Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 336-343
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93045

Hans汉斯

The Possibility of the Problem on Generalized Metric Space

—Space M_1 Equivalent to Space M_3

Jiaming Luo

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan
Email: luojiaming332@163.com

Received: Apr. 24th, 2019; accepted: May 4th, 2019; published: May 20th, 2019

Abstract

This paper tries to prove the equivalence of stratifiable spaces in the problem on generalized metric space. The definitions and properties of finite basis and regularity in metric space are studied. The regular space with σ local finite basis is obtained. In addition, the method of building space is obtained by using the Nagata-Smirnov Metrization Theorem to weaken the σ local finite basis to the closure keep basis. A method of constructing a topological space and establishing a continuous mapping is used here. The space M_1 is equal to the space M_3. In this way, three kinds of spatial equivalent problems in generalized metric space are solved.

Keywords

Metric Space, Stratifiable Space, Regular Space, Open Set, Closure

广义度量空间问题成立的可能性

——M_1空间等价于M_3空间

罗嘉铭

河南科技大学数学与统计学院，河南 洛阳
Email: luojiaming332@163.com

收稿日期：2019年4月24日；录用日期：2019年5月4日；发布日期：2019年5月20日

摘 要

本文尝试证明广义度量空间问题中层空间等价的问题。通过研究可度量空间中有关有限基和正则性

文章引用: 罗嘉铭. 广义度量空间问题成立的可能性[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 336-343.
DOI: 10.12677/pm.2019.93045

的定义和性质，得到了具有 σ 局部有限基的正则空间，再通过Nagata-Smirnov度量化定理将 σ 局部有限基弱化为闭包保持基就得到了关于构造层空间的方法，这里利用构造拓扑空间和建立连续映射的方法，证明了所构造空间 M_1 与 M_3 等价，从而解决了广义度量空间中所构造的三种层空间相互等价的问题。

关键词

度量空间，层空间，正则空间，开集，闭包

1. 引言

众所周知，早在 1961 年 J. G. Ceder 就证明了 $M_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_3$，同时他提出问题：$M_2 \Rightarrow M_1$ 和 $M_3 \Rightarrow M_2$ 是否成立？[1] G. Gruenhage 和 H. J. K. Junnila 分别于 1976 年和 1978 年独立证明了 M_3 空间和 M_2 空间是等价的，但 $M_2 \Rightarrow M_1$ 或 $M_3 \Rightarrow M_1$ 是否成立，是至今没有解决的难题[1]。这里通过对这一问题的研究，利用层对应的方法尝试证明 M_1 与 M_3 等价的可能性。文中符号：1) $\sim$：等价于；2) $\bigcup$：并集；3) $\bigcap$：交集；4) $\bar{E}$：E 的闭包；5) $A-B$：A 与 B 的差集。

2. M_1 与 M_3 等价的证明过程

2.1. 引入紧缩映射 Φ，Φ 具有如下性质

对于任意拓扑空间 S 有 $\Phi: S \to \Phi(S)$（为便利记 $\Phi(S) = H_S$），满足 $H_S \subset S$ 是子空间。那么对任意的拓扑空间 A 和 B 有 $H_A \subset A$、$H_B \subset B$，并且满足以下两种情形：

1) 若 $A \bigcap B = \varnothing$，显然 $H_A \bigcap H_B = \varnothing$；

2) 若 $A \bigcap B \neq \varnothing$，必有 $H_A \bigcap H_B = \varnothing$。

同理容易推广到可数个拓扑空间 $T_1, T_2, \cdots$，无论 $\bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ 是否为 $\varnothing$，都有 $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_{T_i} = \varnothing$，这是交集的情况，接下来需要考虑并集的情况。

对任意两个拓扑空间 A 和 B，若 $A \bigcap B = \varnothing$，由于 $H_A \bigcup (A - H_A) = A$、$H_B \bigcup (B - H_B) = B$，所以有 $H_A \bigcup H_B \bigcup G = A \bigcup B$，其中 $G = (A - H_A) \bigcup (B - H_B)$；若 $A \bigcap B \neq \varnothing$，不妨设 $A \bigcap B = E$，则可能存在四种关系：

