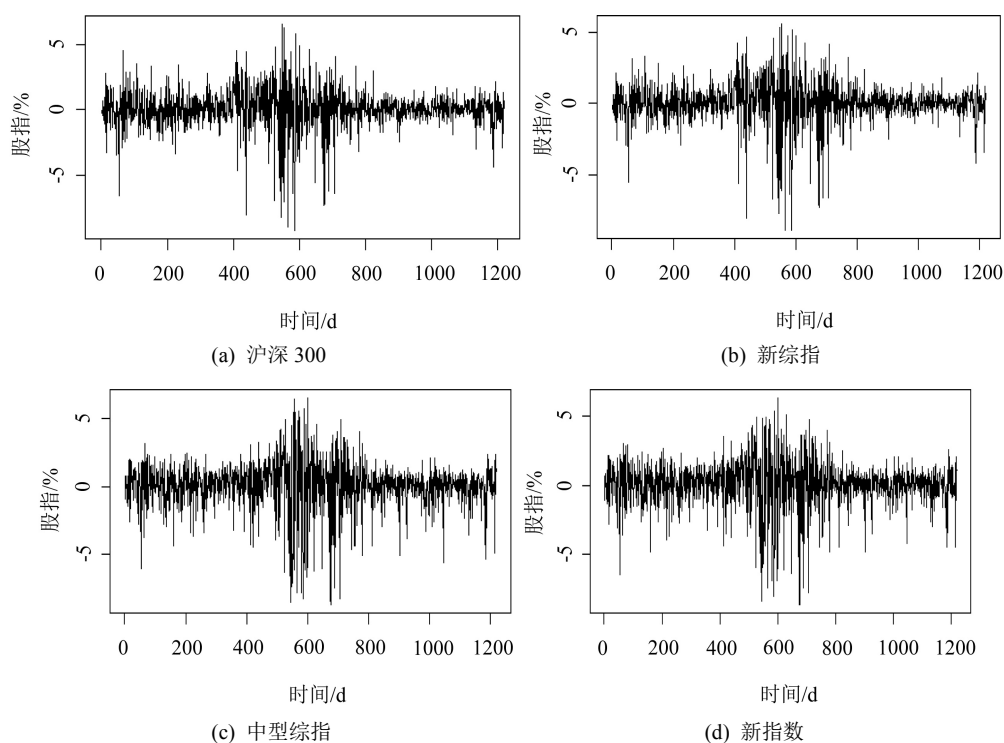


Figure 1. Rate fluctuation chart of log daily return of four indexes in stock market

图 1. 股市的四种指数的股指随时间的波动图

图 1 为四种指数的股指随时间的波动图。从图 1 可看出沪深 300 指数、新综指、中型综指和新指数

的股指都有波动聚集的现象, 即大波动紧跟着大波动、小波动紧随着小波动。

表 1 为股市的四种指数的对数日收益率序列的描述性统计结果。这四个指数的对数日收益率的偏度都小于 0, 说明这四个指数都出现了左偏的现象。而且四个指数的峰度均远大于 3, 表明存在“尖峰”的特征, 与标准正态分布相比存在“尖峰厚尾”的现象。但是“尖峰”的特征会影响偏度的检验, 故仅依据偏度和峰度的值来判断对数日收益率序列是否服从正态分布是不准确的, 因此本文还进行 J-B 检验 (Jarque-Bera test)。由 J-B 统计量均不服从自由度为 2 的卡方分布, 进一步证明了收益率序列都不满足原假设, 即不服从正态分布。

Table 1. Descriptive statistics of log daily return of four indexes in stock market

表 1. 股市四种指数的对数日收益率描述性统计

分类	平均值	标准差	偏度	峰度	J-B 统计量
沪深 300	0.0366	1.5422	-1.0715	9.7460	2542.6188
新综指	0.0285	1.4866	-1.2834	10.4738	3169.1102
中型综指	0.0369	1.8420	-1.2188	7.5794	1365.8554
新指数	0.0566	1.7294	-1.1337	7.4751	1277.2472

