Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 270-275
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93035

Crossed Modules of a Class of Five-Dimensional Lie Algebras

Yumei Wang

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai
Email: yumeiwang@shu.edu.cn

Received: Apr. 14th, 2019; accepted: Apr. 25th, 2019; published: May 6th, 2019

Abstract

The set of equivalence classes of crossed modules of four-dimensional unsolvable Lie algebras and the third relative cohomology groups were studied in [1]. Based on this work, the present paper will study the crossed modules of a certain five-dimensional Lie algebra and determine the condition of its equivalent class. Furthermore, it is shown that the third relative cohomology group of the five-dimensional Lie algebra is not trivial.

Keywords

Five-Dimensional Lie Algebra, Crossed Module, Third Relative Cohomology

一类五维李代数的交叉模

王玉玫

上海大学理学院，上海
Email: yumeiwang@shu.edu.cn

收稿日期：2019年4月14日；录用日期：2019年4月25日；发布日期：2019年5月6日

摘　要

文[1]主要研究了四维不可解李代数的交叉模的等价类集和三阶相对上同调群。在此基础上，本文研究了一类五维李代数的交叉模的性质，并确定出其等价类的条件，从而证明了这类五维李代数的三阶相对上同调群不是平凡的。

关键词

五维李代数，交叉模，三阶相对上同调

文章引用：王玉玫. 一类五维李代数的交叉模[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 270-275. DOI: 10.12677/pm.2019.93035

1. 引言

交叉模是 Whitehead 在上个世纪四十年代研究相对同伦群时引入的一个概念[2]。在[3]中，Gerstenhaber 研究了群的交叉模，群的交叉模既是模的推广，又是正规子群的推广。在这篇文章中，他证明了群的交叉模的等价类集与三阶上同调群之间的一一对应关系。1982 年，Kassel C.和 Loday J. L.在[4]中研究了李代数的交叉模，并证明了李代数的交叉模的等价类集与三阶相对上同调群之间也是一一对应的。[5]和[6]给出李代数的交叉模的等价类集与李代数的三阶相对上同调群空间的同构，并计算了 Virasoro 代数的交叉模和三阶相对上同调群。事实上，计算李代数的三阶上同调群是非常困难的事情，即使是计算低维李代数的三阶上同调群也是不容易的。借助上面的一一对应关系，可以考虑从交叉模的等价类入手，来研究李代数的三阶上同调群。文[1]主要研究了四维不可解李代数的交叉模的等价类，证明了这类李代数的交叉模只有平凡模，从而得到这类李代数的三阶相对上同调群也是平凡的。本文将在这个工作的基础上，研究一类五维李代数的交叉模，并确定其等价类的条件，证明了这类五维李代数的三阶相对上同调群不是平凡的。

2. 交叉模的基本概念与性质

定义 1. [7] 李代数的交叉模是指一个李代数同态 $\mu:\mathrm{m}\to\mathrm{n}$ 以及李代数 m 上的一个 n-模作用 η，其中 $\eta:\mathrm{n}\to Der\mathrm{m}$，对于任意 $n\in\mathrm{n}$， $m,m'\in\mathrm{m}$ 满足下面的关系式：

$$\mu(\eta(n)\cdot m)=[n,\mu(m)],$$

$$\eta(\mu(m)\cdot m')=[m,m'].$$

从李代数交叉模的定义中容易看出：在 m 上的一个 n-模作用 η 还需要满足如下关系式：

$$\eta([n,n'])\cdot m=\eta(n)\cdot(\eta(n')\cdot m)-\eta(n')\cdot(\eta(n)\cdot m),$$

$$\eta(n)\cdot[m,m']=[\eta(n)\cdot m,m']+[m,\eta(n)\cdot m'],$$

这里 $n,n'\in\mathrm{n}$， $m,m'\in\mathrm{m}$。

下面我们给出李代数交叉模的一个等价定义。

定义 2. [1] 令 R 和 L 是两个李代数，如果存在一个线性映射 $L\times R\to R$，$(x,r)\mapsto x.r$ 满足

$$[x,y].r=x.y.r-y.x.r \tag{1}$$

$$x.[r,r']=[x.r,r']+[r,x.r'] \tag{2}$$

这里 $x,y\in L$， $r,r'\in R$，那么这个映射叫做 L 在 R 上的作用，或者称 L 作用在 R 上。

对于 $n\in\mathrm{n}$， $m\in\mathrm{m}$，把 $\eta(n)\cdot m$ 简记为 $n.m$，那么李代数交叉模的定义就可以做如下叙述。

