Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 448-457
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93060

Hans汉斯

Atomic Decomposition of Bekolle-Bonami Weighted Bergman Spaces in the Unit Ball

Han Zhang, Cezhong Tong

Department of Mathematics, Hebei University of Technology, Tianjin
Email: zhanghan2018@sina.com, ctong@hebut.edu.cn

Received: Apr. 29th, 2019; accepted: May 9th, 2019; published: May 24th, 2019

Abstract

On the unit ball in the dimensional complex Euclidean space, we investigate the atomic decomposition of the weighted Bergman spaces with Bekolle-Bonami weights. We modify the Luecking's atomic decomposition theorem by the reproducing kernel functions.

Keywords

Bergman Space, Bekolle-Bonami Weight, Atomic Decomposition, Reproducing Kernel

单位球上Bekolle-Bonami加权Bergman空间的原子分解

张　晗，仝策中

河北工业大学数学系，天津
Email: zhanghan2018@sina.com, ctong@hebut.edu.cn

收稿日期：2019年4月29日；录用日期：2019年5月9日；发布日期：2019年5月24日

摘　要

本文研究了单位球上的Bekolle-Bonami型加权Bergman空间上的原子分解定理。本文利用了Bekolle-Bonami型加权Bergman空间中的再生核函数给出该加权Bergman空间的原子分解定理，这推广了Luecking在文献[1]中的原子分解定理。

文章引用: 张晗, 仝策中. 单位球上 Bekolle-Bonami 加权 Bergman 空间的原子分解[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 448-457.
DOI: 10.12677/pm.2019.93060

关键词

Bergman空间，Bekolle-Bonami权，原子分解，再生核

1. 引言

由于多复变函数与单复变函数的本质不同，多复变函数的 Bergman 空间理论从上世纪 70 年代以来一直都是函数论中的热点专题。1970 年以前随着人们对于调和分析的研究热潮以及复分析自身发展的要求，国内外学者主要集中于研究 Hardy 空间及 BMOA 空间。随后由于表示论、算子理论的发展，标准的加权 Bergman 空间得到了广泛的关注，所涉及的诸如零点集、不变子空间、Toeplitz 算子、Carleson 测度、原子分解、插值等问题长期以来是国内外学者重点关注的问题[2] [3]。同时，Muckenhoupt 权和加权不等式作为 Fourier 分析中的重要问题，自上世纪 70 年代引入以来不断发展。1978 年，Bekolle 和 Bonami 从实变量调和分析理论中，在复变量条件下引进了所谓的类似 Muckenhoupt 权的“Bekolle-Bonami 条件”的权函数，他们证明了在加权 Bergman 空间 $A^2(u)$ 上的 Bergman 投影的有界性等价于权函数 u 满足 Bekolle-Bonami 条件[4] [5]。1985 年 Luecking 研究了 Bekolle-Bonami 型加权 Bergman 空间的原子分解定理，并给出了该加权 Bergman 空间的对偶空间[1]。2010 年 Constantin 证明了单位圆盘上 Bekolle-Bonami 型加权 Bergman 空间上的 Carleson 嵌入定理[6]。

近年来 Hytonen 等人利用现代调和分析技巧——二元分析及稀疏算子控制，取得了一系列丰富的结果。2013 年 Chacon 研究了单位圆盘上的 Bekolle-Bonami 型加权 Bergman 空间上的原子分解定理和 Toeplitz 算子[7]。2013 年 Pott 和 Reguera 利用二元分析和稀疏算子研究了上半平面上的 Bekolle-Bonami 型加权 Bergman 空间上的 Bergman 投影的范数[8]。之后 2017 年，Rham、Tchoundja、Wick 研究了单位球上的 Berezin 变换、Bergman 投影等积分算子的算子范数[9]。本文在复 n 维空间的单位球上利用加权 Bergman 空间 $A^2(u)$ 的再生核改进 Luecking 的原子分解定理。

2. 主要引理

本文用 C 表示复数域。对于正整数 n，用 C^n 表示 n 维复 Euclidean 空间，即

$$C^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n):z_j\in C;j=1,2,\cdots,n\}.$$

