Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 472-479
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93063

Oscillation of Certain Impulsive Partial Fractional Differential Equations with Several Delays

Zhuo Qu, Weijie Xu, Anping Liu*

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei
Email: *2253309572@qq.com

Received: May 6th, 2019; accepted: May 16th, 2019; published: May 28th, 2019

Abstract

In this paper, the oscillatory properties of a class of impulsive partial fractional differential equations with several delays subject to a class of boundary conditions are investigated. By using differential inequality method, some sufficient conditions for oscillation of the solutions are obtained and an example is given to illustrate the main results.

Keywords

Oscillation, Impulsive, Partial Fractional Differential Equations, Delays

一类带时滞的分数阶脉冲偏微分方程解的振动性质

屈　卓，徐伟杰，刘安平*

中国地质大学(武汉)数学与物理学院，湖北 武汉
Email: *2253309572@qq.com

收稿日期：2019年5月6日；录用日期：2019年5月16日；发布日期：2019年5月28日

摘　要

本文研究了在一类边界条件下具有多个时滞的分数阶脉冲偏微分方程解的振动性质。利用微分不等式方

*通讯作者。

文章引用：屈卓，徐伟杰，刘安平．一类带时滞的分数阶脉冲偏微分方程解的振动性质[J]．理论数学，2019，9(3): 472-479. DOI: 10.12677/pm.2019.93063

法，得到了解振动性的充分条件，并给出了一个实例来说明主要结果。

关键词

振动，脉冲，分数阶偏微分方程，时滞

1. 引言

随着微分方程理论的发展和完善，分数阶微分方程作为一个新兴的研究领域，越来越受各界重视。如在流体力学、粘弹性、类扩散的扩散运输、医学超声检测、电气工程、生物工程学、控制理论等众多领域[1] [2] [3]。

微分方程的振动性已经被广泛研究[4] [5] [6]。近年来，一些学者在许多论文中研究了各类分数阶常微分方程和分数偏微分方程解的振动性[7]-[12]。但是到目前为止，关于带脉冲的分数阶微分方程解的振动性质的研究尚且很少。最近，A. Raheem 和 Md. Maqbul 研究一类分数阶脉冲微分方程的解的振动性[13]。

本文的目的是研究如下一类具有多个时滞的中立型脉冲分数阶偏微分方程解的振动性：

$$\begin{cases} D_{+,t}^{\alpha}\left[u(t,x)-u(t-\tau,x)\right] \\ =a(t)h\left(u(t,x)\right)\Delta u(t,x)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)h_i\left(u\left(t-\tau_i(t),x\right)\right)\Delta u\left(t-\tau_i(t),x\right) \\ \quad -\sum_{j=1}^{n}q_j(t,x)\cdot f_j\left(\int_0^t (t-v)^{-\alpha}u(v,x)\,\mathrm{d}v\right)-g(t,x),\ t\neq t_k,(t,x)\in R_+\times\Omega\equiv G, \\ D_{+,t}^{\alpha}u\left(t_k^+,x\right)-D_{+,t}^{\alpha}u\left(t_k^-,x\right)=\sigma(t_k,x)D_{+,t}^{\alpha}u(t_k,x),\ t=t_k,k=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{1}$$

边界条件满足：

$$u(t,x)=0,(t,x)\in R_+\times\partial\Omega,t\neq t_k. \tag{2}$$

其中 $\alpha\in(0,1)$，且是常数，$D_{+,t}^{\alpha}$ 表示 Riemann-Liouville 正半轴分数阶微积分定义下函数 $u(t,x)$ 关于变量 t 的 α 阶微分，Ω 是在 R^n 上的有界域，其边界 $\partial\Omega$ 是光滑的，且 $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$，$R_+=(0,+\infty)$，$\Delta$ 为拉普拉斯算子，n 为边 $\partial\Omega$ 的外法线向量，$a(t),a_i(t),\tau_i(t)\in PC\left[R_+,R_+\right]$，且强迫项 $g(t,x)\in PC\left[R_+\times\bar{\Omega},R\right]$，$PC$ 表示以 $t=t_k$ 为第一类间断点且在该处左连续的分段连续函数类。并且假设 $t_\tau=t_k-\tau,\{t_\tau\}\subseteq\{t_k\}$，$\tau$ 为常数，$j=1,2,\cdots,n$。问题(1)与(2)的解 $u(t,x)$、$D_{+,t}^{\alpha}u(t,x)$ 是以 $t=t_k$ 为第一类间断点且在该处左连续的分段连续函数，$k=1,2,\cdots$。在这里，$0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$，$\lim_{k\to\infty}t_k=+\infty$。以下条件在脉冲点成立，$D_{+,t}^{\alpha}u\left(t_k^-,x\right)=D_{+,t}^{\alpha}u(t_k,x)$。