定义 3. [1] 令 R 和 L 是两个李代数，而且 L 作用在 R 上。如果存在一个李代数同态 $\partial:R\to L$ 满足

$$\partial(x.r)=[x,\partial(r)]; \tag{3}$$

$$\partial(r).r'=[r,r'], \tag{4}$$

这里 $x\in L$，$r,r'\in R$，那么一个三元组 (R,L,∂) 称为李代数 L 的交叉模，R 被称为一个交叉 L-模。

根据交叉模的定义，自然地我们可以获得如下的正合列：

$$0\to V\xrightarrow{\iota}R\xrightarrow{\partial}L\xrightarrow{\nu}P\to 0 \tag{5}$$

这里 $V\cong\ker\partial\lhd R$，$P\cong\operatorname{coker}\partial=L/\operatorname{Im}\partial$，那么三元组 (R,L,∂) 叫做一个带有核 V 和余核 P 的交叉模。

命题 1. [7]

i) 根据(3)式，显然 P 是一个李代数的正合列。因此，正合列(5)是一个李代数的正合列。

ii) 根据(4)式可知 V 属于李代数 R 的中心，即 $[V,R]=0$。特别地，V 是一个 Abel 李代数。

iii) L 在 R 上的作用包含了一个在 V 上的 P-模结构，*i.e.* $\bar{x}.m:=x.m$，这里 $m\in V$，$x\in L$，$\bar{x}\in P$，$\nu(x)=\bar{x}$。

对于一个李代数满同态 $\nu:L\to P$ 和一个 P-模 V，我们考虑所有带有核 V 和余核 P 的交叉模，记作正合列 $0\to V\to R\xrightarrow{\partial}L\xrightarrow{\nu}P\to 0$，这里 $V\cong\ker\partial$ 是一个 P 模同构，$P\cong\operatorname{coker}\partial$ 是李代数同构。

定义 4. [1] 两个交叉模 (R,L,∂) 和 (R',L,∂') 是等价的，如果存在一个李代数同态 $f:R\to R'$ 使得

i) 下面的图是交换的，

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & V & \to & R & \xrightarrow{\partial} & L & \to & P & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & V & \to & R' & \xrightarrow{\partial'} & L & \to & P & \to & 0
\end{array}$$

即

$$\partial' f=\partial;$$

$$f|_V=id_V.$$

ii) 李代数的同态 f 是相容的，即

$$f(\eta(x)\cdot r)=\eta'(x)\cdot f(r).$$

记 $CML(P,L,V)$ 为所有固定核 V 和余核 P 的交叉模等价类的集合。

3. 一类五维李代数的交叉模

从本小节开始，我们将讨论一类五维李代数 L 的交叉模，这里 $L=sl_2\oplus Cc_1\oplus Cc_2$，并满足 $[x_i,x_j]_L=[x_i,x_j]_{sl_2}$，$\forall x_i,x_j\in sl_2$，其中 c_1,c_2 是 L 的中心。以下均假设 P 是单李代数 sl_2，向量空间 V 是一个一维的 P-模。

引理 1. 假设 (R,L,∂) 是一个带有核 V 和余核 P 的交叉模，那么 $\dim R=3$。

证明：由于 (R,L,∂) 是一个带有核 V 和余核 P 的交叉模，那么自然存在一个正合列

$$0\to V\to R\xrightarrow{\partial}L\to P\to 0.$$

由此我们知道 $\dim R=\dim\ker\partial+\dim\operatorname{Im}\partial=\dim V+\dim L/P=3$.□

因为 $\dim V=1$，$\dim R=3$，以下均固定向量空间 V 的一组基为 $\{r_0\}$，向量空间 R 的一组基为 $\{r_0,r_1,r_2\}$。

引理 2. $\partial\neq 0$，$\partial(r_0)=0$。另外，$[r_0,r_1]=[r_0,r_2]=0$。

证明：如果 $\partial=0$，那么 $V=\ker\partial=R$，这是矛盾的。根据正合列 $0\to V\to R\xrightarrow{\partial}L\to P\to 0$，显然，$\partial(r_0)=0$。根据(4)式，有 $[r_0,r_1]=\partial(r_0).r_1=0$；$[r_0,r_2]=\partial(r_0).r_2=0$，即 $[r_0,r_1]=[r_0,r_2]=0$。□