3.2. 数据拟合

为了确保对数日收益率序列间相关关系的准确性, 还要对样本数据进行检验, 防止对对数日收益率序列构建边缘分布模型时出现伪回归的现象, 即需通过 ADF 检验 (augmented Dickey-Fuller test) 来判断时间序列的平稳性, 平稳性检验结果见表 2。其中 P 值是 t 统计量对应的概率值, 在 1% 显著性水平 (犯错误概率) 下, p 值小于给定的显著性水平, 而且 t 统计量小于 1% 显著性水平下的 ADF 临界值 -3.43, 所以时间序列不存在单位根, 呈现平稳的趋势, 即对数日收益率序列是平稳的时间序列。

Table 2. Stationarity test of four indexes in stock market

表 2. 股市四种指数的平稳性检验

股指名称	沪深 300	新综指	中型综指	新指数
t 统计量值	-10.215	-10.279	-10.355	-10.086
p 值	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01

考虑到对数日收益率序列的波动聚集、偏斜等的异常情况, 四种指数可以通过 GARCH(1,1) 模型进行描述, 模型残差考虑服从正态分布、学生 t 分布、广义误差分布和带偏广义误差分布这四种假设, 四种假设下的各指数的对数日收益率序列的 p 值差别很大, 在 5% 显著性水平下, 正态分布和带偏广义误差分布假设下存在多个参数对应的 p 值大于 0.05, 学生 t 分布假设下存在一个参数 p 值大于 0.05, 广义误差分布假设下不存在, 因此只有残差服从广义误差分布时才通过显著性检验。

通过显著性检验, GARCH(1,1)-GED 模型下的各指数拟合的待估参数的结果如表 3。其中形状参数 ν 均小于 2, 说明股指拟合模型的残差密度函数峰度、尾部比正态分布更尖、更厚。模型拟合之后的 ARCH L-M 检验结果的 p 值大于显著性水平 5%, 证明了序列不存在条件异方差, 说明了模型建立正确。因此本文采用 GARCH(1,1)-GED 模型拟合收益率序列的边缘分布。

3.3. 相关性分析

由于相关性函数 Copula 的性质要求, 对收益率序列的拟合模型提取标准化残差, 并对其积分变化, 使数据落在 Copula 函数的自变量定义域的范围之内, 之后才可对变换后的新序列进行 Pair Copula

建模。

Table 3. Parameter estimation of GARCH(1,1)-GED model

表 3. GARCH(1,1)-GED 模型的参数估计

股指名称	沪深 300	新综指	中型综指	新指数
μ	0.068541	0.071690	0.149838	0.137689
σ	0.010452	0.0082293	0.033091	0.020500
α_1	0.071061	0.0692799	0.069296	0.056595
β_1	0.925765	0.9284341	0.919116	0.935158
ν	1.147358	1.0987287	1.135483	1.242695
L-M Arch 检验	12.94044 ($p = 0.37338$)	14.29904 ($p = 0.28202$)	7.366353 ($p = 0.83248$)	7.339247 ($p = 0.83440$)

表 4 为四个指数的 Kendall 秩相关系数的结果, 可知 4 个指数间都存在着显著的正相关性, 即其中一个指数出现大幅度的涨或跌, 其他三个指数都会做出相同的反应。其中中型综指和新指数间的相关系数为 0.8431, 是所有相关系数中的最大值, 说明了中型综指和新指数间的相互关系最强。

Table 4. Kendall rank correlation coefficient of four indexes

表 4. 四个指数的 Kendall 秩相关系数

样本	沪深 300	新综指	中型综指	新指数
沪深 300	1	0.8294	0.5462	0.6048
新综指	0.8294	1	0.6251	0.6527
中型综指	0.5462	0.6251	1	0.8431
新指数	0.6048	0.6527	0.8431	1

表 5 为利用 AIC/BIC 准则对两种不同类型 Pair Copula 模型拟合的结果, 其中 Copula 函数的选择为 Gaussian Copula, t-Copula, Clayton Copula, Gumbel Copula 和 Frank Copula [14]。表中参数 1 和参数 2 分别为 C-Vine Copula ((7)式)和 D-Vine Copula ((8)式)中所选择 Copula 函数相对应参数的结果。根据表中 AIC/BIC 准则的检验结果, 可以看出 D-Vine 模型的拟合效果优于 C-Vine 模型, 因而通过 D-Vine 模型可得较优的四个指数间的联合分布的概率密度函数。