在本文中，我们总假设以下条件成立：

(H1)：$f_i:R\to R$ 为连续函数，且对常数 k_j，有 $f_i(u)/u\geq k_i>0$，且 $u\neq 0$；

(H2)：$q_j(t,x)\in PC\left[R_+\times\bar{\Omega},R_+\right]$，且满足 $q_j(t)=\min_{1\leq j\leq n}\min_{x\in\bar{\Omega}}q_j(t,x)$；

(H3)：$\sigma:R_+\times\bar{\Omega}\to R_+$，且满足 $\sigma(t_k,x)\leq\alpha_k$；

(H4)： $h(u)\in C(R,R); uh'(u)\geq 0$ 。

为了方便起见，我们记：

$$\begin{aligned}
&y(t)=\int_{\Omega}u(t,x)\mathrm{d}x,\\
&V(t)=\int_0^t(t-v)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v, \qquad (3)\\
&G(t)=\int_{\Omega}g(t,x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

2. 预备知识

定义 1 问题(1)与(2)的一个非零解 $u(t,x)$ 在区域 G 内是非振动的，如果存在一个常数 $\tau\geq 0$，使得在 $(t,x)\in[\tau,+\infty)\times\Omega$，始终有 $u(t,x)<0$ 或者 $u(t,x)>0$。否则称振动的。

定义 2 [2] 在 Riemann-Liouville 正半轴上的分数阶微分定义下，对于 $u(t,x)$ 关于变量 t 在正半轴上逐点定义的 α 阶微分表示如下：

$$D_{+,t}^{\alpha}u(t,x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t(t-v)^{-\alpha}u(v,x)\mathrm{d}v, t>0, \qquad (4)$$

其中 $\alpha\in(0,1)$，Γ 表示 gamma 函数，并定义为 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}s^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$。

引理 3 [1] 若函数 $V(t)$ 满足：

$$V(t)=\int_0^t(t-v)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v, t>0$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 为常数。那么 $V'(t)=\Gamma(1-\alpha)D_+^{\alpha}y(t)$。

引理 4 [4] 若如下问题的最小特征值 λ_0 为正：

$$\Delta w(x)+\lambda w(x)=0, x\in\Omega$$

$$w(x)=0,\text{或者}\frac{\partial w}{\partial x}+cw(x)=0, x\in\partial\Omega$$

其中 λ 是一常数。则相关的特征方程 $\phi(x)$ 在 $x\in\Omega$，也为正。

引理 5 [6] 假设以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
&\omega'(t)\leq g_1(t)\omega(t)+g_2(t), t\neq t_k, t\geq\mu,\\
&\omega(t_k^+)\leq(1+a_k)\omega(t_k), k=1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

其中， $0<t_1\cdots<t_k<\cdots$， $\lim\limits_{k\to\infty}=+\infty$； $\omega\in PC^1[R_+,R]$， $g_1,g_2\in[R_+,R]$， α_k 是常数。那么

$$\begin{aligned}
\omega(t)\leq{}&\omega(t_0)\prod_{t_0<t_l<t}(1+a_k)\exp\left(\int_{t_0}^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\\
&+\int_{t_0}^t\prod_{s<t_l<t}(1+a_k)\exp\left(\int_s^t g_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)g_2(s)\mathrm{d}s, t\geq\mu
\end{aligned}$$

3. 主要结果及证明

定理 3.1 假设条件(H1)~(H4)成立，如果分数阶脉冲微分不等式

$$D_{+,t}^{\alpha}y(t)-D_{+,t}^{\alpha}y(t-\tau)+\sum_{j=1}^n k_jq_j(t)V(t)\leq -G(t), \qquad (7)$$

$$V(t_k^+)-V(t_k^+-\tau)\leq(1+\alpha_k)\big(V(t_k)-V(t_k-\tau)\big), k=1,2,\cdots, \qquad (8)$$

没有最终正解，并且分数阶脉冲微分不等式

$$D_{+,t}^{\alpha}y(t)-D_{+,t}^{\alpha}y(t-\tau)+\sum_{j=1}^{n}k_jq_j(t)V(t)\geq -G(t), \tag{9}$$

$$V(t_k^+)-V(t_k^+-\tau)\geq(1+\alpha_k)(V(t_k)-V(t_k-\tau)),k=1,2,\cdots, \tag{10}$$

