Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 370-376
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93049

Hans汉斯

Uniqueness of Difference about Entire Functions

Xiaohuang Huang, Dan Liu

Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: 1838394005@qq.com, liudan@scau.edu.cn

Received: Apr. 26th, 2019; accepted: May 6th, 2019; published: May 21st, 2019

Abstract

In this paper, we investigate the uniqueness of difference operators about entire function, and prove: let $f(z)$ be an entire function of finite order, k be some positive integers, let $a(z)$ be a small function of $f(z)$, and let $g(z)=m_1(z)f(z+c_1)+\cdots+m_k(z)f(z+c_k)$ be the difference polynomial of $f(z)$, where $m_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$ are the small functions of $f(z)$, and $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ are some finite distinct values. If $f(z)$ and $g(z)$ share 0 CM, and share $a(z)$ IM, then $f(z)\equiv g(z)$.

Keywords

Entire Function, Shared Small Function, Difference Polynomials

整函数差分唯一性

黄小皇，刘　丹

华南农业大学应用数学研究所，广东 广州
Email: 1838394005@qq.com, liudan@scau.edu.cn

收稿日期：2019年4月26日；录用日期：2019年5月6日；发布日期：2019年5月21日

摘　要

本文探讨整函数的差分唯一性问题，证明了：设 $f(z)$ 为开平面有穷级整函数，

$$g(z)=m_1(z)f(z+c_1)+\cdots+m_k(z)f(z+c_k)$$

为 $f(z)$ 的差分多项式，其中 $m_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$ 为f的整小函数，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ k个判别的有穷复数。

文章引用: 黄小皇, 刘丹. 整函数差分唯一性[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 370-376.
DOI: 10.12677/pm.2019.93049

又设 $a(z)\not\equiv 0$ 为 $f(z)$ 的一个小函数，若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分担0，IM分担 $a(z)$，则 $f(z)\equiv g(z)$。

关键词

整函数，分担小函数，差分多项式

1. 引言

在本文中，假设读者熟知 Nevanlinna 值分布理论的相关基础知识以及常见符号[1] [2]。设 a 为开平面内的亚纯函数，若 $T(r,a)=S(r,f)$，则称 a 为 f 小函数。设 f 与 g 为复平面上非常数亚纯函数，a 为 f 与 g 的公共小函数，如果 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同且每个零点重级也相同，则称 f 与 g CM 分担 a。如果 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同，不计零点重级，则称 f 与 g IM 分担 a。

设 k 为正整数。记 $N_{k)}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的重级 $\le k$ 的零点密指量，计重数。$N_{(k}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的重级 $\ge k$ 的零点密指量，计重数。记 $\bar{N}_{k)}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的重级 $\le k$ 的零点精简密指量，不计重数。$\bar{N}_{(k}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的重级 $\ge k$ 的零点精简密指量，不计重数。记 $\bar{N}_{k}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的重级为 k 的零点精简密指量，不计重数。

接下来，我们需要定义一些差分算子的符号。设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，$m_1(z),m_2(z),\cdots,m_k(z)$ 为 $f(z)$ 的小函数，$c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为判别的有穷复数。令

$$g(z)=m_1(z)f(z+c_1)+m_2(z)f(z+c_2)+\cdots+m_k(z)f(z+c_k)$$

为 $f(z)$ 的差分多项式。最近，许多人做了关于复差分唯一性的问题。2014 年，Liu-Fang [3]证明了：

定理 A 设 $f(z)$ 为开平面有穷级的超越整函数，$c\in C$ 为非零有穷复数，n 为正整数。设 $a(z)\not\equiv 0,b(z)\not\equiv 0$ 为 $f(z)$ 的两个判别的小函数。若 $f(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 $a(z)$ 与 $b(z)$，则 $f(z)\equiv\Delta_c^n f(z)$。

2017 年，Li-Duan-Chen [4]证明了：

定理 B 设 $f(z)$ 为开平面有穷级整函数，$c\in C$ 为非零有穷复数，n 为正整数，a 为有穷复数。若 $f(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM0，IM 分担 a，则 $f(z)\equiv\Delta_c^n f(z)$。

本文推广并改进上述定理，证明了：

定理 1 设 $f(z)$ 为开平面有穷级整函数，

$$g(z)=m_1(z)f(z+c_1)+m_2(z)f(z+c_2)+\cdots+m_k(z)f(z+c_k)$$

为 $f(z)$ 的差分多项式，其中 $m_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$ 为 f 的整小函数，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ k 个判别的有穷复数。又设 $a(z)\not\equiv 0$ 为 $f(z)$ 的一个小函数，若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分担 0，IM 分担 $a(z)$，则 $f(z)\equiv g(z)$。