1) $H_A \bigcap E \neq \varnothing$，$H_B \bigcap E \neq \varnothing$；

2) $H_A \bigcap E = \varnothing$，$H_B \bigcap E \neq \varnothing$；

3) $H_A \bigcap E \neq \varnothing$，$H_B \bigcap E = \varnothing$；

4) $H_A \bigcap E = \varnothing$，$H_B \bigcap E = \varnothing$。

然而不论哪种关系，由于 $H_A \bigcup H_B \subset A \bigcup B$，都可归结为 $H_A \bigcup H_B \bigcup E \bigcup E' = A \bigcup B$，其中令 $F = E \bigcup E'$，仍然是 $H_A \bigcup H_B \bigcup F = A \bigcup B$，显然 $H_A \bigcup H_B \subset A \bigcup B$。同理可容易将 $H_A \bigcup H_B \subset A \bigcup B$ 推广到可数个拓扑空间 $T_1, T_2, \cdots$，即 $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_{T_i} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$，因此可以找到 $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ 的子空间 T 使得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_{T_i} \bigcup T = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ 成立。

2.2. 紧缩映射的性质的进一步讨论

根据前面的定义，对任意的拓扑空间 S，$\Phi: S \to H_S$，其中 H_S 是 S 的子空间，那么对于任意的开集 $V \subset H_S$，由相关定义[2]，存在一个基元素 $B \in \mathcal{B}$，这里 $\mathcal{B}$ 是 H_S 的拓扑的基，满足对于一点 $x \in V$，有 $x \in B$ 且 $B \subset V$。因为 $\mathcal{B}$ 是 H_S 的拓扑的基，根据基的定义[2]，对每一个 $x \in H_S$，至少存在一个包含 x 的基元素 B，由 Φ 的定义，则 $x \in B \subset \Phi^{-1}(B)$，且 $\Phi^{-1}(B) \subset H_S$，所以 $x \in \Phi^{-1}(B)$，$\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{B} \subset \Phi^{-1}(\mathcal{B})$，因而有 $x \in \Phi^{-1}(B)$，$\Phi^{-1}(B) \in \Phi^{-1}(\mathcal{B})$。

仍考虑基的定义，若 $x \in B_1 \cap B_2$，则有 $x \in B_3$ 使得 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$，这里 $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$。那么由 Φ 的定义，因为 $x \in B_1 \cap B_2$，所以知 $x \in B_1$、$x \in B_2$，因而 $x \in B_1 \subset \Phi^{-1}(B_1)$，$x \in B_2 \subset \Phi^{-1}(B_2)$，所以 $x \in \Phi^{-1}(B_1) \cap \Phi^{-1}(B_2)$。因为存在 $x \in B_3$ 使 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$，所以 $x \in B_3 \subset \Phi^{-1}(B_3)$，即 $x \in \Phi^{-1}(B_3)$，而由 $B_3 \subset B_1$、$B_3 \subset B_2$，显然有 $\Phi^{-1}(B_3) \subset \Phi^{-1}(B_2)$，$\Phi^{-1}(B_3) \subset \Phi^{-1}(B_1)$，即 $\Phi^{-1}(B_3) \subset \Phi^{-1}(B_1) \cap \Phi^{-1}(B_2)$。可以考虑利用之前的关系，即 $\Phi^{-1}(B) \in \Phi^{-1}(\mathcal{B})$，显然就有关系 $\Phi^{-1}(B_1), \Phi^{-1}(B_2), \Phi^{-1}(B_3) \in \Phi^{-1}(\mathcal{B})$。