Table 5. Parameter of Copula function on C-Vine and D-vine

表 5. C-Vine 和 D-Vine 结构下的 Copula 函数参数

藤模型	C-Vine				D-Vine				
		参数 1	参数 2		参数 1	参数 2		参数 1	参数 2
c_{12}	t-Copula	0.96949	3.25824	c_{12}	t-Copula	0.96949	3.25824		
c_{13}	Frank Copula	7.79178	0	c_{13}	Frank Copula	10.00244	0		
c_{14}	t-Copula	0.81454	7.56193	c_{34}	t-Copula	0.97341	17.82753		
$c_{23 1}$	t-Copula	0.53885	4.96047	$c_{13 2}$	t-Copula	-0.27862	6.27616		
$c_{24 1}$	t-Copula	0.43444	5.96775	$c_{24 3}$	t-Copula	0.32100	8.91364		
$c_{34 12}$	t-Copula	0.86630	4.9130	$c_{14 23}$	t-Copula	0.46665	15.49642		
	AIC 值	-8265.571			AIC 值	-9014.635			
	BIC 值	-8209.416			BIC 值	-8958.48			

4. 结语

基于 Pair Copula-GARCH(1,1)模型, 本文引入四种不同残差分布和 GARCH(1,1)模型共同建立资产序列的边缘分布, 选出较优的边缘分布拟合模型, 同时 Pair Copula 降维产生的多个二维相关根据其相关特点选取合适的 Copula 函数, 从而可以更准确地对股票市场进行研究。

本文的研究结果表明: 1) 通过对模型参数的比较分析, 发现 GARCH(1,1)-GED 可以很好地拟合对数收益率, 形成高拟合度的边缘分布函数; 2) 沪深 300 指数、新综指、中型综指和新指数的对数收益率曲线均符合金融市场非正态、“尖峰厚尾”的特点, 且相互存在较强的正相关性; 3) C-Vine 和 D-Vine 两种模型对四维对数收益率序列 Copula 函数降维时, 根据 AIC/BIC 准则, 可知 D-Vine 更适用于拟合四个指数间的相关关系; 4) 根据 D-Vine 结构拟合出的四个指数间的概率密度函数, 可以得到联合概率分布, 对四个指数间的相互变化关系有大致的预判, 从而当市场发生变化时, 有助于作出适合自身的决策。

参考文献

- [1] Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. (1999) Correlation: Pitfall and Alternatives. *Risk Magazine*, **5**, 69-71.
- [2] Sklar, A. (1959) Fonctions de Repartitionan Dimensions et Leurs Marges. *Publication de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris*, **8**, 229-231.
- [3] Schweizer, B. and Sklar, A. (1983) Probabilistic Metric Spaces. Dover Publications, Mineola, NY.
- [4] Genest, C. and Mackay, J. (1986) The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals. *American Statistician*, **40**, 280-283.
- [5] Joe, H. (1993) Parametric Families of Multivariate Distributions with Given Marginals. *Journal of Multivariate Analysis*, **46**, 262-282. <https://doi.org/10.1006/jmva.1993.1061>
- [6] Nelsen, R.B. (1999) An Introduction to Copulas. Springer, New York, 1-265. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3076-0>
- [7] Bedford, T. and Cooke, R. (2001) Probabilistic Risk Analysis: Foundations and Methods. Cambridge U.P., Cambridge, UK, 393. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511813597>
- [8] Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., et al. (2009) Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**, 182-198. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.02.001>
- [9] Engle, R. (2002) New Frontiers for ARCH Models. *Journal of Applied Econometrics*, **17**, 425-446. <https://doi.org/10.1002/jae.683>
- [10] Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- [11] 韦艳华, 张世英. 多元 Copula-GARCH 模型及其在金融风险分析上的应用[J]. 数理统计与管理, 2007, 26(3): 432-439.
- [12] 黄恩喜, 程希骏. 基于 Pair Copula-GARCH 模型的多资产组合 VaR 分析[J]. 中国科学院研究生院学报, 2010, 27(4): 440-447.
- [13] 宋志坚. 基于 GARCH-Copula 模型的国际原油价格与可再生能源股价相关性研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京大学, 2017.
- [14] 李嘉琪, 何坤. 基于 Pair Copula-Realized GARCH 模型的股票市场研究[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2018, 44(5): 1008-1013.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：pm@hanspub.org