Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 377-385
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93050

Permanence and Global Attractivity of an Impulsive Infinite Delay System

Ruyue Zhang, Jianli Li

Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha Hunan
Email: xy564500727@qq.com

Received: Apr. 26^{th}, 2019; accepted: May 6^{th}, 2019; published: May 21^{st}, 2019

Abstract

In this paper, we study a system with impulsive and infinite delay. By using the comparison theorem of impulsive differential equations and constructing some suitable Lyapunov functionals, we discuss the permanence and global attractivity of the model.

Keywords

Impulsive, Delay, Permanence, Global Attractivity

具有脉冲的无限时滞系统的持久性与全局吸引性

张如月，李建利

湖南师范大学数学系，湖南 长沙
Email: xy564500727@qq.com

收稿日期：2019年4月26日；录用日期：2019年5月6日；发布日期：2019年5月21日

文章引用: 张如月, 李建利. 具有脉冲的无限时滞系统的持久性与全局吸引性[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 377-385.
DOI: 10.12677/pm.2019.93050

摘 要

该文研究了具有脉冲的无限时滞系统的持久性和全局吸引性。利用脉冲微分方程不等式以及放缩技巧得到所构造的系统是持续生存的。构造合适的**Lyapunov**函数和一些分析技巧证明其全局吸引性，我们的结果推广和改进了相关文献的结果。

关键词

脉冲，时滞，持久性，全局吸引性

1. 引言

在生物数学中Logistic型已经被认为是一种十分重要的模型，许多改善的模型已经得出了很好的结论。比方说，由于环境的季节性影响和遗传因素，时间延迟就被考虑进了Logistic 模型 [1]- [3]。最近，在文献 [4]中，作者研究了一类脉冲时滞Logistic模型的持久性和全局吸引性。本文我们研究一类具有脉冲和无限时滞的系统的持久性和全局吸引性，所得结果改进和推广了已有文献的结论。

考虑下面的脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_1(t)[r_1(t) - a_{11}(t)x_1(t) - a_{12}(t)x_2(t) \\ & -b_1(t)x_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)x_2(t-s)ds], \quad t \neq t_k, \\ \dot{x}_2(t) = & x_2(t)[r_2(t) - a_{21}(t)x_1(t) - a_{22}(t)x_2(t) \\ & -b_2(t)x_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)x_1(t-s)ds], \quad t \neq t_k, \\ x_1(t_k^+) = & h_{1k}x_1(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ x_2(t_k^+) = & h_{2k}x_2(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{1.1}$$

满足以下初始条件

$$x_i(u) = \phi_i(u) \geq 0, u \in (-\infty, 0], \phi_i \in ((-\infty, 0], [0, +\infty)), \phi_i(0) > 0, \tag{1.2}$$

其中$x_1(t)$和$x_2(t)$是种群x_1和x_2 在时间t时刻的种群密度，$r_i(t), a_{ij}(t)$,$b_i(t)(i, j = 1, 2)$是连续函数且

对于所有$t>0$有界；对于任意给定的连续函数$f(t)$，令f_L和f_M 分别表示$\inf_{0\leq t<+\infty} f(t)$ 和$\sup_{0\leq t<+\infty} f(t)$ ；$k_i:[0,+\infty)\to(0,+\infty)(i=1,2)$是连续核函数，即$\int_0^{+\infty}k_i(s)ds=1; 0<t_1<t_2<...<t_k<t_{k+1}<...$是脉冲时刻且$\lim_{k\to+\infty}t_k=+\infty$ 脉冲扰动$\{h_{ik}:k=1,2,...\}(i=1,2)$ 是正序列且有界。

令$PC(J,R)=\{\phi:J\to R,$ 当$t\neq t_k$ 时，ϕ 是连续的。且$\phi(t_k^-)$和$\phi(t_k^+)$存在，并且$\phi(t_k^-)=\phi(t_k),k=1,2,...\}$" 由脉冲微分方程的基本定理可知，系统(1.1) 有一个唯一解$x(t)=x(t,x_0)\in PC([0,+\infty),R^+\times R^+)$.

引理1.1： 令$x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$为系统(1.1) (1.2) 的任意一个解，则$x_i(t)>0,i=1,2,t\geq 0$.