引理 3. P 在 R 上的作用是平凡的，即 $P.R=0$。

证明：因为 R 是 L 的一个交叉模，那么 R 也是一个 P-模。由于 $P=sl_2$ 是一个单李代数，根据 Weyl

定理可知 R 是完全可约的，因此我们讨论下面三种情形。

情形 1：令 $R=V\oplus V_1\oplus V_2$，这里 $V=span_C\{r_0\}$，$V_1=span_C\{r_1\}$，$V_2=span_C\{r_2\}$ 是 sl_2 的一维子模。已知 sl_2 的每一个一维子模都是平凡的，那么 $P.V=0$，$P.V_1=0$，$P.V_2=0$，即 $P.R=0$。

情形 2：令 $R=V\oplus V_1$，这里 $V=span_C\{r_0\}$，$V_1=span_C\{r_1,r_2\}$ 是 sl_2 的不可约子模。

因为 V 是 sl_2 的一维子模，那么 $P.V=0$。

已知 sl_2 的二维子模 V_1 在同构意义下是唯一存在的。不失一般性，选取 r_1 作为 V_1 中的极大向量，那么 P 在 R 上的作用如下：

$$x.r_0=0;\ x.r_1=0;\ x.r_2=r_1;$$

$$y.r_0=0;\ y.r_1=r_2;\ y.r_2=0;$$

$$h.r_0=0;\ h.r_1=r_1;\ x.r_2=-r_2.$$

由于 $\partial(r_2)\in Cc_1\oplus Cc_2$，所以 $\partial(r_1)=\partial(x.r_2)=[x,\partial(r_2)]=0$。类似地，由于 $\partial(r_1)\in Cc_1\oplus Cc_2$，故 $\partial(r_2)=\partial(y.r_1)=[y,\partial(r_1)]=0$，因此 $\partial=0$，这与引理 2 矛盾。

情形 3：$R=\{r_0,r_1,r_2\}$ 是不可约的，那么 R 在同构意义下是唯一的，其模作用如下：

$$x.r_0=0;\ x.r_1=2r_0;\ x.r_2=r_1;$$

$$y.r_0=r_1;\ y.r_1=2r_2;\ y.r_2=0;$$

$$h.r_0=2r_0;\ h.r_1=0;\ h.r_2=-2r_2.$$

据此 $\partial(r_1)=\partial(x.r_2)=[x,\partial(r_2)]=0$；类似地，$\partial(2r_2)=\partial(y.r_1)=[y,\partial(r_1)]=0$，那么 $\partial(r_2)=0$，因此 $\partial=0$，这与引理 2 矛盾。

综上所述，P 在 R 上的作用是平凡的。□

沿用上面的记号，设

$$c_1.(r_0,r_1,r_2)=(r_0,r_1,r_2)M;$$
$$c_2.(r_0,r_1,r_2)=(r_0,r_1,r_2)N;$$
$$\partial(r_0,r_1,r_2)=(0,c_1,c_2)A,$$

这里 $M=(m_{ij})_{3\times3}$，$N=(n_{ij})_{3\times3}$，$A=(a_{ij})_{3\times3}$ 均为 3×3 的矩阵。由于 V 可看作 R 的一个 L 子模，所以可把 M、N、A 写成分块矩阵的形式

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & M_1\\ 0 & M_2\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} n_{11} & N_1\\ 0 & N_2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix},$$

其中 M_1，N_1 是 1×2 的矩阵，M_2，N_2，A_1 均为 2×2 的矩阵。

因为 $\partial\neq0$，所以 A 不为零矩阵，故 A_1 中至少有一个非零元。不失一般性，以下不妨设 $a_{22}\neq0$。

定理 1. 假设 $P=sl_2$，V 是一个一维 P-模，那么带有核 V 和余核 P 的交叉模 (R,L,∂) 模作用为如下两种情况：

当 $\det A_1\neq0$ 时，$P.R=0$，$M=-\dfrac{n_{12}}{a_{22}}\begin{pmatrix} 0 & a_{32} & a_{33}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$N=-\dfrac{n_{12}}{a_{22}}\begin{pmatrix} 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