记 C^n 中的两个点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 和 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 距离为

$$|z-w|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|z_j-w_j|^2}.$$

用 B_n 来表示 C^n 中的开单位球，即

$$B_n=\{z\in C^n:|z|<1\}.$$

如果记 $z_j=x_j+iy_j$，其中 x_j，y_j 分别为复数 z_j 的实部和虚部，我们用 $\mathrm{d}V$ 来表示 B_n 上的 Lebesgue 测度，即

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}x_n\mathrm{d}y_n .$$

记 $\mathrm{d}v$ 为 B_n 上单位化的 Lebesgue 测度，即对于 C^n 中的可测集 E，有

$$\int_E \mathrm{d}v = \frac{\int_E \mathrm{d}V}{\int_{B_n} \mathrm{d}V} .$$

本文考虑的权函数 $u(z)$ 是 B_n 上的非负可测函数，并且 $\int_{B_n} u\mathrm{d}v < \infty$。当 $p \ge 1$ 时，单位球 B_n 上的加权 p 次可积函数空间 $L^p(u)$ 定义如下：

$$\left\{ f\text{可测}: \|f\|_{L^p(u)} := \left(\int_{B_n} |f(z)|^p u(z)\mathrm{d}v(z) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

易知 $L^p(u)$ 按范数 $\|\cdot\|_{L^p(u)}$ 构成一个 Banach 空间。当权函数 $u \equiv 1$ 时，$L^p(1)$ 为单位球上经典的 p 次可积函数空间 $L^p(B_n)$。本文用 $H(B_n)$ 表示 B_n 上全体全纯函数所构成的函数空间。定义单位球上的加权 Bergman 空间如下：

$$A^2(u) = L^2(u) \cap H(B_n).$$

当权函数 $u \equiv 1$ 时，$A^2(1)$ 为单位球上的经典不加权 Bergman 空间，即为 $A^2(B_n)$。

如果 $f, g \in A^2(B_n)$，记

$$\langle f, g \rangle_{A^2} = \int_{B_n} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}v(z).$$

易知范数 $\|f\|_{A^2}^2 = \langle f, f \rangle_{A^2}$，且 $A^2(B_n)$ 是以 $\langle \cdot,\cdot \rangle_{A^2}$ 为内积构成的一个 Hilbert 空间。

对于非零点 $a \in B_n$，记 C^n 中由 a 生成的子空间为 $[a] = \{\lambda a : \lambda \in C^n\}$。设 P_a 是从 C^n 到 $[a]$ 上的正交投影，即

$$P_a(z) = \frac{\langle z, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a .$$

对于任意的 $z \in B_n$，约定 $P_0(z) = 0$。令 $Q_a(z) = z - P_a(z)$，它是从 C^n 到 $[a]$ 的正交补上的正交投影。设 $s_a = \left(1 - |a|^2\right)^{1/2}$，记单位球 B_n 上的对合自同构为

$$\Phi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - \langle z, a \rangle} .$$

映射 Φ_a 是 B_n 到自身的一个双全纯映射，满足以下 4 条性质：

1) $\Phi_a(0) = a, \Phi_a(a) = 0$;

2) $\Phi_a(\Phi_a(z)) = z$;

3) $1 - |\Phi_a(z)|^2 = \dfrac{\left(1 - |a|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2}$;

4) $1 - \langle \Phi_a(z), \Phi_a(w) \rangle = \dfrac{(1 - \langle a, a \rangle)(1 - \langle z, w \rangle)}{(1 - \langle z, a \rangle)(1 - \langle a, w \rangle)}$.