证明： (1.1)的第i个方程可以被写成如下形式

$$\dot{x}_i(t)=P_i(t)x_i(t),t\neq t_k,i=1,2,$$

其中

$$P_i(t)=r_i(t)-a_{ii}(t)x_i(t)-a_{ij}(t)x_j(t)-b_i(t)x_i(t)\int_0^{+\infty}k_j(s)x_j(t-s)ds,1\leq i,j\leq 2.$$

则

$$x_i(t)=\prod_{0<t_k<t}h_{ik}x_i(0)\exp(\int_0^t P_i(s)ds)>0,i=1,2.$$

引理1.2： [5]假设$m\in PC[R_+,R]$ ，且它的不连续点为$t=t_k$并且在$t=t_k(k=1,2,...)$是左连续的。而且有

$$\begin{aligned}&Dm(t)\leq g(t,m(t)),\ \ t\neq t_k,\ \ k=1,2,...,\\&m(t_k^+)\leq\phi_k(m(t_k)),\ \ k=1,2,...,\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中$g\in C[R_+\times R_+,R],\phi_k\in C[R,R]$并且$\phi_k(u)$对于每一个$k=1,2,...$ 关于u是不减的。令$r(t)$为脉冲微分方程的最大解

$$\begin{aligned}&\dot{u}=g(t,u),\ \ \ t\neq t_k,\ \ \ k=1,2,...,\\&u(t_k^+)=\phi_k(u(t_k)),\ \ t_k>t_0,\ \ k=1,2,...,\\&u(t_0^+)=u_0,\end{aligned}\tag{1.4}$$

在$[t_0,+\infty)$上存在。则$m(t_0^+)\leq u_0$ 意味着$m(t)\leq r(t),t\geq t_0$.

若不等式(1.3)反号，令$p(t)$为系统(1.4)在$[t_0,+\infty)$的最小解。则$m(t_0^+)\geq u_0$ 意味着$m(t)\geq p(t),t\geq t_0$.

引理1.3： 若$r>0a>0$且

$$\begin{cases}\frac{dx(t)}{dt} &=x(t)(r-ax(t)),t\neq t_k,\\ x(t_k^+) &=h_kx(t_k),k=1,2,...\end{cases}\tag{1.5}$$

当$t \geq 0$时，$x(0) > 0$若存在$\lambda_1 \leq \lambda_2 < r$, 使得

$$e^{-\lambda_2(t-s)} \leq \prod_{s<t_k<t} h_k \leq e^{-\lambda_1(t-s)},$$

成立，则对于系统(1.5)的任意正解$x(t)$，有

$$\frac{r-\lambda_2}{a} \leq \liminf_{t\to+\infty} x(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} x(t) \leq \frac{r-\lambda_1}{a}.$$

证明：设$x(t) = \frac{1}{y(t)}$，则系统化为

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} & = -ry(t) + a, t \neq t_k, \\ y(t_k^+) & = \frac{1}{h_k} y(t_k), k = 1, 2, ... \end{cases}$$

对任意$T > 0$，有

$$\begin{aligned} y(t) & = y(T) \prod_{T<t_k<t} \frac{1}{h_k} e^{-r(t-T)} + a \int_T^t \prod_{s<t_k<t} \frac{1}{h_k} e^{-r(t-s)} ds \\ & \leq y(T) e^{\lambda_2(t-T)} e^{-r(t-T)} + a \int_T^t e^{-(r-\lambda_2)(t-s)} ds \\ & \leq y(T) e^{-(r-\lambda_2)(t-T)} + \frac{a}{r-\lambda_2} [e^{-(r-\lambda_2)(t-t)} - e^{(-(r-\lambda_2)(t-T)}] \\ & = y(T) e^{-(r-\lambda_2)(t-T)} + \frac{a}{r-\lambda_2} [1 - e^{-(r-\lambda_2)(t-T)}] \end{aligned}$$

所以，

$$\limsup_{t\to+\infty} y(t) \leq \frac{a}{r-\lambda_2},$$

即有，

$$\liminf_{t\to+\infty} x(t) \geq \frac{r-\lambda_2}{a}.$$

同理可得，

$$y(t) \geq y(T) e^{-(r-\lambda_1)(t-T)} + \frac{a}{r-\lambda_1} [1 - e^{-(r-\lambda_1)(t-T)}].$$

所以，

$$\liminf_{t\to+\infty} y(t) \geq \frac{a}{r-\lambda_1},$$

即有，

$$\limsup_{t\to+\infty} x(t) \leq \frac{r-\lambda_1}{a}.$$

引理证毕。

注：此引理的条件(1.5)比文献 [4] Lemma 2.1的条件(2.2)更好，因此我们的结果改进了已有文献的结论。

引理1.4： [6]对于任意$y \in PC([0,+\infty), R^{+})$令$k:[0,+\infty) \to (0,+\infty)$为一个连续核函数，即满足$\int_0^{+\infty} k(s)ds = 1$. 则

$$\liminf_{t\to+\infty} y(t) \le \liminf_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} k(s)y(t-s)ds \le \limsup_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} k(s)y(t-s)ds \le \limsup_{t\to+\infty} y(t).$$