综上所述，$\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ 是 S 的拓扑的基，所以对于一点 $x \in V \subset \Phi^{-1}(V)$，有 $x \in B \subset \Phi^{-1}(B)$，因为 $B \subset V$，所以 $\Phi^{-1}(B) \subset \Phi^{-1}(V)$，其中已知 $\Phi^{-1}(B) \in \Phi^{-1}(\mathcal{B})$ 是基元素，所以 $\Phi^{-1}(V) \subset S$ 是开集。所以 Φ 是连续的，又因为 Φ 是满射，因此 Φ 是开映射。同理容易证 Φ^{-1} 将 H_S 中的闭集映为 S 中的闭集，所以 Φ 又是闭映射(这与 Φ 的连续性无关)，因此可知 Φ 是既开又闭的映射。

考虑任意正则空间 X，根据相关定义[2]，知有任意给定的一点 x 和不包含 x 的闭集 B，存在开集 U 和 V，使得 $x \in U$，$B \subset V$ 且 $U \cap V = \varnothing$。由 Φ 的定义，知 $\Phi(X) \subset X = \{x\} \cup B$，若任意给定 $\Phi(X)$ 中的一点 y 和不包含 y 的闭集 C，使 $\Phi(X) = \{y\} \cup C$，都有 $C \subset B \subset V$，同样可以找到一个开集 U' 包含 y 使得 $U' \cap V = \varnothing$，所以 $\Phi(X)$ 也是正则空间。再由 Nagata-Smirnov 度量化定理[2]，将 σ 局部有限基弱化为闭包保持基就得到了 M_1 空间，但 M_1 空间并不能作为一般的度量空间来考虑，因此不存在与 M_1 的拓扑相容的度量 d [3]，因此只能考虑广义度量空间的拓扑结构。由因为 Φ 是既开又闭的映射，所以根据相关理论[1] [4]，$\Phi(M_1) = H_{M_1}$ 可能是 M_1 空间(这需要在下文进行论证，并且与 H_{M_3} 是 M_3 空间的论证有关)，这一点与将交集关系转化并集关系的思路成为解决后面问题的重要想法。

3. 层空间对应关系的讨论

3.1. 证明 H_{M_1} 空间是 M_1 空间

在上述定义的映射 Φ 的作用下，重点讨论 H_{M_1}：

这里取点 $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \cdots, \lambda_{n1} \in T_1; \cdots; \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \cdots, \lambda_{nn} \in T_n$，其中 $n = 1, 2, \cdots$。

因此可定义邻域为：
$$\begin{matrix} \lambda_{11} \in W_{11}, \cdots, \lambda_{n1} \in W_{n1} \subset T_1 \\ \vdots \\ \lambda_{1n} \in W_{1n}, \cdots, \lambda_{nn} \in W_{nn} \subset T_n \end{matrix},$$

其中 $n = 1, 2, \cdots$，引入空间 H_{M_1} 中的基 $\mathcal{A}$，且 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots$，这里 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots$ 是 $\mathcal{A}$ 的子族。所以就有

$$T_{11} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{i11} \cup \mathcal{A}_1, \cdots, T_{1n} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{i1n} \cup \mathcal{A}_1; \cdots; T_{nn} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{inn} \cup \mathcal{A}_n.$$

当 $\bigcap_{i,k}^{\infty} T_{ik} = \mathcal{A}_k$ 时，$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i2}\right) \cup \cdots = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2, \cdots$ 显然成立。

则对于 $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \subset N_1, N_2, \cdots$，当 $\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu$ 时，就有 $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i2}\right) \cup \cdots = \bigcap_{j=1}^{\infty} N_j$。下面考虑

一种更复杂的情况：

不妨设 $\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i1} = Q_1 \cup \mathcal{A}_1, \bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i2} = Q_2 \cup \mathcal{A}_2, \cdots$。这里的情况不包含上面的情形，即对于任何 T_{mt}、T_{lt} 有 $T_{lt} \cap T_{mt} = V_t \cup \mathcal{A}_t$，或 $\bigcap_{s=v}^{u} T_{st} = L_t \cup \mathcal{A}_t$，则有 $Q_t \subset V_t, L_t$，其中 $1 \le t, m, l, v, u \le \infty$。且对于任意的

$$T_{it} = \{T_{it} - (Q_t \cup \mathcal{A}_t)\} \cup (Q_t \cup \mathcal{A}_t) = \bigcup_{g=1}^{\infty} K_g \cup \mathcal{A}_t .$$

