Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(2), 204-211
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92026

Hans汉斯

Study on the Spread Threshold and Immunization Scheme of a Class of Infectious Disease Model on Directed Networks

Wei Shi

School of Science, Shanghai University, Shanghai
Email: 1414748012@qq.com

Received: Feb. 27th, 2019; accepted: Mar. 13th, 2019; published: Mar. 20th, 2019

Abstract

This paper extends the traditional SIS model with birth and death to a directed scale-free network, calculates the endemic equilibrium point and critical epidemic threshold of the model under constant and linear node's infectivity, and puts three traditional immunization schemes on the model, which rigorously proved that under the three immunization strategies, the model's inhibition of infectious diseases increased. Further comparing the performance of three different immunization strategies under the same average immunization rate, the target immunization of immunizing nodes with large in-degrees and out-degrees is more effective than proportional and acquaintance immunization.

Keywords

Scale-Free Network, SIS Model, Epidemic Threshold, Immunization Strategy

一类传染病模型在有向网络上的传播阈值与免疫策略研究

施　伟

上海大学理学院，上海
Email: 1414748012@qq.com

收稿日期：2019年2月27日；录用日期：2019年3月13日；发布日期：2019年3月20日

摘　要

本文将带出生与死亡的传统SIS模型推广到了有向的无标度网络上，计算了模型在常数和线性的网络节点传染力下的地方病平衡点与流行病传播阈值，并且将三种传统的免疫策略植入到模型上面，严格地证明

文章引用: 施伟. 一类传染病模型在有向网络上的传播阈值与免疫策略研究[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 204-211.
DOI: 10.12677/pm.2019.92026

了在三种免疫策略下，模型对传染病的抑制力增加。且在相同的平均免疫率下，进一步比较了三种不同免疫策略的效果，发现免疫出度与入度均大节点的目标免疫在此模型上对疾病的抑制力是最好的。

关键词

无标度网络，SIS模型，流行病阈值，疾病免疫

1. 引言

众所周知，由病毒或病原体引起的传染病对人类健康构成了巨大的安全威胁。通过数学模型研究传染病的传播动态和控制策略具有重要意义。

复杂网络被认为是一种有用的工具，为疾病传播的研究奠定了理论基础。在复杂网络上，节点表示个体。它们通常分为不同的状态，节点之间通过边相连接，代表传染病传播过程中个体之间的接触。学者在流行病的动态行为上已经研究了很长时间，其中 SIS 模型是最经典的模型之一。SIS 模型中，S 代表易感者，即健康但能被感染的个体，而 I 表示染病者，即带有病毒且能传播病毒的个体。易感者与染病者接触就有可能被感染成为患者，而患者也有一定的概率恢复成易感者。文章[1]中作者深入研究了传统 SIS 模型在无向网络的传播，且探讨了不同免疫策略之间的关系。但传统的 SIS 模型仅考虑了传播率与恢复率，难以更具体的反应疾病的传播过程，因此在文章[2]中，作者提出了一种新的带出生与死亡 SIS 模型，将易感者的自然死亡率、染病者的死亡率以及新生的个体都考虑到模型中：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(1-x_k-y_k) - \lambda k x_k \Theta_k(y_k) - \alpha x_k + \gamma y_k, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda k x_k \Theta_k(y_k) - (\beta+\gamma) y_k. \end{cases}$$

虽然在无向网络上，前人做了很多工作[3] [4] [5]，但在现实网络中，很多网路都是有向的，如 WWW [6]，接触网络[7]，电话网络等，因此疾病的传播在有向网络上的动力学研究更有实际意义[8]。从更实际的角度去看待疾病的研究过程，预防疾病的发生才是重中之重，前人针对疾病的传播过程提出了一些经典的免疫策略，如目标免疫[1]，组合免疫[9]，熟人免疫[10]，比例免疫[1]等。因此本文中我们将传统的带出生与死亡的 SIS 模型推广到了有向网络上去研究它的动力学行为，且将三种传统的免疫方案应用到了此模型上面，来更好地抑制传染病的爆发。