2. 持久性

定理2.1：假设存在

$$\lambda_{i1} \le \lambda_{i2} < r_{iL} - a_{ijM}M_j \tag{2.1}$$

使得

$$e^{-\lambda_{i2}(t-s)} \le \prod_{s<t_k<t} h_{ik} \le e^{-\lambda_{i1}(t-s)}.$$

对于系统(1.1) (1.2)的任意正解$X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$我们可以得到

$$m_i \le \liminf_{t\to+\infty} x_i(t) \le \limsup_{t\to+\infty} x_i(t) \le M_i, i = 1, 2.$$

其中，

$$M_i = \frac{r_{iM} - \lambda_{i1}}{a_{iiL}}.$$

$$m_i = \frac{r_{iL} - a_{ijM}M_j - \lambda_{i2}}{a_{iiM} + b_{iM}M_j}.$$

证明：设$X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$为系统(1.1) (1.2) 的任意正解。由(1.1)的第i个等式，我们能得到

$$\dot{x}_i(t) \le x_i(t)[r_{iM} - a_{iiL}x_i(t)], \quad i = 1, 2.$$

由引理1.2可知，我们能得到$x_i(t) \le \omega_i(t)$其中$\omega_i(t)$是以下系统的任意一个正解

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i(t) &= \omega_i(t)[r_{iM} - a_{iiL}\omega_i(t)], \\ \omega_i(t_k^+) &= h_{ik}\omega_i(t_k), k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

由条件(2.1)易得$\lambda_{i1} < r_{iM}$，所以由引理1.3我们可以得到

$$\limsup_{t\to+\infty} x_i(t) \le \limsup_{t\to+\infty} \omega_i(t) \le M_i = \frac{r_{iM} - \lambda_{i1}}{a_{iiL}}. \tag{2.2}$$

由引理1.4可得，

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}k_j(s)x_j(t-s)ds \le \limsup_{t\to+\infty}x_j(t).$$

所以由(1.1)的第i个等式和(2.2)可知，对于任意$\varepsilon>0$, 存在一个$T>\tau$, 使得对于任意的$t>T$和$t\neq t_k$, 都有

$$\dot{x}_i(t)\ge x_i(t)[r_{iL}-a_{ijM}(M_j+\varepsilon)-(a_{iiM}+b_{iM}(M_j+\varepsilon))x_i(t)], i\neq j.$$

考虑以下系统

$$\begin{aligned}\dot{u}_i(t)&=u_i(t)[r_{iL}-a_{ijM}(M_j+\varepsilon)-(a_{iiM}+b_{iM}(M_j+\varepsilon))u_i(t)], i\neq j,\\ u_i(t_k^+)&=h_{ik}u_i(t_k), k=1,2,...\end{aligned}\tag{2.3}$$

令$u_i(t)$为系统(2.3)满足初始条件(1.2)的任意一个正解。则由引理1.2可知$x_i(t)\ge u_i(t)$. 通过引理1.3和条件(2.1)，令$\varepsilon\to 0$ 我们得到

$$\liminf_{t\to+\infty}x_i(t)\ge\liminf_{t\to+\infty}u_i(t)\ge m_i=\frac{r_{iL}-a_{ijM}M_j-\lambda_2}{a_{iiM}+b_{iM}M_j}, i=1,2.$$

3. 全局吸引性

定理3.1：在定理2.1的条件假设下，我们继续假设存在一个$\rho_i>0(i=1,2)$使得

$$\liminf_{t\to+\infty}(a_{ii}(t)\rho_i+b_i(t)\rho_i m_j-a_{ji}(t)\rho_j-b_{jM}\rho_j M_j)>0,\quad 1\le i,j\le 2,\quad i\neq j\tag{3.1}$$

则系统(1.1)是全局吸引的，即对系统(1.1)的任意正解$X(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$和$Y(t)=(y_1(t),y_2(t))^T$，都有

$$\lim_{t\to+\infty}(x_i(t)-y_i(t))=0,\quad i=1,2.$$

证明：让$X(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$和$Y(t)=(y_1(t),y_2(t))^T$为模型(1.1)的任意两个正解。则(3.1)意味着对任意充分小的$\varepsilon_0>0$, 我们都有

$$\liminf_{t\to+\infty}(a_{ii}(t)\rho_i+b_i(t)\rho_i(m_j-\varepsilon_0)-a_{ji}(t)\rho_j-b_{jM}\rho_j(M_j+\varepsilon_0)>0,1\le i,j\le 2,i\neq j.$$