这里若对于集合 K_p，$p = 1,2,\cdots$，考虑 $\mathring{K}_p \subset K_p$，$p = 1,2,\cdots$，就构成了以下的常规形式，同样地，$\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P$，若要满足

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i2}\right) \cup \cdots = \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} N_j = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P$$

需证 $P = \bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e$，下面分三种情形讨论。

情形 1：

$N_j \cap T_{i1} = \mathcal{A}_1, N_j \cap T_{i2} = \mathcal{A}_2, \cdots$，其中 $i, j = 1,2,\cdots$

$$\Rightarrow \bigcup_{i,j,\Sigma} \left(N_j \cap T_{i\Sigma}\right) = \bigcup_{\phi=1}^{\infty} \mathcal{A}_\phi \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\right) \cap \left(\bigcup_{i,\Sigma} T_{i\Sigma}\right) = \bigcup_{\phi=1}^{\infty} \mathcal{A}_\phi .$$

因为 $\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P$，所以 $\bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$。因为

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_{i2}\right) \cup \cdots = \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right),$$

所以 $\left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right) \subset \bigcup_{i,\Sigma} T_{i\Sigma}$。所以

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\right) \cap \left(\bigcup_{i,\Sigma} T_{i\Sigma}\right) &= \left\{\left(\bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P\right) \cup \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j - \left(\bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P\right)\right]\right\} \\
&\quad \cap \left\{\left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right) \cup \left[\bigcup_{i,\Sigma} T_{i\Sigma} - \left[\left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right)\right]\right]\right\} \\
&= \left\{\left(\bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P\right) \cap \left[\left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right)\right]\right\} \\
&\quad \cup \left\{\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j - \left(\bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P\right)\right] \cap \left[\bigcup_{i,\Sigma} T_{i\Sigma} - \left[\left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right)\right]\right]\right\} \\
&= \left\{\left(\bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu \cup P\right) \cap \left[\left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \cup \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} \mathcal{A}_e\right)\right]\right\} \cup \varnothing \\
&= \bigcup_{\phi=1}^{\infty} \mathcal{A}_\phi = \bigcup_{f=1}^{\infty} \mathcal{A}_f \cup \left[P \cap \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right)\right]
\end{aligned}, \tag{1}$$

所以得 $P \cap \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) = \varnothing$，所以当 $P = \bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e = \varnothing$ 时可满足条件，或 $P \cap \left(\bigcup_{e=1}^{\infty} Q_e\right) \subset \bigcup_{\phi=1}^{\infty} \mathcal{A}_\phi$。

猜测：是否可能有 $\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi \subseteq P$，$\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi \subset \bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e$ ？

若成立则总有

$\left\{P_i-\left(\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi\right)\right\}\cap\left\{\left(\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\right)-\left(\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi\right)\right\}\subset\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi$，同样地，也可能出现例如 $\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi\subset P$，$\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\subset\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi$，如此则总有 $\bigcup_{f=1}^{\infty}\mathcal{A}_f\cup\left\{P-\left(\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi\right)\right\}=\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi\Rightarrow P-\left(\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi\right)=\varnothing\Rightarrow P\subset\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi$。

所以只需 $P=\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\subset\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi$ 就可成立。

情形 2:

当 $N_j\cap T_{i1}=\mathcal{A}_1\cup\mathcal{B}_1,N_j\cap T_{i2}=\mathcal{A}_2\cup\mathcal{B}_2,\cdots$ 时，可由(1)式得到

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}N_j\right)\cap\left(\bigcup_{i,\Sigma}^{\infty}T_{i\Sigma}\right)=\bigcup_{f=1}^{\infty}\mathcal{A}_f\cup\left[P\cap\left(\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\right)\right]=\left(\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{A}_\phi\right)\cup\left(\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{B}_\phi\right),$$