没有最终负解，那么问题(1)与(2)的每一个非零解 $u(t,x)$ 在 G 内都是振动的。

证明：(用反证法)假设 $u(t,x)$ 是问题(1)与(2)的一个非振动解。不失一般性，我们假设 $u(t,x)$ 是问题(1)与(2)的最终正解，即存在 $\mu>0$，当 $(t,x)\in[\mu,+\infty)\times\Omega$，使 $u(t,x)>0$，$u(t-\tau_i(t),x)>0$。

(I) 当 $t\neq t_k$，对(1)的第一个方程，两边同时对 x 在有界域 Ω 上积分得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}D_{+,t}^{\alpha}\left[u(t,x)-u(t-\tau,x)\right]\mathrm{d}x\\&=a(t)\int_{\Omega}h(u(t,x))\Delta u(t,x)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}a_i(t)h_i(u(t-\tau_i(t),x))\Delta u(t-\tau_i(t),x)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}q_j(t,x)\cdot f_j\left(\int_0^t(t-v)^{-\alpha}u(v,x)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}g(t,x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{11}$$

根据 Green 公式，结合边界条件(2)和假设(H4)得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}h(u)\Delta u(t,x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\partial\Omega}h(u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}h'(u)|gradu|^2\mathrm{d}x\\&=\int_{\partial\Omega}h(u)w(t,x,u)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}h'(u)|gradu|^2\mathrm{d}x\leq 0\end{aligned} \tag{12}$$

$$h_i(u(t-\tau_i(t),x))\Delta u(t-\tau_i(t),x)\mathrm{d}x\leq 0. \tag{13}$$

根据条件(H1)和(H2)得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}q_j(t,x)\cdot f_j\left(\int_0^t(t-v)u(v,x)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}x\\&\geq\sum_{j=1}^{n}k_jq_j(t)\int_0^t(t-v)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v\\&=\sum_{j=1}^{n}k_jq_j(t)V(t),t\geq\mu.\end{aligned} \tag{14}$$

结合(11)~(14)可得：

$$D_{+,t}^{\alpha}y(t)-D_{+,t}^{\alpha}y(t-\tau)+\sum_{j=1}^{n}k_jq_j(t)V(t)\leq -G(t), \tag{15}$$

(II) 当 $t=t_k$，对(1)的第二个方程，两边同时对 x 在有界域 Ω 上积分

$$\int_{\Omega}u(t_k^+,x)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}u(t_k^-,x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\sigma(t_k,x,u(t_k,x))\mathrm{d}x \tag{16}$$

即得到

$$y(t_k^+)=y(t_k)\int_{\Omega}(1+\sigma(t_k,x,u(t_k,x)))\mathrm{d}x \tag{17}$$

根据引理 3，并由(16)可知

$$y\left(t_k^+\right)=y\left(t_k\right)\int_\Omega\left(1+\sigma\left(t_k,x,u\left(v,x\right)\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}vV\left(t_k\right) \tag{18}$$

类似地，由式(17)可知

$$V\left(t_k^+-\tau\right)=\int_0^{t_k^+}\left(t_k^+-v_2\right)^{-\alpha}\int_\Omega\left(1+\sigma\left(v,x,u\left(v,x\right)\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}vV\left(t_k-\tau\right) \tag{19}$$

结合(18)~(19)，并根据条件(H3)，有

$$V\left(t_k^+\right)-V\left(t_k^+-\tau\right)\le\left(1+\alpha_k\right)\left(V\left(t_k\right)-V\left(t_k-\tau\right)\right) \tag{20}$$

因此，由脉冲微分不等式(15)与(20)可知，函数 $U\left(t\right)=\int_\Omega u\left(t,x\right)\mathrm{d}x$ 是分数阶脉冲微分不等式(7)~(8)的最终正解。与假设条件相矛盾。

另一方面，如果 $u\left(t,x\right)$ 是问题(1)与(2)在 G 内的最终负解，由相似的的方法，可知函数 $U\left(t\right)=\int_\Omega u\left(t,x\right)\mathrm{d}x$ 是分数阶脉冲微分不等式(9)~(10)的最终负解。与假设条件相矛盾。证毕。

定理 3.2 假设条件(H1)~(H4)成立，如果存在 $\mu_2\ge0$，满足

$$\int_{\mu_2}^{\infty}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}r\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s=\infty, \tag{21}$$

其中，$r\left(t\right)=\Gamma\left(1-\alpha\right)\sum_{j=1}^{n}k_jq_j\left(t\right)$，$j=1,2,\cdots,n$，存在 $\mu_1\ge0$，满足