当 $\det A_1=0$ 时，$P.R=0$，$M=-\dfrac{a_{32}}{a_{22}}N$，$N=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13}\\ 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}n_{32} & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}n_{33}\\ 0 & n_{32} & n_{33}\end{pmatrix}$，

这里 M，N， A_1 均为上述定义的矩阵。

证明：根据交叉模定义中的(3)式，我们有

$$0=\partial\left(c_1.\left(r_0,r_1,r_2\right)\right)=\partial\left(r_0,r_1,r_2\right)M=\left(0,c_1,c_2\right)AM\,,$$

从而可知 $AM=0$。同理，

$$0=\partial\left(c_2.\left(r_0,r_1,r_2\right)\right)=\partial\left(r_0,r_1,r_2\right)N=\left(0,c_1,c_2\right)AN\,,$$

可以推知 $AN=0$。另外，根据(4)式可推知，

$$\left(0,0,\left[r_1,r_2\right]\right)=\partial\left(r_1\right).\left(r_0,r_1,r_2\right)=\left(a_{22}c_1+a_{32}c_2\right).\left(r_0,r_1,r_2\right)=\left(r_0,r_1,r_2\right)\left(a_{22}M+a_{32}N\right),$$

所以 $\left(r_0,r_1,r_2\right)\left(a_{22}M+a_{32}N\right)=\left(0,0,\left[r_1,r_2\right]\right)$。类似地，

$$\left(0,-\left[r_1,r_2\right],0\right)=\partial\left(r_2\right).\left(r_0,r_1,r_2\right)=\left(a_{23}c_1+a_{33}c_2\right)\cdot\left(r_0,r_1,r_2\right)=\left(r_0,r_1,r_2\right)\left(a_{23}M+a_{33}N\right),$$

故而 $\left(r_0,r_1,r_2\right)\left(a_{23}M+a_{33}N\right)=\left(0,-\left[r_1,r_2\right],0\right)$。此外，(1)式可知，

$$0=\left[c_1,c_2\right]\left(r_0,r_1,r_2\right)=\left(r_0,r_1,r_2\right)\left(MN-NM\right),$$

由此可知， $MN=NM$ 。

若 $\det A_1\neq 0$，由分块矩阵的运算，则 $M_2=0$， $N_2=0$。经计算可得，

$$M=-\frac{n_{12}}{a_{22}}\begin{pmatrix}0 & a_{32} & a_{33}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad N=-\frac{n_{12}}{a_{22}}\begin{pmatrix}0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

此外，由于 $\partial\left(r_1\right).r_2=\left[r_1,r_2\right]$。故 $\left[r_1,r_2\right]=-\dfrac{n_{12}}{a_{22}}\left(\det A_1\right)r_0$。

若 $\det A_1=0$，经计算可得，

$$N=\begin{pmatrix}n_{11} & n_{12} & n_{13}\\ 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}n_{32} & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}n_{33}\\ 0 & n_{32} & n_{33}\end{pmatrix},\quad M=-\frac{a_{32}}{a_{22}}\begin{pmatrix}n_{11} & n_{12} & n_{13}\\ 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}n_{32} & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}n_{33}\\ 0 & n_{32} & n_{33}\end{pmatrix}=-\frac{a_{32}}{a_{22}}N\,,$$

此时，$\left[r_1,r_2\right]=0$，即 R 是一个交换的交叉模。□

接下来，我们将讨论上述交叉模的等价类。

假设存在 L 的另一个交叉模 $\left(R',L,\partial'\right)$，不妨设，

$$c_1.\left(r_0,r_1',r_2'\right)=\left(r_0,r_1',r_2'\right)M'\,;$$

$$c_2.\left(r_0,r_1',r_2'\right)=\left(r_0,r_1',r_2'\right)N'\,;$$

$$\partial'\left(r_0,r_1',r_2'\right)=\left(0,c_1,c_2\right)A'\,,$$

这里 $M'=\left(m_{ij}'\right)_{3\times3}$， $N'=\left(n_{ij}'\right)_{3\times3}$， $A'=\left(a_{ij}'\right)_{3\times3}$ 均为 3×3 的矩阵，可把他们写成分块矩阵的形式

$$M'=\begin{pmatrix}m_{11}' & M_1'\\ 0 & M_2'\end{pmatrix},\quad N'=\begin{pmatrix}n_{11}' & N_1'\\ 0 & N_2'\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A_1'\end{pmatrix},$$