所以 $P\cap\left(\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\right)=\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{B}_\phi$，因为 $\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{B}_\phi\subset P,\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e$，所以这里可直接令 $P=\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e=\bigcup_{\phi=1}^{\infty}\mathcal{B}_\phi$，即条件可成立。

情形 3:

当 $N_j\cap T_{i1}=T_{i1},N_j\cap T_{i2}=T_{i2},\cdots$ 时，仍然由(1)式可得：

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}N_j\right)\cap\left(\bigcup_{i,\Sigma}^{\infty}T_{i\Sigma}\right)=\bigcup_{f=1}^{\infty}\mathcal{A}_f\cup\left[P\cap\left(\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\right)\right]=\bigcup_{i,\Sigma}^{\infty}T_{i\Sigma};$$

当 $P\cap\left(\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\right)=\varnothing$ 时，即 $\bigcup_{f=1}^{\infty}\mathcal{A}_f\cup\varnothing=\bigcup_{f=1}^{\infty}\mathcal{A}_f=\bigcup_{i,\Sigma}^{\infty}T_{i\Sigma}$ 与之前所假设情况的其中之一符合，所以显然成立；当 $P\cap\left(\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\right)=Z\neq\varnothing$ 时，得 $\bigcup_{f=1}^{\infty}\mathcal{A}_f\cup Z=\bigcup_{i,\Sigma}^{\infty}T_{i\Sigma}$ 也同样如此。因此不论 $P\cap\left(\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e\right)$ 的情况如何，都有 $P=\bigcup_{e=1}^{\infty}Q_e$ 成立。所以式子 $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i2}\right)\cup\cdots=\bigcap_{j=1}^{\infty}N_j$ 得证。所以经映射 Φ 作用后所得到的空间 H_{M_1} 的确是 M_1 空间。

3.2. 证明 H_{M_3} 空间是 M_3 空间

在映射 Φ 的作用下可设 $C=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k1}\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k2}\right)\cap\cdots$，其中 C 为闭集，$E_1,\cdots,E_n$ 为开集，所以有

$$E_1\subset U_{11},U_{21},\cdots;\cdots;E_n\subset U_{1n},U_{2n},\cdots.$$

由 M_3 空间的定义可类似地对 H_{M_3} 就有，对于另一闭集 D，$G_1,G_2,\cdots$ 为开集，所以可设

$$E_1\cup E_1'=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k1},E_2\cup E_2'=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k2},\cdots.$$

因为 $G_1\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta1},G_2\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta2},\cdots$，所以 $G_1\cup G_1'=\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta1},G_2\cup G_2'\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta2},\cdots$。因此令

$$\begin{aligned}C&=(E_1\cup E_1')\cap(E_2\cup E_2')\cap\cdots=(E_1\cap E_2\cap\cdots)\cup(E_1'\cap E_2'\cap\cdots)\\&=\left(\bigcap_{c=1}^{\infty}E_c\right)\cup\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}E_d'\right)=C'\cup\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}E_d'\right)\end{aligned},$$

$$D=(G_1\cup G_1')\cap(G_2\cup G_2')\cap\cdots=\left(\bigcap_{a=1}^{\infty}G_a\right)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}G_b'\right)=D'\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}G_b'\right)$$

当 $C=D$ 时，就有 $D-\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}G_b'\right)=C-\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}E_d'\right)$，当 $(E_i-C)\cup\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}E_d'\right)\subset(G_j-D)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}G_b'\right)$ 时，H_{M_3} 是广义度量空间。

当 $C\subset D$ 时，设 $D=C\cup\Pi$，所以 $D-\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}G_b'\right)=\left[C-\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}E_d'\right)\right]\cup\Pi$，所以当

$$\left\{E_i-\left[C-\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}E_d'\right)\right]\right\}-\Pi\subset(G_j-D)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}G_b'\right)$$