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_{\mu_1}^{t}\prod_{s<t_l<t}\left(1+\alpha_k\right)\exp\left(-\int_s^t r\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)G\left(s\right)\mathrm{d}s}{\prod_{\mu_1<t_l<t}\left(1+\alpha_k\right)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t}r\left(s\right)\right)\mathrm{d}s}=\infty, \tag{22}$$

并且

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_{\mu_1}^{t}\prod_{s<t_l<t}\left(1+\alpha_k\right)\exp\left(-\int_s^t r\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)G\left(s\right)\mathrm{d}s}{\prod_{\mu_1<t_l<t}\left(1+\alpha_k\right)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t}r\left(s\right)\right)\mathrm{d}s}=-\infty, \tag{23}$$

那么，问题(1)与(2)的每个解在 G 内是振动的。

证明(反证法)：证明该定理，先证明分数阶脉冲微分不等式(7)~(8)没有最终正解且分数阶脉冲微分不等式(9)~(10)没有最终负解。不失一般性，假设 $y\left(t\right)$ 是分数阶脉冲微分不等式(7)~(8)的最终正解，那么存在 $\mu_1\ge0$，使得 $y\left(t\right)\ge0$，$y\left(t-\tau\right)\ge0$，$t\ge\mu_1$。

由式(7)和引理 3，可得：

$$\left[V\left(t\right)-V\left(t-\tau\right)\right]'+\Gamma\left(1-\alpha\right)\sum_{j=1}^{n}k_jq_jV\left(t\right)\le-\Gamma\left(1-\alpha\right)G\left(t\right)\le0,\ t\ge\mu. \tag{24}$$

在这里，令

$$\omega\left(t\right)=V\left(t\right)-V\left(t-\tau\right) \tag{25}$$

把(25)代入(24)，有

$$\omega'+\Gamma\left(1-\alpha\right)\sum_{j=1}^{n}k_jq_jV\left(t\right)\le-\Gamma\left(1-\alpha\right)G\left(t\right)\le0,\ t\ge\mu. \tag{26}$$

即有

$$\omega' + \Gamma(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} k_j q_j \left(V(t) - V(t-\tau)\right) \le -\Gamma(1-\alpha)G(t) \le 0,\ t \ge \mu.$$

所以有

$$\omega(t)' + \Gamma(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} k_j q_j \omega(t) \le -\Gamma(1-\alpha)G(t) \le 0,\ t \ge \mu.$$

对任意 $j \in 1,2,\cdots,n$ ，有

$$\omega(t)' + \Gamma(1-\alpha)k_j q_j \omega(t) \le -\Gamma(1-\alpha)G(t) \le 0,\ t \ge \mu. \tag{27}$$

由脉冲微分不等式(20)，结合上述式子，有

$$\begin{aligned} &\omega(t)' \le -\Gamma(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} k_j q_j \omega(t) - \Gamma(1-\alpha)G(t) \le 0,\ t \ge \mu, t \ne t_k, \\ &\omega(t_k^+) \le (1+\alpha_k)\omega(t_k),\ \ j = 1,2,\cdots \end{aligned}$$

由引理 5，可得

$$\begin{aligned} \omega(t) \le\ & \omega(\mu_1)\prod_{\mu_1 < t_l < t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ & -\int_{\mu_1}^{t}\prod_{s < t_l < t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{s}^{t} r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\Gamma(1-\alpha)G(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{28}$$

所以

$$\begin{aligned} &\frac{\omega(t)}{\prod_{\mu_1 < t_l < t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s\right)} \\ &\le \omega(\mu_1) - \frac{\int_{\mu_1}^{t}\prod_{s < t_l < t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{s}^{t} r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\Gamma(1-\alpha)G(s)\,\mathrm{d}s}{\prod_{\mu_1 < t_l < t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s\right)}, \end{aligned}$$

当 $t \to \infty$ ，根据条件(22)，由上式可得

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\omega(t)}{\prod_{\mu_1 < t_l < t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t} r(s)\right)\mathrm{d}s} = -\infty.$$

这与 $\omega(t) > 0$ 矛盾。证毕。

另一方面，由类似方法，当 $t \to \infty$ ，根据条件(23)，由上式可得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\tilde{\omega}(t)}{\prod_{\mu_1 < t_l < t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t} r(s)\right)\mathrm{d}s} = \infty.$$