则通过定理2.1，对于其中的ε_0, 存在$T_1>\tau$和$\delta>0$使得下列式子成立

$$x_i(t)\le M_i+\varepsilon_0, y_i(t)\le M_i+\varepsilon_0, i=1,2,$$

$$x_i(t)\ge m_i-\varepsilon_0, y_i(t)\ge m_i-\varepsilon_0, i=1,2,$$

$$a_{ii}(t)\rho_i+b_i(t)\rho_i(m_j-\varepsilon_0)-a_{ji}(t)\rho_j-b_{jM}\rho_j(M_j+\varepsilon_0)>\delta,1\le i,j\le 2,i\neq j.$$

定义一个李雅普诺夫函数

$$V_1(t)=\sum_{i=1}^{2}\rho_i|\ln x_i(t)-\ln y_i(t)|.$$

DOI: 10.12677/pm.2019.93050

对$t > T_1$和$t \neq t_k, k = 1, 2, ...,$ 计算$V_1(t)$的右上导数，得

$$
\begin{aligned}
D^+V_1(t) &= \sum_{i=1}^{2} \rho_i (\frac{x_i'(t)}{x_i(t)} - \frac{y_i'(t)}{y_i(t)}) sgn(x_i(t) - y_i(t)) \\
&= sgn(x_1(t) - y_1(t))\rho_1[a_{11}(t)(y_1(t) - x_1(t)) \\
&\quad +a_{12}(t)(y_2(t) - x_2(t)) \\
&\quad +b_1(t)y_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)y_2(t-s)ds \\
&\quad -b_1(t)x_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)x_2(t-s)ds \\
&\quad -b_1(t)y_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)x_2(t-s)ds \\
&\quad +b_1(t)y_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)x_2(t-s)ds] \\
&\quad +sgn(x_2(t) - y_2(t))\rho_2[a_{21}(t)(y_1(t) - x_1(t)) + a_{22}(t)(y_2(t) - x_2(t)) \\
&\quad +b_2(t)y_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)y_1(t-s)ds - b_2(t)x_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)x_1(t-s)ds \\
&\quad -b_2(t)y_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)x_1(t-s)ds + b_2(t)y_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)x_1(t-s)ds] \\
&\leq sgn(x_1(t) - y_1(t))\rho_1[a_{11}(t)(y_1(t) - x_1(t)) \\
&\quad +a_{12}(t)(y_2(t) - x_2(t)) \\
&\quad +b_1(t)y_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)y_2(t-s)ds - b_1(t)y_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)x_2(t-s)ds \\
&\quad +b_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)x_2(t-s)ds(y_1(t) - x_1(t))] \\
&\quad +sgn(x_2(t) - y_2(t))\rho_2[a_{21}(t)(y_1(t) - x_1(t)) + a_{22}(t)(y_2(t) - x_2(t)) \\
&\quad +b_2(t)y_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)y_1(t-s)ds \\
&\quad -b_2(t)y_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)x_1(t-s)ds \\
&\quad +b_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)x_1(t-s)ds(y_2(t) - x_2(t))] \\
&\leq |y_1(t) - x_1(t)|[-\rho_1 a_{11}(t) + \rho_2 a_{21}(t) - \rho_1 b_1(t)(m_2 - \varepsilon_0)] \\
&\quad +|y_2(t) - x_2(t)|[-\rho_2 a_{22}(t) + \rho_1 a_{12}(t) - \rho_2 b_2(t)(m_2 - \varepsilon_0)] \\
&\quad +\rho_1 b_1(t)y_1(t)\int_0^{+\infty} k_2(s)|y_2(t-s) - x_2(t-s)|ds \\
&\quad +\rho_2 b_2(t)y_2(t)\int_0^{+\infty} k_1(s)|y_1(t-s) - x_1(t-s)|ds
\end{aligned}
$$

令

$$V_2(t) = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \rho_j \int_0^{+\infty} k_i(s)\int_t^{t+s} b_j(v)y_j(v)|y_i(v-s) - x_i(v-s)|dvds$$