即 $(E_i-C)\cup\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}E_d'\right)\subset(G_j-D)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}G_b'\right)\cup\Pi$ 时 H_{M_3} 是广义度量空间。

以上证明了 $G(n,C)\subset G(n,D)$ 成立的可能性。反过来，若知 $G(n,C)\subset G(n,D)$，则有两闭集 C、D 可分别表示为两个开集系列中开集的闭包的交。

设 C,D 为闭集，$E_1,E_2,\cdots$ 和 $G_1,G_2,\cdots$ 为开集并且

$$E_1\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k1},E_2\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k2},\cdots,\quad G_1\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta1},G_2\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta2},\cdots.$$

再设 $E_1\cup K_1=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k1},E_2\cup K_2=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k2},\cdots$，$G_1\cup L_1=\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta1},G_2\cup L_2=\bigcap_{\delta=1}^{\infty}F_{\delta2},\cdots$。所以

$$D=(G_1\cup L_1)\cap(G_2\cup L_2)\cap\cdots=\left(\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_\delta\right)\cup\left(\bigcap_{\lambda=1}^{\infty}L_\lambda\right)$$

$$C=(E_1\cup K_1)\cap(E_2\cup K_2)\cap\cdots=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)\cup\left(\bigcap_{\mu=1}^{\infty}K_\mu\right).$$

因为已知 $G(n,C)\subset G(n,D)$，所以可有 $E_i\cup J_s=G_j$ 其中 $i,j,s=1,2,\cdots$，所以

$$D=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)\cup\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}J_s\right)\cup\left(\bigcap_{\lambda=1}^{\infty}L_\lambda\right)=\left\{C-\left(\bigcap_{\mu=1}^{\infty}K_\mu\right)\right\}\cup\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}J_s\right)\cup\left(\bigcap_{\lambda=1}^{\infty}L_\lambda\right).$$

根据上面的讨论结果可知：

当 $\bigcap_{s=1}^{\infty}J_s=\varnothing$，$\bigcap_{\mu=1}^{\infty}K_\mu\subset\bigcap_{\lambda=1}^{\infty}L_\lambda$ 时有 $C\subset D$ 成立。

当 $\bigcap_{s=1}^{\infty}J_s\neq\varnothing$，$\bigcap_{\mu=1}^{\infty}K_\mu\subset\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}J_s\right)\cup\left(\bigcap_{\lambda=1}^{\infty}L_\lambda\right)$ 时有 $C\subset D$ 成立。

因此以上证明了反之条件成立的可能性，所以空间 H_{M_3} 满足广义度量空间 M_3 中的条件，因此 H_{M_3} 空间的确是 M_3 空间。

3.3. 讨论 $H_{M_1}\sim H_{M_3}$ 的成立性

关于此问题需证明：在 H_{M_1} 的闭包保持基条件下还可能满足 H_{M_3} 中的条件，反之，在 H_{M_3} 的条件下仍有 H_{M_1} 的闭包保持基条件，两者必须同时成立。

讨论 1：

设 $C,E\subset\mathcal{A}\subset H_{M_1}$，$C,E$ 都是闭集，$\mathcal{A}$ 为保持基，若 $E=\left(\bigcup_{t=1}^{\infty}W_t\right)\cap C$，其中 $W_1,W_2,\cdots$，C,E 都是闭

集，且 E 满足 $E=\bar{E}$，令 $C=J_1\cup J_2\cup\cdots$。因为由保持基的条件就有

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i2}\right)\cup\cdots=\bigcap_{j=1}^{\infty}S_j \tag{2}$$

$$\text{其中 } W_1\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i1},W_2\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i2},\cdots \text{ 和 } \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i2}\right)\cup\cdots=\bigcap_{j=1}^{\infty}L_j\text{。} \tag{3}$$