证毕。

4. 举例

假设条件(H1)~(H4)成立，考虑如下多时滞的分数阶脉冲偏微分方程

$$
\begin{cases}
D_{+,t}^{\frac{3}{4}}\left[u(t,x)-u(t-\pi,x)\right]=\mathrm{e}^t u^2(t,x)\Delta u(t,x)+\dfrac{t^2}{2}u^2\left(t-\dfrac{1}{2},x\right)\Delta u\left(t-\dfrac{1}{2},x\right) \\
-\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(x^2+\dfrac{1}{t}\right)\int_0^t (t-v)^{-\alpha}u(v,x)\mathrm{d}v-t\cos x,\ t\neq t_k,(t,x)\in R_+\times\Omega=G, \\
u\left(t_k^+,x\right)-u\left(t_k^-,x\right)=\sigma(t_k,x)u(t_k,x),\ t=t_k,k=1,2,\cdots,
\end{cases}
\tag{29}
$$

边界条件满足：

$$
u(t,x)=0,(t,x)\in R_+\times\partial\Omega,t\neq t_k. \tag{30}
$$

其中，

$$
\alpha=\frac{3}{4},\Omega=\left(0,\frac{5\pi}{2}\right),m=n=1,a(t)=\mathrm{e}^{-t},a_1(t)=\frac{\mathrm{e}^t}{2},h(u)=h_i(u)=u^2,
$$

$$
\delta_1=\frac{2\pi}{3},\tau=\pi,\tau_1=\frac{1}{2},q_1(t,x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(x^2+\frac{1}{t}\right),f_1(v)=v,
$$

$$
k_1=1,m(t,x)=t\cos x,M(t)=t,\sigma(t_k,x)=t_k^{-3}\cos x,\alpha_k=t_k^{-3},r(t)=\frac{1}{t}.
$$

显然可得

$$
\int_{\mu_2}^{\infty}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}r(\rho)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}s=\int_{\mu_2}^{\infty}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}s=\int_{\mu_2}^{\infty}\frac{t_0}{t}\mathrm{d}t=\infty,
$$

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_{\mu_1}^{t}\prod_{s<t_l<t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_s^t r(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\Gamma(1-\alpha)M(s)\mathrm{d}s}{\prod_{\mu_1<t_l<t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t}r(s)\right)\mathrm{d}s}=\infty,
$$

且有

$$
\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_{\mu_1}^{t}\prod_{s<t_l<t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_s^t r(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\Gamma(1-\alpha)M(s)\mathrm{d}s}{\prod_{\mu_1<t_l<t}(1+\alpha_k)\exp\left(-\int_{\mu_1}^{t}r(s)\right)\mathrm{d}s}=-\infty.
$$

因此，满足定理 3.2 的所有条件。故问题(29)~(30)的解为振动解。

参考文献

[1] Miller, K.S. and Ross, B. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley Sons, New York.

[2] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science BV, Amsterdam.

[3] Zhou, Y. (2014) Basic Theory of Fractional Differential Equations. World Scientific, Singapore.

[4] Liu, A.P. and He, M.X. (2002) Oscillatory Properties of the Solutions of Nonlinear Delay Hyperbolic Differential Equations of Neutral Type. *Applied Mathematics and Mechanics*, **23**, 678-685. https://doi.org/10.1007/bf02437652

[5] Cui, B.T. and Han, M.A. (2008) Oscillation Theorems for Nonlinear Hyperbolic Systems with Impulses. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **9**, 94-102. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2006.08.010

[6] Liu, A.P., Liu, T. and Zou, M. (2011) Oscillation of Nonlinear Impulsive Parabolic Differential Equations of Neutral Type. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **41**, 833-850. https://doi.org/10.1216/rmj-2011-41-3-833

[7] Chen, D.X. (2012) Oscillation Criteria of Fractional Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, No. 1, 33.

[8] Feng, Q.H. and Meng, F.W. (2013) Oscillation of Solutions to Nonlinear Forced Fractional Differential Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 169, 1471-1484.

[9] Grace, S.R., Agarwal, R.P., Wong, J.Y. and Zafer, A. (2012) On the Oscillation of Fractional Differential Equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **15**, 222-231. https://doi.org/10.2478/s13540-012-0016-1

[10] Li, W.N. (2016) Oscillation Results for Certain Forced Fractional Difference Equations with Damping Term. *Advances in Difference Equations*, **70**, 1-9. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0798-2

[11] Xiong, Y.F., Zhu, S.Y. and Liu, A.P. (2017) On the Forced Oscillation of Fractional Delay Partial Differential Equations. *Journal of Biomathematics*, **32**, 304-310.

[12] 马玉剑, 熊永福, 刘安平. 一类带有阻尼项的非线性分数阶偏微分方程解的振动性[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 157-161.

[13] Raheem, A. and Maqbul, M. (2017) Oscillation Criteria for Impulsive Partial Fractional Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **73**, 1781-1788. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.02.016