2. 传染病模型及流行病阈值

定义 S 为易感者，I 为染病者，k 与 l 分别表示节点的入度和出度，b 为出生率，u 为易感者自然死亡率，γ 为染病者恢复率，β 为染病者因病死亡以及自然死亡率。将传统的带出生与死亡的 SIS 模型推广到有向网络上，我们得到新的传染病模型如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_{k,l}(t)}{\mathrm{d}t} = b\left(1-S_{k,l}(t)-I_{k,l}(t)\right) - \lambda k S_{k,l}(t)\Theta(t) - \mu S_{k,l}(t) + \gamma I_{k,l}(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}I_{k,l}(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda k S_{k,l}(t)\Theta(t) - (\beta+\gamma) I_{k,l}(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 Θ 表示 t 时刻随机连接一条来自染病者的边的概率[11]：

$$\Theta(t)=\frac{\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)I_{k,l}(t)}{\sum_{k,l}lp(k,l)}=\frac{\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)I_{k,l}(t)}{\langle l\rangle}, \tag{2.2}$$

方程中 $p(k,l)$ 表示出度与入度的联合分布，$\phi(k,l)$ 表示入度为 k 且出度为 l 的节点感染力，本文我们考虑两种情况下的节点感染力，$\phi(k,l)=A$，$\phi(k,l)=al$，其中 A 与 a 是正数，且 $0<a<1$。

假设入度分布 $P(k)$和出度分布 $Q(l)$是独立的，因此在有向网络上，平均出度和平均入度可以表示成：

$$\langle k\rangle=\sum_{k,l}kp(k,l)=\sum_{k}kP(k),\langle l\rangle=\sum_{k,l}lp(k,l)=\sum_{l}lQ(l).$$

下面计算在任一有向网络上的此模型的流行病阈值，在稳态状态下，令 $\frac{\mathrm{d}S_{k,l}(t)}{\mathrm{d}t}=0$ 和 $\frac{\mathrm{d}I_{(k,l)}(t)}{\mathrm{d}t}=0$，系统(2.1)变成

$$\begin{cases}b\left(1-S_{k,l}(t)-I_{k,l}(t)\right)-\lambda kS_{k,l}(t)\Theta(t)-\mu S_{k,l}(t)+\gamma I_{k,l}(t)=0,\\ \lambda kS_{k,l}(t)\Theta(t)-(\beta+\gamma)I_{k,l}(t)=0.\end{cases} \tag{2.3}$$

其无病平衡点 E^0 满足条件 $\mathrm{d}I_{(k,l)}(t)=0$，将 $\mathrm{d}I_{(k,l)}(t)=0$ 代入方程(2.3)，我们得到系统(2.1)的无病平 $E^0=\left(\frac{b}{b+\mu},0\right)$。

再通过方程(2.3)，可以计算出模型的地方病平衡点：

$$\begin{cases}S_{k,l}^{*}=\dfrac{b(\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta},\\ I_{k,l}^{*}=\dfrac{b\lambda k\Theta}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta}.\end{cases} \tag{2.4}$$

将方程(2.4)中的 $I_{k,l}^{*}$ 代入 Θ，可以得到：

$$\Theta(t)=\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)\frac{b\lambda k\Theta}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta}. \tag{2.5}$$

令

$$\Theta(t)=\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)\frac{b\lambda k\Theta}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta}\triangleq f(\Theta). \tag{2.6}$$

显然是 $\Theta=0$ 方程(2.6)的解，且

$$f(1)=\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)\frac{b\lambda k}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta}<\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}lp(k,l)=1,$$

$$f'(\Theta)=\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)\frac{b\lambda k(\beta+\gamma)(b+\mu)}{\left[(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta\right]^2}>0,$$

$$f''(\Theta)=\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)\frac{-2b(\beta+\gamma)(b+\mu)(b+\beta)\lambda^2k^2}{\left[(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta\right]^3}<0;$$

因此方程(2.6)有唯一一个正解当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}f(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta}\left(\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)\frac{b\lambda k\Theta}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\Theta}\right)\Bigg|_{\Theta=0}>1. \tag{2.7}$$

因为有向网络上平均出度等于平均入度$\langle k\rangle=\langle l\rangle$，从而我们得到模型的流行病阈值：

$$\lambda_c=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\langle\phi(k,l)\rangle}=\begin{cases}\dfrac{(\beta+\gamma)(b+\mu)}{ab\langle k\rangle}, & \phi(k,l)=al,\\ \dfrac{(\beta+\gamma)(b+\mu)}{bA}, & \phi(k,l)=A.\end{cases} \tag{2.8}$$