2. 几个引理

引理 1 [5] [6] [7] 设 f 为非常数有穷级亚纯函数，$c \in C$ 为非零有穷复数。则

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = S(r,f),$$

其中 $S(r,f) = o(T(r,f))$，除去 r 的一个集合 E，且集合 E 的对数测度为有穷的。

引理 2 设 f 为非常数亚纯函数，$P(f) = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \cdots + a_0 \left(a_p \neq 0\right)$ 为阶数为 p 的多项式，且系数 $a_j\left(j = 0,1,\cdots,p\right)$ 为有穷复数。又设 $b_i\left(i = 1,\cdots,q\right)\left(q > p\right)$ 为 q 个判别的复数，则

$$m\left(r, \frac{P(f) f'}{\left(f-b_1\right)\left(f-b_2\right)\cdots\left(f-b_q\right)}\right) = S(r,f).$$

引理 3 设 f_1 与 f_2 均为 $|z| < \infty$ 上的非常数亚纯函数，则

$$N\left(r, f_1 f_2\right) - N\left(r, \frac{1}{f_1 f_2}\right)$$
$$= N\left(r, f_1\right) + N\left(r, f_2\right) - N\left(r, \frac{1}{f_1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f_2}\right),$$

其中 $0 < r < \infty$。

引理 4 [8] 设 f 为有穷级 ρ 的超越亚纯函数，f 是形式为方程 $U(z,f)P(z,f) = Q(z,f)$ 的一个解，其中 $U(z,f), P(z,f), Q(z,f)$ 为 f 的差分多项式满足全阶 $\deg U(z,f) = n$ 于 $f(z)$ 与 $f\left(z+c_1\right),\cdots,f\left(z+c_j\right)$ 中，且 $\deg Q(z,f) \le n$。又设所有的系数 $a_\lambda, \lambda \in I$，且对于所有的 $\lambda \in I$ 有 $m\left(r, a_\lambda\right) = S(r,f)$。$U(z,f)$ 恰好含有全阶中最大一项。则

$$m\left(r, P(z,f)\right) = S(r,f).$$

引理 5 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，$a(z)$ 为 $f(z)$ 的一个小函数，$d_j = a - ja\left(j = 1,2,\cdots,q\right)$。

$$g(z) = m_1(z) f\left(z+c_1\right) + m_2(z) f\left(z+c_2\right) + \cdots + m_k(z) f\left(z+c_k\right)$$

为 $f(z)$ 的差分多项式，其中 $m_i(z)\left(i = 1,2,\cdots,k\right)$ 为 $f(z)$ 的整小函数，$c_i\left(i = 1,2,\cdots,k\right)$ k 个判别的有穷复数。则

i) $L(f) = \begin{vmatrix} f & a \\ f' & a' \end{vmatrix} \not\equiv 0$ 与 $L(g) = \begin{vmatrix} g & a \\ g' & a' \end{vmatrix} \not\equiv 0$。

ii) $m\left(r, \dfrac{L(f)}{f-d_j}\right) = S(r,f)$，与 $m\left(r, \dfrac{L(f) f}{\left(f-d_1\right)\left(f-d_2\right)\cdots\left(f-d_m\right)}\right) = S(r,f)$，其中 $2 \le m \le q$。

证

i) 只证 $L(f) \not\equiv 0$。若不然，有 $L(f) \equiv 0$，即 $a'f - af' \equiv 0$。上式两边积分可得 $f \equiv Da$，其中 D 为非零常数。由特征函数关系明显有 $T(r,f) = T(r,a) = S(r,f)$，这显然不可能。故 $L(f) \not\equiv 0$。同理可证 $L(g) \not\equiv 0$。

ii) 显然有 $m\left(r, \dfrac{L(f)}{f-d}\right) = m\left(r, \dfrac{a'(f-d) - (f'-d')}{f-d}\right) \le S(r,f)$，故 $m\left(r, \dfrac{L(f)}{f-d_j}\right) = S(r,f)$。因为 $\dfrac{L(f) f}{\left(f-d_1\right)\left(f-d_2\right)\cdots\left(f-d_m\right)} = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{L(f)}{f-d_i}$，从而根据上式可证得 $m\left(r, \dfrac{L(f) f}{\left(f-d_1\right)\left(f-d_2\right)\cdots\left(f-d_m\right)}\right) = S(r,f)$。

引理 6 设 f 为非常数亚纯函数，a,b,c 为 f 的三个判别的小函数。则

$$T(r,f)\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-c}\right)+S(r,f).$$

