Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(2), 188-194
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92024

Hans汉斯

Menon-Sury's Identity with a Dirichlet Character

Man Chen

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 13798043026@163.com

Received: Feb. 27th, 2019; accepted: Mar. 13th, 2019; published: Mar. 20th, 2019

Abstract

Li, Hu and Kim [1] proved the following generalization of the Menon-Sury identity by using the filtrations of the ring Z_n and its unit group Z_n^*:

$$\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}} \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n)\chi(k)=\varphi(n)\sigma_r\left(\frac{n}{d}\right),$$

where φ is Euler's Totient function, $\sigma_r(n)=\sum_{d|n}d^r$, and χ is a Dirichlet character mod n with conductor d. In this paper, we re-prove the above identity based the orthogonality of Dirichlet characters and elementary calculations [2].

Keywords

Menon-Sury's Identity, Dirichlet Character, Euler's Totient Function

带有一个狄利克雷特征的Menon-Sury恒等式

陈　曼

华南理工大学数学学院，广东　广州
Email: 13798043026@163.com

收稿日期：2019年2月27日；录用日期：2019年3月13日；发布日期：2019年3月20日

摘　要

Li, Hu 和 Kim[1]运用整数剩余类环及其单位群的滤链证明了 Menon-Sury 恒等式的如下推广：

文章引用: 陈曼. 带有一个狄利克雷特征的 Menon-Sury 恒等式[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 188-194.
DOI: 10.12677/pm.2019.92024

$$\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}} \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n)\chi(k)=\varphi(n)\sigma_r\left(\frac{n}{d}\right),$$

其中 φ 是欧拉 φ 函数，$\sigma_r(n)=\sum_{d|n}d^r$，且 χ 是一个模 n 的导子为 d 的狄利克雷特征。在本文中，我们运用狄利克雷特征的正交性和初等计算去重新证明上述等式[2]。

关键词

Menon-Sury恒等式，狄利克雷特征，欧拉 φ 函数

1. 引言

1965 年，P.K. Menon [3]发现了下面这个漂亮的恒等式

$$\sum_{\substack{1\le k\le n\\ \gcd(k,n)=1}} \gcd(k-1,n)=\varphi(n)\tau(n) \tag{1}$$

其中 $n\in N=\{1,2,\cdots\}$，φ 是欧拉 φ 函数，且 $\tau(n)$ 是 n 的因子个数。2009 年，Sury [4]把这个恒等式推广成下面的形式：

$$\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}} \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n)=\varphi(n)\sigma_r(n) \tag{2}$$

其中 $\sigma_r(n)=\sum_{d|n}d^r$。Menon-Sury 恒等式也可以被推广到模为有限剩余的 Dedekind 整环。这个方向在 2014 年第一次被 Miguel 用 Burnside 引理和交换环理论完成[5] [6]。2017 年，Zhao 和 Cao [7]得到了带有一个狄利克雷特征形式的 Menon 恒等式：

$$\sum_{\substack{1\le k\le n\\ \gcd(k,n)=1}} \gcd(k-1,n)\chi(k)=\varphi(n)\tau\left(\frac{n}{d}\right) \tag{3}$$

然后 Toth 通过考虑偶算术函数(模 n)用另一种方法将上述等式加以进一步推广，作为应用，他也得到了有关 Ramanujan 和的相关公式。最近，Li，Hu 和 Kim [1]对(2)，(3)作进一步推广，并且证明了下面两个定理。

定理 1.1 ([1] Li，Hu 和 Kim)：如果 χ 是一个模 n 的本原的狄利克雷特征，则我们有下面的恒等式：

$$\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}} \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n)\chi(k)=\varphi(n)。$$

定理 1.2 ([1] Li，Hu 和 Kim)：如果 $n,b_1,b_2,\cdots,b_r\in N$，$\chi$ 是一个模 n 的导子为 d 的狄利克雷特征，则我们有下面的恒等式：

$$\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}} \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n)\chi(k)=\varphi(n)\sigma_r\left(\frac{n}{d}\right)。$$

注记：在定理 1.2 中令 $\chi=\chi_0$，即平凡特征，我们得到 Menon-Sury 恒等式(2)。令 $r=0$，我们得到 Zhao 和 Cao 的恒等式(3)。