流行病阈值对疾病的传播非常重要，当疾病传播的有效传播率$\lambda>\lambda_c$时，疾病会在网络上持续传播并发生爆发，而当$\lambda<\lambda_c$时，疾病将不会在网络上传播且逐渐消亡。因此提高模型(2.1)的流行病阈值对疾病的预防是非常重要的。

3. 免疫策略

在本章中，我们研究了几种经典的免疫方案来控制模型(2.1)中疾病在网络上的传播。我们将每个免疫策略的有效性进行阐述且将每种免疫策略的有效性与没有植入策略方案进行对比。

定义$\delta_{k,l}$是免疫策略的免疫率，那么系统(2.1)变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_{k,l}(t)}{\mathrm{d}t}=b\left(1-S_{k,l}(t)-I_{k,l}(t)\right)-\lambda k\left(1-\delta_{k,l}\right)S_{k,l}(t)\Theta(t)-\mu S_{k,l}(t)+\gamma I_{k,l}(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I_{k,l}(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda k\left(1-\delta_{k,l}\right)S_{k,l}(t)\Theta(t)-(\beta+\gamma)I_{k,l}(t).\end{cases} \tag{3.1}$$

令方程(3.1)左端为0，则可以计算出系统的地方病平衡点：

$$\begin{cases}S_{k,l}^{*}=\dfrac{b(\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\left(1-\delta_{k,l}\right)\Theta},\\ I_{k,l}^{*}=\dfrac{b\lambda k\left(1-\delta_{k,l}\right)\Theta}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\left(1-\delta_{k,l}\right)\Theta}.\end{cases} \tag{3.2}$$

采用如上章节相似的计算过程，我们可以得到下列方程：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{f}(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta}\left(\frac{1}{\langle l\rangle}\sum_{k,l}\phi(k,l)p(k,l)\frac{b\lambda k\left(1-\delta_{k,l}\right)\Theta}{(\beta+\gamma)(b+\mu)+(b+\beta)\lambda k\left(1-\delta_{k,l}\right)\Theta}\right)\Bigg|_{\Theta=0}>1. \tag{3.3}$$

从而可以得到模型的流行病阈值：

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_c&=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle k\phi(k,l)\delta_{k,l}\rangle\right)}\\ &=\begin{cases}\dfrac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{ab\left(\langle kl\rangle-\langle kl\delta_{k,l}\rangle\right)}, & \phi(k,l)=al,\\ \dfrac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{bA\left(\langle k\rangle-\langle k\delta_{k,l}\rangle\right)}, & \phi(k,l)=A.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1. 比例免疫

比例免疫策略是随机的免疫网络中的一部分节点。当定义节点的免疫比例为$0<\delta<1$，比例免疫相当于将疾病的传播率λ降低到了$\lambda(1-\delta)$。令方程(3.4)中$\delta_{k,l}=\delta$，因此比例免疫的流行病阈值为

$$\bar{\lambda}_c=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle k\phi(k,l)\delta\rangle\right)}=\begin{cases}\dfrac{(\beta+\gamma)(b+\mu)}{ab\langle k\rangle(1-\delta)}, & \phi(k,l)=al,\\ \dfrac{(\beta+\gamma)(b+\mu)}{bA(1-\delta)}, & \phi(k,l)=A,\end{cases}=\frac{1}{1-\delta}\lambda_c. \tag{3.5}$$

从方程(3.5)可以看出，模型采用比例免疫策略后的传染病阈值增加。且比例免疫的效果与免疫的节点比例有关，免疫比例 δ 越大，网络对疾病的抑制性越强。

3.2. 熟人免疫

熟人免疫的核心思想是从 N 个节点中随机的选择比例为 p 的节点，然后再从选择的每一个节点中随机选择相邻的节点去免疫。

在有向网络上，对于这群随机选择的节点，我们免疫邻居节点中入度为 k 的节点概率是 $\dfrac{k_P(k)}{N\langle k\rangle}$，那么，具有入度 k 的节点被免疫的免疫率为 $\delta_{k,l}=\delta_k=\dfrac{kP(k)}{N\langle k\rangle}pN=\dfrac{pkP(k)}{\langle k\rangle}$，将 δ_k 代入方程(3.4)我们可以得到熟人免疫的传播阈值：