3. 定理 1 的证明

假设 $f\not\equiv g$。因为 f 与 g CM 分担 0，IM 分担 a，则由引理 1 与引理 6 可得

$$\begin{aligned}T(r,f)&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)\\&=\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+S(r,f)\\&\le N\left(r,\frac{1}{f-g}\right)+S(r,f)\le T(r,f-g)+S(r,f)\\&\le m(r,f-g)+S(r,f)\le m(r,f)+m\left(r,1-\frac{g}{f}\right)+S(r,f)\\&\le T(r,f)+S(r,f)\end{aligned},$$

即 $T(r,f)=\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)$。 (1)

设 $\varphi=\frac{L(f)(f-g)}{f(f-a)}$， (2)

$$\phi=\frac{L(g)(f-g)}{g(g-a)}, \tag{3}$$

其中 $L(f)$ 与 $L(g)$ 为引理 5 中所定义的。注意到 f 为非常数有穷级整函数，f 与 g CM 分担 0，IM 分担 a，我们可以知道 φ 的极点只能为 a 的极点，所以有 $N(r,\varphi)=S(r,f)$。同理也有 $N(r,\phi)=S(r,f)$。由对数导数引理以及引理 5 可得

$$\begin{aligned}T(r,\varphi)&=m(r,\varphi)+N(r,\varphi)\\&=m\left(r,\frac{L(f)(f-g)}{f(f-a)}\right)+S(r,f)\\&\le m\left(r,\frac{L(f)}{f(f-a)}\right)+m\left(r,1-\frac{g}{f}\right)+S(r,f)\\&=S(r,f)\end{aligned}, \tag{4}$$

即 $T(r,\varphi)=S(r,f)$。设 $d=a-ja\,(j\ne 0,1)$，根据引理 5 有

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{1}{f}\right)&=m\left(r,\frac{1}{a\varphi}\left(\frac{L(f)}{f}-\frac{L(f)}{f-a}\right)\left(1-\frac{g}{f}\right)\right)\\&\le m\left(r,1-\frac{g}{f}\right)+S(r,f)\\&=S(r,f)\end{aligned}, \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
m\left(r,\frac{1}{f-d}\right) &= m\left(r,\frac{L(f)(f-g)}{\varphi(f-a)(f-d)f}\right) \\
&\le m\left(r,1-\frac{g}{f}\right)+m\left(r,\frac{L(f)f}{f(f-a)(f-d)}\right)+S(r,f). \\
&= S(r,f)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

因为f与g CM 分担 0，于是我们有

$$
\frac{g}{f}=\frac{e^{\partial}}{H},
\tag{7}
$$

其中α与H为整函数，且H的零点为g的极点。由引理 1 可得

$$
T(r,g)=T\left(r,e^{\alpha}f\right)+S(r,f)=T(r,f)+S(r,f).
\tag{8}
$$

由引理 6，(1)与(8)可得

$$
\begin{aligned}
2T(r,f) &\le 2T(r,g)+S(r,f) \\
&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-d}\right)+S(r,f) \\
&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+T\left(r,\frac{1}{g-d}\right)-m\left(r,\frac{1}{g-d}\right)+S(r,f), \\
&\le T(r,f)+T(r,g)-m\left(r,\frac{1}{g-d}\right)+S(r,f) \\
&\le 2T(r,f)-m\left(r,\frac{1}{g-d}\right)+S(r,f)
\end{aligned}
$$

$$
\text{即 } m\left(r,\frac{1}{g-d}\right)=S(r,f)\text{。}
\tag{9}
$$

由 Nevanlinna 第一基本定理，引理 1，引理 3，(5)，(6)，(8)，(9)以及f为有穷级整函数，我们有

$$
\begin{aligned}
m\left(r,\frac{f-d}{g-d}\right) &\le m\left(r,\frac{f}{g-d}\right)+m\left(r,\frac{d}{g-d}\right) \\
&\le T\left(r,\frac{f}{g-d}\right)-N\left(r,\frac{f}{g-d}\right)+S(r,f) \\
&\le m\left(r,\frac{g-d}{f}\right)+N\left(r,\frac{g-d}{f}\right)-N\left(r,\frac{f}{g-d}\right)+S(r,f) \\
&\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{1}{g-d}\right)+S(r,f) \\
&= T\left(r,\frac{1}{f}\right)-T\left(r,\frac{1}{g-d}\right)+S(r,f) \\
&= T(r,f)-T(r,g)+S(r,f)
\end{aligned}
$$

$$
\text{因此 } m\left(r,\frac{f-d}{g-d}\right)=S(r,f)\text{。}
\tag{10}
$$

(3)又可写成 $\phi=\left[\frac{a-d}{a}\frac{L(g)}{g-a}+\frac{d}{a}\frac{L(g)}{g}\right]\left[\frac{f-d}{g-d}-1\right]$，则由(10)可得到

$$T(r,\phi)=m(r,\phi)+N(r,\phi)=m(r,\phi)+S(r,f)=S(r,f). \tag{11}$$

设 $H_{n,m}=n\varphi-m\phi$，其中 m,n 为正整数。接下来我们分为以下几种情形讨论。

情形 1 $n\varphi\equiv m\phi$。通过简单计算可得

$$n\left(\frac{f'}{f}-\frac{f'-a'}{f-a}\right)\equiv m\left(\frac{g'}{g}-\frac{g'-a'}{g-a}\right),$$