对$t > T_1$和$t \neq t_k, k = 1, 2, ...,$ 计算$V_2(t)$的右上导数，得

$$\begin{aligned}
D^+V_2(t) &= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \rho_j \int_0^{+\infty} k_i(s)(\int_t^{t+s} b_j(v)y_j(v)|y_i(v-s) - x_i(v-s)|dv)'ds \\
&= \rho_2 \int_0^{+\infty} k_1(s)b_2(t+s)y_2(t+s)|y_1(t) - x_1(t)|ds \\
&\quad -\rho_2 \int_0^{+\infty} k_1(s)b_2(t)y_2(t)|y_1(t-s) - x_1(t-s)|ds \\
&\quad +\rho_1 \int_0^{+\infty} k_2(s)b_1(t+s)y_1(t+s)|y_2(t) - x_2(t)|ds \\
&\quad -\rho_1 \int_0^{+\infty} k_2(s)b_1(t)y_1(t)|y_2(t-s) - x_2(t-s)|ds \\
&\leq |y_1(t) - x_1(t)|\rho_2 b_{2M}(M_2 + \varepsilon_0) \int_0^{+\infty} k_1(s)ds \\
&\quad -\rho_2 \int_0^{+\infty} k_1(s)b_2(t)y_2(t)|y_1(t-s) - x_1(t-s)|ds \\
&\quad +|y_2(t) - x_2(t)|\rho_1 b_{1M}(M_1 + \varepsilon_0) \int_0^{+\infty} k_2(s)ds \\
&\quad -\rho_1 \int_0^{+\infty} k_2(s)b_1(t)y_1(t)|y_2(t-s) - x_2(t-s)|ds
\end{aligned}$$

令$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$则我们能够得到

$$\begin{aligned}
D^+(V_1(t) + V_2(t)) &\leq |y_1(t) - x_1(t)|[-\rho_1 a_{11}(t) + \rho_2 a_{21}(t) - \rho_1 b_1(t)(m_2 - \varepsilon_0) \\
&\quad +\rho_2 b_{2M}(M_2 + \varepsilon_0)] \\
&\quad +|y_2(t) - x_2(t)|[-\rho_2 a_{22}(t) + \rho_1 a_{12}(t) - \rho_2 b_2(t)(m_2 - \varepsilon_0) \\
&\quad +\rho_1 b_{1M}(M_1 + \varepsilon_0)].
\end{aligned}$$

对$t = t_k, k = 1, 2, ...,$ 我们容易得到

$$V(t_k^+) = V_1(t_k^+) + V_2(t_k^+) = V_1(t_k) + V_2(t_k) = V(t_k).$$

通过以上分析可以得出对所有的$t > T_1$

$$D^+V(t) \leq -\delta(|y_1(t) - x_1(t)| + |y_2(t) - x_2(t)|). \tag{3.2}$$

对(3.2)左右两边同时从T_1到t积分，我们能得到

$$V(t) - V(T_1) \leq -\delta \int_{T_1}^{t} (|y_1(s) - x_1(s)| + |y_2(s) - x_2(s)|)ds,$$

这等价于，

$$V(t)+\delta\int_{T_1}^{t}(|y_1(s)-x_1(s)|+|y_2(s)-x_2(s)|)ds \le V(T_1) < +\infty.$$

所以，$V(t)$在$[T_1,+\infty]$是有界的并且

$$\int_{T_1}^{+\infty}(|y_1(s)-x_1(s)|+|y_2(s)-x_2(s)|)ds < +\infty.$$

由定理2.1易知，$y_1(t)-x_1(t)$ 及$y_2(t)-x_2(t)$ 在$[T_1,+\infty)$上一致连续，故

$$\lim_{t\to+\infty}|y_1(t)-x_1(t)| = \lim_{t\to+\infty}|y_2(t)-x_2(t)| = 0.$$

定理得证。

基金项目

国家自然科学基金(11571088)、湖南省教育厅项目(14A098)。

参考文献

[1] Kuang, Y. (1993) Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics. Academic Press, Boston.

[2] Chen, F.D. and Shi, C.L. (2006) Dynamic Behavior of a Logistic Equation with Infinite Delay. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **22**, 313-324. https://doi.org/10.1007/s10255-006-0307-6

[3] Teng, Z.D. (2002) Permanence and Stability in Non-Autonomous Logistic Systems with Infinite Delays. *Dynamical Systems*, **17**, 187-202. https://doi.org/10.1080/14689360110102312

[4] He, M.X., Chen, F.D. and Li, Z. (2016) Permanence and Global Attractivity of an Impulsive Delay Logistic Model. *Applied Mathematics Letters*, **62**, 92-100. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.07.009

[5] Lakshmikantham, V., Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/0906

[6] de Oca, F.M. and Vivas, M. (2006) Extinction in a Two Dimensional Lotka-Volterra System with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **7**, 1042-1047. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2005.09.005