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_c&=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-p\left\langle k^2\phi(k,l)P(k)\right\rangle/\langle k\rangle\right)}\\&=\begin{cases}\dfrac{(\beta+\gamma)(b+\mu)}{ab\left(\langle k\rangle-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\langle k\rangle\right)}, & \phi(k,l)=al,\\ \dfrac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{bA\left(\langle k\rangle-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\langle k\rangle\right)}, & \phi(k,l)=A,\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\langle k\rangle^2}\lambda_c, & \phi(k,l)=al,\\ \dfrac{\langle l\rangle}{\langle k\rangle-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\langle k\rangle}\lambda_c, & \phi(k,l)=A.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.6}$$

且

$$\frac{1}{1-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\langle k\rangle^2}>\frac{1}{1-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\left\langle k^2\right\rangle}>1,$$
$$\frac{\langle l\rangle}{\langle k\rangle-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\langle k\rangle}=\frac{1}{1-p\left\langle k^2P(k)\right\rangle/\langle k\rangle^2}>1.$$

所以 $\hat{\lambda}_c>\lambda_c$，即熟人免疫在节点传染力为常数或者线性关系时，都可以增加网络对疾病的抑制力。

3.3. 目标免疫

目标免疫是通过有选择的对少量关键节点进行免疫去获得尽量好的免疫效果。在无标度网络上，基于度的不均匀性，可以选择度大的节点进行免疫。文献[9]中作者提出了在有向的无标度网络上免疫率 $\tilde{\delta}_{k,l}$ 的定义，选择出度和入度均大的节点去免疫，κ 和 τ 都是一个常数，则：

$$\tilde{\delta}_{k,l}=\begin{cases}1, & k\ge\kappa \text{ and } l\ge\tau,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{3.7}$$

将 $\tilde{\delta}_{k,l}$ 代入方程(3.4)，我们可以得到目标免疫的传播阈值：

$$\tilde{\lambda}_c=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle k\phi(k,l)\tilde{\delta}_{k,l}\rangle\right)}=\begin{cases}\dfrac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{ab\left(\langle kl\rangle-\langle kl\tilde{\delta}_{k,l}\rangle\right)}\\[2ex]\dfrac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{bA\left(\langle k\rangle-\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle\right)}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\langle l\rangle^2}{\langle l\rangle^2-\langle kl\tilde{\delta}_{k,l}\rangle}\lambda_c, & \phi(k,l)=al,\\[2ex]\dfrac{\langle l\rangle}{\langle k\rangle-\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle}\lambda_c, & \phi(k,l)=A.\end{cases}\tag{3.8}$$

令 $\langle kl\tilde{\delta}_{k,l}\rangle=\alpha\langle kl\rangle$，其中 $0<\alpha<1$；$\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle=\beta\langle k\rangle$，其中 $0<\beta<1$。所以

$$\frac{\langle l\rangle^2}{\langle l\rangle^2-\langle kl\tilde{\delta}_{k,l}\rangle}=\frac{\langle l\rangle^2}{\langle l\rangle^2(1-\alpha)}>1,$$

$$\frac{\langle l\rangle}{\langle k\rangle-\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle}=\frac{\langle l\rangle}{\langle l\rangle(1-\beta)}>1.$$

因此 $\tilde{\lambda}_c>\lambda_c$。即目标免疫之后网络对疾病的抑制性增加。

4. 免疫策略对比

经过上述对三种免疫策略阈值的分析，发现三种免疫策略对疾病的免疫都很重要，都能显著的提高网络对疾病的免疫能力。因此在下文，我们将对比三种免疫策略的有效性，在免疫率相同的情况下进行对比，找出三种常见免疫策略中在本模型上最优的免疫方案。