其中 M_1'， N_1' 是 1×2 的矩阵， M_2'， N_2'， A_1' 均为 2×2 的矩阵。

如果两个交叉模 $\left(R,L,\partial\right)$ 和 $\left(R',L,\partial'\right)$ 是等价的，那么存在一个李代数同态 $f:R\to R'$ 满足 $\partial'f=\partial$ 且 $f|_V=id_V$。

以下均假设 B 是一个 3×3 的矩阵，使得 $f(r_0,r_1,r_2)=(r_0,r_1',r_2')B$。将 B 写成分块矩阵的形式为

$$B=\begin{pmatrix}1 & B_1\\ 0 & B_2\end{pmatrix},$$

其中 B_1 是 1×2 的矩阵， B_2 是 2×2 的矩阵。

一方面，$\partial' f(r_0,r_1,r_2)=\partial'(r_0,r_1',r_2')B=(0,c_1,c_2)A'B$；另一方面，$\partial(r_0,r_1,r_2)=(0,c_1,c_2)A$。由于 $\partial' f=\partial$，故而 $A=A'B$。

此外，$c_2.f(r_0,r_1,r_2)=c_2.(r_0,r_1',r_2')B=(r_0,r_1',r_2')N'B$，而 $f(c_2.(r_0,r_1,r_2))=(r_0,r_1',r_2')BN$。根据 f 的相容性可知， $c_2.f(r_0,r_1,r_2)=f(c_2.(r_0,r_1,r_2))$，所以 $N'B=BN$。同理可知， $M'B=BM$。

考虑到 f 是一个李代数同态，因此 $f([r_1,r_2])=[f(r_1),f(r_2)]$。

综上所述，我们得到如下结论。

定理 2. 两个交叉模 (R,L,∂) 和 (R',L,∂') 是等价的当且仅当

$$A=A'B,$$
$$N'B=BN,$$
$$M'B=BM,$$
$$f([r_1,r_2])=[f(r_1),f(r_2)],$$

这里 A， A'，B，N， N'，M， M' 均为上述定义的 3×3 矩阵。

对于前面定义的李代数的满同态 $v:L\to P$ 和 P-模 V，可以通过下面正合列定义复形 $C(P,L;V)$

$$0\to C(P,V)\xrightarrow{v^*}C(L,V)\xrightarrow{k^*}C(P,L;V)\to 0.$$

记复形 $C(P,L;V)$ 的相对上同调群为 $H^{n+1}(P,L;V)=\ker\delta^n/\mathrm{Im}\,\delta^{n-1}$。

由定理 1 可知， $CML(P,L;V)$ 是非平凡的，根据李代数的交叉模的等价类集与三阶相对上同调群之间是一一对应的[4]，从而有如下定理。

定理 3. 复形 $C(P,L;V)$ 的三阶相对上同调群 $H^3(P,L;V)\neq 0$。

致　谢

感谢张红莲教授和张姣老师的指导和帮助。

基金项目

国家自然科学基金(11871325)。

参考文献

[1] 王圣祥, 谭玉明. 四维李代数的交叉模和三阶上同调群[J]. 西安工程大学学报, 2009, 23(4): 146-149.

[2] Whitehead, J.H.C. (1949) Combinatorial Homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **55**, 453-496. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1949-09213-3

[3] Gerstenhaber, M. (1966) On the Deformation of Rings and Algebras: II. *Annals of Mathematics*, **84**, 1-19. https://doi.org/10.2307/1970528

[4] Kassel, C. and Loday, J.L. (1982) Extensions centrales d'algèbres de Lie. *Annales de l'institut Fourier* (*Grenoble*), **32**, 119-142. https://doi.org/10.5802/aif.896

[5] 王圣祥, 马先超. Virasoro 代数的交叉模[J]. 西安工程大学学报, 2008, 22(4): 510-512.

[6] 王圣祥, 周建华. 李代数的交叉模[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2009, 39(1): 185-190.

[7] Wagemann, F. (2006) On Lie Algebra Crossed Modules. *Communications in Algebra*, **34**, 1699-1722. https://doi.org/10.1080/00927870500542705

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org