将式(2)和(3)求 $\cap$ 就有

$$\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i2}\right)\cup\cdots\right\}\cap\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i2}\right)\cup\cdots\right\}=\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}S_j\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}L_j\right)=\bigcap_{\theta=1}^{\infty}\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i\theta}\right)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i\theta}\right)\right\}$$

因为令 $W_1\cup G_1=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i1},W_2\cup G_2=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_{i2},\cdots$，其中 $G_1,G_2,\cdots$ 为开集；和

$$J_1\cup Z_1=\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i1},J_2\cup Z_2=\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i2},\cdots,$$

其中 $Z_1,Z_2,\cdots$ 为开集。所以得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\bigcup_{i=1}^{n}(W_i\cap G_i)\right]\cup\left[\bigcup_{i=1}^{n}(J_i\cap Z_i)\right]\right\}=\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}S_j\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}L_j\right). \tag{4}$$

这里再令 $P_i=W_i\cap G_i$，$Q_i=J_i\cap Z_i$，P_i 是闭集，Q_i 是开集，其中 $i=1,2,\cdots$，且

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i1}=P_1\cup Q_1,\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i2}=P_2\cup Q_2,\cdots$$

所以 $Q_1\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i1},Q_2\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i2},\cdots$。即 $\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i1},\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i2},\cdots$ 是一系列开集 $Q_1,Q_2,\cdots$ 的闭包，代入式(4)得 $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i1}\right)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i2}\right)\cap\cdots=\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}S_j\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}L_j\right)=\bigcap_{j=1}^{\infty}N_j$。因为由 $E=\bar{E}$，所以 $E=\bigcap_{j=1}^{\infty}N_j$，所以即有

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i1}\right)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_{i2}\right)\cap\cdots=E,$$

因此以上就证明了任一闭集 E 可由一系列开集 $Q_1,\cdots,Q_n$ 的闭包的交表示。

当任意两个闭集 C,D 有 $C\subset D$ 时，若 $C=D$ 可易知 $G(n,C)\subset G(n,D)$；若 $C\subset D$ 时可设 $C\cup Q=D$，就有开集 $E_1\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta1},E_2\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta2},\cdots$ 和 $F_1\subset\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}I_{\varepsilon1},F_2\subset\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}I_{\varepsilon2},\cdots$。

再设 $E_1\cup E_1'=\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta1},E_2\cup E_2'=\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta2},\cdots$ 和 $F_1\cup F_1'=\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}I_{\varepsilon1},F_2\cup F_2'=\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}I_{\varepsilon2},\cdots$。

因为 $D=\left(\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta1}\right)\cap\left(\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta2}\right)\cap\cdots=(E_1\cup E_1')\cap(E_2\cup E_2')\cap\cdots=\left(\bigcap_{a=1}^{\infty}E_a\right)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}E_b'\right)$ 且

$C=\left(\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}I_{\varepsilon1}\right)\cap\left(\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}I_{\varepsilon2}\right)\cap\cdots=\left(\bigcap_{c=1}^{\infty}F_c\right)\cup\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}F_d'\right)$，所以 $\left(\bigcap_{c=1}^{\infty}F_c\right)\cup\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}F_d'\right)\cup Q=\left(\bigcap_{a=1}^{\infty}E_a\right)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}E_b'\right)$。

因此容易得出 $F_i\subset E_j$ 其中 $i,j=1,2,\cdots$，所以 $G(n,C)\subset G(n,D)$ 成立。

讨论 2：

设 $C,D\subset H_{M_3}$ 且 $C\subset D$，C,D 都是闭集，若 $C=D=\bigcup_{t=1}^{\infty}V_t$，且有一闭集可表示为开集的闭包的交，

即有 $C=\bigcap_{k,l}^{\infty}U_{kl}=D=\bigcup_{t=1}^{\infty}V_t$。当 $V_1=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{i1},V_2=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{i2},\cdots$ 时，E_{i1} 为 $V_1=W_{11}\cup W_{21}\cup\cdots$ 中 W_{i1} 的闭包，……，E_{in} 为 $V_n=W_{1n}\cup W_{2n}\cup\cdots$ 中 W_{in} 的闭包，……。所以