4.1. 目标免疫与比例免疫

将目标免疫的传染病阈值与比例免疫的阈值相减：

$$\begin{aligned}&\tilde{\lambda}_c-\bar{\lambda}_c\\&=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle k\phi(k,l)\tilde{\delta}_{k,l}\rangle\right)}-\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle k\phi(k,l)\delta\rangle\right)}\\&=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b}\left(\frac{1}{\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle\phi(k,l)\rangle\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle}-\frac{1}{\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle\phi(k,l)\rangle\langle k\delta\rangle}\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

令目标免疫的平均免疫率与比例免疫的平均免疫率相等且 M 与 N 分别是网络最大的入度与出度，即 $\delta=\langle\tilde{\delta}_{k,l}\rangle=\sum_{k=\kappa}^{M}P(k)\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)$，由方程(4.1)知，只需比较 $\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle$ 与 $\langle k\delta\rangle$ 的大小，即：

$$\begin{aligned}\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle-\langle k\delta\rangle&=\sum_{k=\kappa}^{M}kP(k)\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)-\sum_{k=\kappa}^{M}P(k)\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\sum_{k=1}^{M}kP(k)\\&=\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\left(\sum_{k=\kappa}^{M}kP(k)-\sum_{k=\kappa}^{M}P(k)\sum_{k=1}^{M}kP(k)\right)\\&=\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\left(\sum_{k=\kappa}^{M}kP(k)-\sum_{k=\kappa}^{M}P(k)\left(\sum_{k=1}^{\kappa-1}kP(k)+\sum_{k=\kappa}^{M}kP(k)\right)\right)\\&=\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\left(\sum_{k=\kappa}^{M}kP(k)\sum_{k=1}^{\kappa-1}P(k)-\sum_{k=\kappa}^{M}P(k)\sum_{k=1}^{\kappa-1}kP(k)\right)\\&=\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\left(\sum_{\bar{k}=\kappa}^{M}\bar{k}P(\bar{k})\sum_{k=1}^{\kappa-1}P(k)-\sum_{\bar{k}=\kappa}^{M}P(\bar{k})\sum_{k=1}^{\kappa-1}kP(k)\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\sum_{\bar{k}=\kappa}^{M}\sum_{k=1}^{\kappa-1}P(\bar{k})P(k)(\bar{k}-k) \\ >0. \tag{4.2}$$

结合方程(4.1)与(4.2)，有 $\tilde{\lambda}_c-\bar{\lambda}_c>0$，所以在相同的平均免疫率下，目标免疫在系统(2.1)上的对传染病的免疫效果比比例免疫更好。

4.2. 目标免疫与熟人免疫

熟人免疫的平均免疫率为 $\langle\delta_k\rangle=\sum_{k,l}\frac{pkP(k)}{\langle k\rangle}p(k,l)=\frac{p\langle kP(k)\rangle}{\langle k\rangle}$，熟人免疫与目标免疫的平均免疫率相等时，有 $\langle\delta_k\rangle=\langle\tilde{\delta}_{k,l}\rangle$。将目标免疫的传染病阈值与熟人免疫的阈值相减：

$$\begin{aligned}&\tilde{\lambda}_c-\hat{\lambda}_c\\&=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle k\phi(k,l)\tilde{\delta}_{k,l}\rangle\right)}-\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b\left(\langle k\phi(k,l)\rangle-p\langle k^2\phi(k,l)P(k)\rangle/\langle k\rangle\right)}\\&=\frac{\langle l\rangle(\beta+\gamma)(b+\mu)}{b}\left(\frac{1}{\langle k\phi(k,l)\rangle-\langle\phi(k,l)\rangle\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle}-\frac{1}{p\langle\phi(k,l)\rangle\langle k^2P(k)\rangle/\langle k\rangle}\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

由方程(4.3)知，只需要比较 $\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle$ 与 $p\langle k^2P(k)\rangle/\langle k\rangle$ 的大小即可。

$$\begin{aligned}\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle-p\langle k^2P(k)\rangle/\langle k\rangle&=\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle-\frac{\langle k\rangle\langle\tilde{\delta}_{k,l}\rangle}{\langle kP(k)\rangle}\cdot\frac{\langle k^2P(k)\rangle}{\langle k\rangle}\\&=\frac{\langle kP(k)\rangle\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle-\langle\tilde{\delta}_{k,l}\rangle\langle k^2P(k)\rangle}{\langle kP(k)\rangle}\end{aligned} \tag{4.4}$$