本文的主要任务是运用狄利克雷特征的正交性和初等计算重新证明上面两个结果。

2. 定理 1.1 的证明

为了证明我们的结论，需要下面四个引理。

引理 2.1：如果 p 是一个素数，$a,m,u\in N$ 满足 $m<a$ 且 χ 是一个模 p^a 的本原特征，则我们有

$$\sum_{u=1}^{p^{a-m}}\chi\left(1+up^m\right)=0\text{。}$$

证明：设 $U=\left\{\overline{1+up^m}\,\middle|\,1\le u\le p^{a-m}\right\}$ 是 $\left(Z/p^aZ\right)^*$ 的一个子群。定义一个同态

$$f:\left(Z/p^aZ\right)^*\to\left(Z/p^mZ\right)^*,\quad \overline{a}\mapsto\overline{a}$$

我们得到 $\ker f=U$。事实上，设 $\overline{b}=\overline{1+up^m}\in U$，我们有 $f\left(\overline{b}\right)=\overline{b}=\overline{1}\left(\bmod p^m\right)$ 和 $U\subset\ker f$。因为

$$\#\ker f=\frac{\varphi\left(p^a\right)}{\varphi\left(p^m\right)}=\frac{p^{a-1}\left(p-1\right)}{p^{m-1}\left(p-1\right)}=p^{a-m}=\#U,$$

又由第一同构定理，我们有

$$\left(Z/p^aZ\right)^*/\ker f\cong\left(Z/p^mZ\right)^*,$$

所以 $\ker f=U$。而且，因为 χ 是一个模 $p^a\left(a>m\right)$ 的本原特征，$\chi|_U$ 在 U 上是一个非平凡特征。由狄利克雷特征的正交性，我们得到

$$\sum_{s\in U}\chi\left(s\right)=0=\sum_{u=1}^{p^{a-m}}\chi\left(1+up^m\right)\text{。}$$

引理 2.2 ([1]，引理 2.4)：如果 p 是一个素数，自然数 $a,m,r,b_1,b_2,\cdots,b_r$ 满足 $a-m-1\ge0$，则我们有

$$\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd\left(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a\right)=p^m}}1=\left(p^{a-m}\right)^r-\left(p^{a-m-1}\right)^r\text{。}$$

引理 2.3 ([7]，引理 2.1])：设 p 是一个素数，n 是一个正整数，且 χ 是一个模 p^n 的本原的狄利克雷特征，如果 m 是一个正整数且 $1\le m<n$，则我们有

$$\sum_{\substack{1\le k\le p^{n-m}\\ \gcd(k,p)=1}}\chi\left(kp^m+1\right)=\begin{cases}0, & 1\le m<n-1;\\ -1, & m=n-1.\end{cases}$$

引理 2.4 ([7]，引理 2.4])：设 p 是一个素数，n 是一个正整数，且 χ 是一个模 p^n 的非平凡的狄利克雷特征，再设 $p^l\left(1\le l\le n\right)$ 是 χ 的导子，如果 m 是一个正整数且 $1\le m<n$，则我们有

$$\sum_{\substack{1\le k\le p^{n-m}\\ \gcd(k,p)=1}}\chi\left(kp^m+1\right)=\begin{cases}\varphi\left(p^{n-m}\right), & l\le m<n;\\ -p^{n-l}, & m=l-1;\\ 0, & 1\le m<l-1.\end{cases}$$

定理 1.1 的证明：

记 $f(n)=\sum\limits_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}}\gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n)\chi_n(k)$。其中 χ_n 为一个模 n 的狄利克雷特征，存在 $s,t\in N$ 使得 $\gcd(s,t)=1$，且成立下面等式：

$$\begin{aligned}
f(st)&=\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le st\\ \gcd(k,st)=1}}\gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,st)\chi_{st}(k)\\
&=\sum_{\substack{1\le k_1,b_1,b_2,\cdots,b_r\le s\\ \gcd(k_1,s)=1}}\sum_{\substack{1\le k_2,b_1,b_2,\cdots,b_r\le t\\ \gcd(k_2,t)=1}}\gcd(k_1t+k_2s-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,st)\chi_s(k_1t+k_2s)\chi_t(k_1t+k_2s)\\
&=\sum_{\substack{1\le k_1,b_1,b_2,\cdots,b_r\le s\\ \gcd(k_1,s)=1}}\sum_{\substack{1\le k_2,b_1,b_2,\cdots,b_r\le t\\ \gcd(k_2,t)=1}}\gcd(k_1t-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,s)\gcd(k_2s-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,t)\chi_s(k_1t)\chi_t(k_2s)\\
&=f(s)f(t)
\end{aligned}\tag{4}$$