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{i1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{i2}\right)\cup\cdots=\bigcup_{t=1}^{\infty}V_t=D=C=\bigcap_{k,l}^{\infty}U_{kl},$$

所以满足闭包保持基条件。

若 $C\subset D$，设 $D=C\cup Q=\bigcup_{t=1}^{\infty}V_t\cup Q$，$C,D$ 是闭集，且有 $D=\bigcap_{\delta,\theta}^{\infty}G_{\delta\theta}$，$C=\bigcap_{p,q}^{\infty}L_{pq}$。因为 $G(n,C)\subset G(n,D)$，所以有 $M_1\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta1},M_2\subset\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta2},\cdots$ 和 $N_1\subset\bigcap_{p=1}^{\infty}L_{p1},N_2\subset\bigcap_{p=1}^{\infty}L_{p2},\cdots$ 所以设 $N_i\cup P=M_j$ 其中 $i,j=1,2,\cdots$，同样也有 $M_1\cup M_1'=\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta1},M_2\cup M_2'=\bigcap_{\delta=1}^{\infty}G_{\delta2},\cdots$ 和 $N_1\cup N_1'=\bigcap_{p=1}^{\infty}L_{p1},N_2\cup N_2'=\bigcap_{p=1}^{\infty}L_{p2},\cdots$ 所以

$$D=\bigcap_{\delta,\theta}^{\infty}G_{\delta\theta}=(M_1\cup M_1')\cap(M_2\cup M_2')\cap\cdots=\left(\bigcap_{a=1}^{\infty}M_a\right)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}M_b'\right)=\left(\bigcap_{a=1}^{\infty}N_a\right)\cup\left(\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}P_\varepsilon\right)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}M_b'\right)$$

$$C=\bigcap_{p,q}^{\infty}L_{pq}=(N_1\cup N_1')\cap(N_2\cup N_2')\cap\cdots=\left(\bigcap_{c=1}^{\infty}N_c\right)\cup\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}N_d'\right)$$

所以

$$Q=D-C=\left\{\left(\bigcap_{\varepsilon=1}^{\infty}P_\varepsilon\right)\cup\left(\bigcap_{b=1}^{\infty}M_b'\right)\right\}-\left(\bigcap_{d=1}^{\infty}N_d'\right)\neq\varnothing.$$

由此可知，$C=\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{i1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{i2}\right)\cup\cdots=\bigcap_{k,l}^{\infty}U_{kl}$ 满足保持基条件，所以 $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{in}\right)\cup Q'=\bigcap_{k,l}^{\infty}T_{kl}$，其中 $Q'=\bar{Q}$，$\bigcup_{t=1}^{\infty}V_t\cup Q\subset\bigcap_{k,l}^{\infty}T_{kl}$，同样满足闭包保持基条件。

4. 总结

以上就证明了 $H_{M_1}\sim H_{M_3}$ 成立的可能性，现在由已知的关于 Φ 的定义和正则空间的结构有 $H_{M_1}\sim M_1$ 和 $H_{M_3}\sim M_3$，很自然就能够得到 $M_1\sim M_3$ 成立，通过与 Reznichenko 构造反例的结论对比[5] [6]，即每个 M_3 空间都是 M_1 空间。

参考文献

[1] “10000 个科学难题”数学编委会. 10000 个科学难题·数学卷[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 211-212.

[2] James R. Munkres. 拓扑学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.

[3] 儿玉之宏, 永见启应. 拓扑空间论[M]. 北京: 科学出版社, 1984.

[4] 高国士. 拓扑空间论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[5] Anderson, R.D., *et al.* (2002) Recent Progress in General Topology. North-Holland, Amsterdam, 545-575.

[6] Gartside, P.M. and Reznichenko, E.A. (2000) Near Metric Properties of Function Spaces. *Fundamenta Mathematicae*, **164**, 97-114.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询