这可推出 $\left(\frac{f}{f-a}\right)^{n}\equiv A\left(\frac{g}{g-a}\right)^{m}$，其中 A 为非零常数。若 $n\neq m$，则从上式恒等式可得到

$$nT(r,f)=mT(r,g)+S(r,f),$$

这与(8)矛盾。因此 $n=m$，于是

$$\frac{f}{f-a}\equiv B\frac{g}{g-a}, \tag{12}$$

其中 B 为非零常数。若 $B=1$，明显有 $f\equiv g$，这与我们假设矛盾。故 $B\neq1$。从(12)容易得到

$$f\left[(B-1)g+a\right]\equiv Bag. \tag{13}$$

注意到 $f\left[(B-1)g+a\right]$ 与 Bag 均为 f 的全阶为 k 的差分多项式。由引理 4 与(13)得

$$m(r,(B-1)g+a)=S(r,f), \tag{14}$$

即 $m(r,g)=S(r,f)$。这可推出 $T(r,f)=T(r,g)+S(r,f)=m(r,g)+S(r,f)=S(r,f)$，显然矛盾。

情形 2 $n\varphi\not\equiv m\phi$ 对任意正整数 m,n 都成立。不妨设 $z_1\in S_{(m,n)}(0)\cup S_{(m,n)}(a)$，即 z_1 分别为 $f(f-a)$ 的 n 重零点与 $g(g-a)$ 的 m 重零点。由(2)和(3)可推出 $n\varphi(z_1)-m\phi(z_1)=0$。所以对于所有正整数 m,n，我们有

$$\begin{aligned}
&\bar{N}_{(m,n)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(m,n)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\\
&\leq\bar{N}\left(r,\frac{1}{n\varphi-m\phi}\right)+S(r,f)\leq T(r,n\varphi-m\phi)+S(r,f).\\
&\leq T(r,\varphi)+T(r,\phi)+S(r,f)=S(r,f)
\end{aligned} \tag{15}$$

于是根据引理 6，(1)和(15)可以得到

$$\begin{aligned}
T(r,f)&=\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)\\
&\leq\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{k=2}^{4}\bar{N}_{k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(5}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\\
&\quad+\sum_{k=2}^{4}\bar{N}_{k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\bar{N}_{(5}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)\\
&\leq\bar{N}_{(1,1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{k=2}^{4}\bar{N}_{k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(5}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{m=1}^{5}\bar{N}_{(1,m)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\\
&\quad+\sum_{k=2}^{4}\bar{N}_{k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\bar{N}_{(5}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{5}\left[N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\right]+\frac{1}{5}\left[N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-a}\right)\right]+S(r,f) \\
&\le \frac{2}{5}\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+S(r,f) \qquad (16)\\
&=\frac{4}{5}T(r,f)+S(r,f)
\end{aligned}
$$

即 $T(r,f)=S(r,f)$。矛盾。于是定理 1 得证。

基金项目

国家自然科学基金(NO. 11701188)资助。

参考文献

[1] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[2] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Oxford University Press, London.

[3] Liu, D., Yang. D.G. and Fang, M.L. (2014) Unicity of Entire Functions Concerning Shifts and Difference Operators. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 380910. https://doi.org/10.1155/2014/380910

[4] Li, S., Duan, M. and Chen, B.Q. (2017) Uniqueness of Entire Functions Sharing Two Values with Their Difference Operators. *Advances in Difference Equations*, Paper No. 390, 9 p. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1444-3

[5] Heittokangas. Korhonen, R., Laine, I. and Rieppo, J. (2011) Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Values with their Shifts. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **56**, 81-92. https://doi.org/10.1080/17476930903394770

[6] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of f(z + η) and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[7] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Nevanlinna Theory for the Difference Operator. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, **31**, 463-478.

[8] Laine, I. and Yang. C.C. (2007) Clunie Theorems for Difference and q-Difference Polynomials. *Journal of the London Mathematical Society*, **76**, 556-566. https://doi.org/10.1112/jlms/jdm073