从(4)式我们可以看出 f 是积性函数，而且每一个模 k 的狄利克雷特征 χ 都能够被唯一的写成这种形式的乘积 $\chi=\chi_{k_1}\chi_{k_2}\cdots\chi_{k_r}$，其中 $k=k_1k_2\cdots k_r$，$\gcd(k_i,k_j)=1$，$i\ne j$，且 χ_{k_i} 是模 k_i 的特征。再者，如果 χ 是本原的，则每一个 χ_{k_i} 模 k_i 也是本原的。因此如果我们能证明对每一个 p^a，有 $f(p^a)=\varphi(p^a)$ 成立，那么定理 1 的证明就完成了。为此，我们现在来计算 $f(p^a)$：

$$\begin{aligned}
f(p^a)&=\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(k,p^a)=1}}\gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)\chi_{p^a}(k)\\
&=\sum_{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a}\gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)\chi_{p^a}(k)\\
&=\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)\ne 1}}\gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)\chi_{p^a}(k)+\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=1}}\chi_{p^a}(k)\\
&=\sum_{m=1}^{a}\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^m}}p^m\chi_{p^a}(k)-\sum_{m=1}^{a}\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^m}}\chi_{p^a}(k)+\sum_{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a}\sum_{1\le k\le p^a}\chi_{p^a}(k)\\
&=\sum_{m=1}^{a}\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^m}}(p^m-1)\chi_{p^a}(k)+\sum_{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a}0\\
&=\sum_{m=1}^{a}(p^m-1)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^s\\ s=a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^a\\ \gcd(k-1,p^s)=p^m}}\chi_{p^a}(k)+\sum_{m=1}^{a}(p^m-1)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^s\\ s<a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^a\\ \gcd(k-1,p^s)=p^m}}\chi_{p^a}(k)\\
&=\sum_{m=1}^{a}(p^m-1)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^a\\ \gcd(k-1,p^a)=p^m\\ m=a}}\chi_{p^a}(k)+\sum_{m=1}^{a}(p^m-1)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^a\\ \gcd(k-1,p^a)=p^m\\ m\ne a}}\chi_{p^a}(k)\\
&\quad+\sum_{m=1}^{a-1}(p^m-1)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^s\\ s<a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^a\\ \gcd(k-1,p^s)=p^m\\ s=m}}\chi_{p^a}(k)+\sum_{m=1}^{a-2}(p^m-1)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^s\\ s<a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^a\\ \gcd(k-1,p^s)=p^m\\ m<s}}\chi_{p^a}(k)\\
&=p^a-p^{a-1}+\sum_{m=1}^{a-1}(p^m-1)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^a\\ \gcd(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^a)=p^m}}\sum_{u=1}^{p^{a-m}}\chi_{p^a}(1+up^m)+0
\end{aligned}$$

上面最后一个等式是由引理 2.3 得到，最后由引理 2.1，我们有：

$$f\left(p^{a}\right)=\varphi\left(p^{a}\right)+\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)=p^{m}}}0=\varphi\left(p^{a}\right)。$$

所以我们完成了定理 1.1 的证明。

3. 定理 1.2 的证明

首先，我们需要证明下面的命题。

命题 3.1： 如果 χ 是一个模 p^{a} 的一个狄利克雷特征，且 $p^{l}\left(0\le l\le a\right)$ 是 χ 的导子，则我们有下列恒等式：

$$\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(k,p^{a}\right)=1}}\gcd\left(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)\chi\left(k\right)=\varphi\left(p^{a}\right)\sigma_r\left(\frac{p^{a}}{p^{l}}\right)。$$

证明： 如果 $l=0$，则 χ 是一个平凡特征，上式退化为 Sury 的恒等式(2)。如果 $l=a$，则 χ 是一个模 p^{a} 的本原特征，这时候上式就是定理 1.1。对于剩下的情形，根据定理 1.1 的证明，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(k,p^{a}\right)=1}}\gcd\left(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)\chi_{p^{a}}\left(k\right)\\ &=p^{a}-1+\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le k\le p^{a}\\ \gcd\left(k-1,p^{a}\right)=p^{m}\\ m\ne a}}\chi_{p^{a}}\left(k\right)+\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)=p^{m}\\ m<a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^{a}\\ \gcd\left(k-1,p^{m}\right)=p^{m}}}\chi_{p^{a}}\left(k\right)\\ &\quad+\sum_{m=1}^{a-2}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)=p^{s}\\ m<s<a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^{a}\\ \gcd\left(k-1,p^{s}\right)=p^{m}}}\chi_{p^{a}}\left(k\right)\end{aligned}$$