考虑方程(4.4)中的多项式

$$\begin{aligned}&\langle kP(k)\rangle\langle k\tilde{\delta}_{k,l}\rangle-\langle\tilde{\delta}_{k,l}\rangle\langle k^2P(k)\rangle\\&=\sum_{k=1}^{M}kP(k)^2\sum_{k=\kappa}^{M}kP(k)\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)-\sum_{k=\kappa}^{M}P(k)\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\sum_{k=1}^{M}k^2P(k)^2\\&=\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\left(\sum_{k=1}^{M}kP(k)^2\sum_{k=\kappa}^{M}kP(k)-\sum_{k=\kappa}^{M}P(k)\sum_{k=1}^{M}k^2P(k)^2\right)\\&=\sum_{l=\tau}^{N}Q(l)\sum_{\bar{k}=1}^{M}\sum_{k=\kappa}^{M}\bar{k}P(\bar{k})^2P(k)(k-\bar{k})\\&>0.\end{aligned}$$

因此在相同的平均免疫率下，目标免疫后的传染病阈值比熟人免疫后高，即目标免疫后网络对传染病的抑制作用更强。所以，在系统(2.1)上，使用目标免疫策略，选择出度与入度均大的节点去免疫，对疾病的预防相对于其他两种免疫方案，对疾病在网络上传播的抑制效果更显著。

5. 结束语

本文将带出生与死亡的 SIS 模型推高到了有向的网络上，基于平均场理论研究了其在有向网络上的动力学行为，计算了两种节点感染力下的传染病阈值。且在模型上运用了三种经典的免疫策略，深入剖析了几种免疫策略的有效性，证明了植入免疫策略后对疾病的传播起到了抑制作用，且在相同的平均免疫率下，目标免疫的效果更好。这些结论与分析过程对流行病在有向网络上的传播研究有较好的促进作用。

参考文献

[1] Fu, X., Small, M., Walker, D.M., *et al*. (2008) Epidemic Dynamics on Scale-Free Networks with Piecewise Linear Infectivity and Immunization. *Physical Review E*, **77**, Article ID: 036113. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.036113

[2] Liu, J., Tang, Y. and Yang, Z.R. (2004) The Spread of Disease with Birth and Death on Networks. *Journal of Statistical Mechanics*: *Theory and Experiment*, No. 8, Article ID: P08008. https://doi.org/10.1088/1742-5468/2004/08/P08008

[3] Pastor-Satorras, R. and Vespignani, A. (2002) Epidemics and immunization in Scale-Free Networks. Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet, 113-132. https://doi.org/10.1002/3527602755.ch5

[4] Moreno, Y., Pastor-Satorras, R. and Vespignani, A. (2002) Epidemic Outbreaks in Complex Heterogeneous Networks. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **26**, 521-529. https://doi.org/10.1140/epjb/e20020122

[5] Zhu, L., Guan, G. and Li, Y. (2019) Nonlinear Dynamical Analysis and Control Strategies of a Network-Based SIS Epidemic Model with Time Delay. *Applied Mathematical Modelling*, **70**, 512-531. https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.01.037

[6] Dorogovtsev, S.N. and Mendes, J.F.F. (2013) Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW. OUP, Oxford.

[7] Meyers, L.A., Newman, M.E.J. and Pourbohloul, B. (2006) Predicting Epidemics on Directed Contact Networks. *Journal of Theoretical Biology*, **240**, 400-418. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.10.004

[8] 王琴, 祝光湖, 傅新楚. 有向网络上流行病阈值比较和免疫分析[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2012(4): 26-33.

[9] Shi, W., Jia, J., Yang, P., *et al*. (2018) Two Novel Immunization Strategies for Epidemic Control in Directed Scale-Free Networks with Nonlinear Infectivity. arXiv Preprint arXiv: 1806.01174.

[10] Cohen, R., Havlin, S. and Ben-Avraham, D. (2003) Efficient Immunization Strategies for Computer Networks and Populations. *Physical Review Letters*, **91**, Article ID: 247901. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.247901

[11] Tanimoto, S. (2011) Epidemic Thresholds in Directed Complex Networks. arXiv Preprint arXiv: 1103.1680.