为了方便记号，将上面各项简记为：

$$\begin{aligned}A&=p^{a}-1,\\ B&=\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le k\le p^{a}\\ \gcd\left(k-1,p^{a}\right)=p^{m}\\ m\ne a}}\chi_{p^{a}}\left(k\right),\\ C&=\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)=p^{m}\\ m<a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^{a}\\ \gcd\left(k-1,p^{m}\right)=p^{m}}}\chi_{p^{a}}\left(k\right),\\ D&=\sum_{m=1}^{a-2}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)=p^{s}\\ m<s<a}}\sum_{\substack{1\le k\le p^{a}\\ \gcd\left(k-1,p^{s}\right)=p^{m}}}\chi_{p^{a}}\left(k\right)\end{aligned}$$

现在分别计算 B, C, D 各项。由引理 2.4，我们有

$$\begin{aligned}B&=\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le j\le p^{a-m}\\ \gcd\left(j,p\right)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+jp^{m}\right)\\ &=\sum_{m=1}^{l-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le j\le p^{a-m}\\ \gcd\left(j,p\right)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+jp^{m}\right)+\sum_{m=l}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\sum_{\substack{1\le j\le p^{a-m}\\ \gcd\left(j,p\right)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+jp^{m}\right)\end{aligned}$$

$$=1-p^{a-1}+(a-l)\varphi\left(p^{a}\right)$$

再由引理 2.2，我们得到：

$$C=\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\left(\left(p^{a-m}\right)^{r}-\left(p^{a-m-1}\right)^{r}\right)\sum_{1\le u\le p^{a-m}}\chi_{p^{a}}\left(1+up^{m}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\left(\left(p^{a-m}\right)^{r}-\left(p^{a-m-1}\right)^{r}\right)\sum_{i=0}^{a-m}\sum_{\substack{1\le v\le p^{a-m-i}\\ \gcd(v,p)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+vp^{m+i}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\left(\left(p^{a-m}\right)^{r}-\left(p^{a-m-1}\right)^{r}\right)\sum_{i=0}^{a-m}\sum_{\substack{1\le v\le p^{a-w}\\ \gcd(v,p)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+vp^{w}\right)$$

接着再由引理 2.4，得到

$$\begin{aligned}C=&\sum_{m=1}^{l-2}\left(p^{m}-1\right)\left(\left(p^{a-m}\right)^{r}-\left(p^{a-m-1}\right)^{r}\right)\left(-p^{a-l}+\sum_{i=l-m}^{a-m-1}\varphi\left(p^{a-m-i}\right)+1\right)\\&+\left(p^{l-1}-1\right)\left(\left(p^{a-(l-1)}\right)^{r}-\left(p^{a-(l-1)-1}\right)^{r}\right)\left(-p^{a-l}+\sum_{i=1}^{a-l}\varphi\left(p^{a-(l-1)-i}\right)+1\right)\\&+\sum_{m=l}^{a-1}\left(p^{m}-1\right)\left(\left(p^{a-m}\right)^{r}-\left(p^{a-m-1}\right)^{r}\right)\left(\sum_{i=0}^{a-m-1}\varphi\left(p^{a-m-i}\right)+1\right)\\=&\,0+0+p^{a}\left(p^{ar}-p^{ar-r}\right)\sum_{m=l}^{a-1}\left(1-p^{-m}\right)p^{-mr}\\=&\,p^{ar+a-rl}-p^{a}-\frac{\left(p^{1+r}-p\right)\left(p^{ar+a-l-rl}-1\right)}{p^{1+r}-1}\end{aligned}$$

最后，由引理 2.2 和引理 2.4 计算 D，得到

$$\begin{aligned}D=&\sum_{m=1}^{a-2}\left(p^{m}-1\right)\sum_{s=m+1}^{a-1}\sum_{\substack{1\le b_1,b_2,\cdots,b_r\le p^{a}\\ \gcd\left(b_1,b_2,\cdots,b_r,p^{a}\right)=p^{s}}}\sum_{\substack{1\le j\le p^{a-m}\\ \gcd(j,p)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+jp^{m}\right)\\=&\,p^{ar-r}\sum_{m=1}^{a-2}\left(p^{m}-1\right)p^{-mr}\left(1-\left(p^{-r}\right)^{a-m-1}\right)\sum_{\substack{1\le j\le p^{a-m}\\ \gcd(j,p)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+jp^{m}\right)\\=&\,p^{ar-r}\sum_{m=1}^{l-1}\left(p^{m}-1\right)p^{-mr}\left(1-\left(p^{-r}\right)^{a-m-1}\right)\sum_{\substack{1\le j\le p^{a-m}\\ \gcd(j,p)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+jp^{m}\right)\\&+p^{ar-r}\sum_{m=l}^{a-2}\left(p^{m}-1\right)p^{-mr}\left(1-\left(p^{-r}\right)^{a-m-1}\right)\sum_{\substack{1\le j\le p^{a-m}\\ \gcd(j,p)=1}}\chi_{p^{a}}\left(1+jp^{m}\right)\\=&\left(p^{a-1}+p^{(r+1)(a-l)}-p^{ar+a-1-lr}-p^{a-l}\right)\\&+p^{ar-r}\varphi\left(p^{a}\right)\left(\sum_{m=l}^{a-2}p^{-mr}-\sum_{m=l}^{a-2}p^{r-ar}-\sum_{m=l}^{a-2}p^{(-r-1)m}+\sum_{m=l}^{a-2}p^{r-ar}p^{-m}\right)\\=&\,p^{a-1}-p+p^{ar+a-lr}\left(p^{-l}-p^{-1}\right)-(a-l-1)\varphi\left(p^{a}\right)+\varphi\left(p^{a}\right)\frac{p^{ar-lr}-p^{r}}{p^{r}-1}\\&-\varphi\left(p^{a}\right)\frac{p^{ar-lr-l+1}-p^{r-a+2}}{p^{1+r}-1}\end{aligned}$$

把上面关于 A, B, C, D 的结果加起来，化简后结果为：

$$A+B+C+D=\varphi\left(P^{a}\right)\sigma_{r}\left(\frac{p^{a}}{p^{l}}\right),$$

所以得到了我们想要的结果。

定理 1.2 的证明： 记 $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{a_i}$ 和 $d=\prod_{i=1}^{r}p_i^{b_i}\left(0\le b_i\le a_i\right)$。由定理 1.1 的证明，如果 χ 有分解 $\chi=\chi_{p_1}\chi_{p_2}\cdots\chi_{p_r}$，记 $g\left(\chi_{p_i}\right)$ 是 χ_{p_i} 的导子，则我们有 $g\left(\chi\right)=g\left(\chi_{p_1}\right)g\left(\chi_{p_2}\right)\cdots g\left(\chi_{p_r}\right)$ 且 $g\left(\chi_{p_i}\right)=p_i^{b_i}\left(1\le i\le r\right)$。注意到，对于任意的模 n 的特征 χ，函数 $f\left(n\right)$ 是积性的(见(4)式)。于是由命题 3.1，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}}\gcd\left(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n\right)\chi\left(k\right)\\&=\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{\substack{1\le k,b_1,b_2,\cdots,b_r\le n\\ \gcd(k,n)=1}}\gcd\left(k-1,b_1,b_2,\cdots,b_r,n\right)\chi_{k_i}\left(k\right)\right)\\&=\prod_{i=1}^{r}\left(\varphi\left(p_i^{a}\right)\sigma_r\left(\frac{p_i^{a}}{p_i^{l}}\right)\right)\\&=\varphi\left(n\right)\sigma_r\left(\frac{n}{d}\right)\end{aligned}$$

证毕。

参考文献

[1] Li, Y., Hu, X. and Kim, D. (2018) A Generalization of Menon's Identity with Dirichlet Characters. *International Journal of Number Theory*, **14**, 2631-2639. https://doi.org/10.1142/S1793042118501579

[2] Apostol, T.M. (1976) Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York/Heidelberg

[3] Menon, P.K. (1965) On the Sum (a-1, n)[(a, n) = 1]. *Journal of the Indian Mathematical Society*, **29**, 155-163.

[4] Sury, B. (2009) Some Number-Theoretic Identities from Group Actions. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **58**, 99-108. https://doi.org/10.1007/s12215-009-0010-6

[5] Miguel, C. (2014) Menon's Identity in Residually Finite Dedekind Domains. *Journal of Number Theory*, **137**, 179-185. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2013.11.003

[6] Miguel, C. (2016) A Menon-Type Identity in Residually Finite Dedekind Domains. *Journal of Number Theory*, **164**, 43-51. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2015.12.018

[7] Zhao, X.-P. and Cao, Z.-F. (2017) Another Generalization of Menon's Identity. *International Journal of Number Theory*, **13**, 2373-2379. https://doi.org/10.1142/S1793042117501299