伪双曲度量函数 $\rho : B_n \times B_n \to [0,1)$ 定义为

$$\rho(z, w) = |\Phi_z(w)|,$$

记以 a 为心 $r>0$ 为半径的伪双曲球为

$$\mathrm{B}_{\rho}(a,r)=\{z\in B_n:\rho(z,a)<r\},$$

单位球 B_n 上的 Bergman 度量函数 $\beta:B_n\times B_n\to[0,\infty)$ 可以用对合自同构定义如下

$$\beta(z,w)=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\Phi_z(w)|}{1-|\Phi_z(w)|}.$$

记以 z 为心 $r>0$ 为半径的 Bergman 度量球为

$$\mathrm{B}_{\beta}(z,r)=\{w\in B_n:\beta(z,w)<r\}.$$

对于非零的 $z\in B_n$，定义 Carleson 帐篷 T_z 为

$$\left\{w\in B_n:\left|1-\frac{\langle z,w\rangle}{|z|}\right|<1-|z|\right\},$$

其中 $\langle z,w\rangle=\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{w_j}$。我们规定在 0 处的 Carleson 帐篷为 $T_0=B_n$。

定义 2.1.对于非负函数 $u\in L^1(B_n)$，如果存在 $C>0$，使得

$$[u]_{\mathrm{B}_2}:=\sup_{z\in B_n}\frac{\int_{T_z}u\mathrm{d}v}{\int_{T_z}\mathrm{d}v}\cdot\frac{\int_{T_z}u^{-1}\mathrm{d}v}{\int_{T_z}\mathrm{d}v}<C,$$

则称 u 满足 Bekolle-Bonami 条件 B_2，此时可以简记为 $u\in\mathrm{B}_2$。

定义 2.2. 对于非负函数 $u\in L^1(B_n)$，如果存在 $C>0$，使得

$$[u]_{\mathrm{C}_2}:=\sup_{a\in B_n,r>0}\frac{\int_{\mathrm{B}_{\beta}(a,r)}u\mathrm{d}v}{\int_{\mathrm{B}_{\beta}(a,r)}\mathrm{d}v}\cdot\frac{\int_{\mathrm{B}_{\beta}(a,r)}u^{-1}\mathrm{d}v}{\int_{\mathrm{B}_{\beta}(a,r)}\mathrm{d}v}<C,$$

则称 u 满足 C_2 条件，此时可以简记为 $u\in\mathrm{C}_2$。

Luecking 在[1]中第 322 页证明了 B_2 权一定为 C_2 权。

以下结论 Luecking 在文献[1]中的定理 2。1 给出证明，这是我们证明本篇文章的主要工具。

定理 2.3. 设 $u\in L^1(B_n)$ 为 B_2 权函数，则加权 Bergman 空间 $A^2(u)$ 的对偶空间等距同构于加权 Bergman 空间 $A^2(u^{-1})$。相应的配对关系由

$$\langle f,g\rangle_{A^2}=\int_{B_n}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}v(z)$$

给出，其中 $f\in A^2(u)$，$g\in A^2(u^{-1})$。

设 $E\subset B_n$ 为可测集，u 是权函数，本文为了简洁，记 $u(E)=\int_E u\mathrm{d}v$，另外记 $\mathrm{vol}(E)=\int_E\mathrm{d}v$。本文中用 C 表示绝对常数，每次表示的具体值可以不一样。下面的结论在本文中会反复用到，证明请参考文献[2]中的推论 2.21。

引理 2.4. 设 $s,t,r>0$ 为三个常数，则存在常数 $C>0$，当 $\beta(z,w)<r$ 时，有

$$C^{-1}\le\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{B}_{\beta}(z,t))}{\mathrm{vol}(\mathrm{B}_{\beta}(w,s))}\le C.$$

引理 2.5. 设 u 满足 C_2 条件，$r>0$，$t,s\in(0,1)$。如果 $z,w\in B_n$，满足 $\beta(z,w)<r$，则存在两个与 z，w 无关的常数 $c,C>0$，使得

$$cu\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)\le u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)\le Cu\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right).$$

证明。如果 $\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\subset\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)$ 时，有 $u\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)^{1/2}\le u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)^{1/2}$。因为 $u\in\mathrm{C}_2$，所以

$$u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)^{1/2}\le C\frac{\mathrm{vol}\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)}{u^{-1}\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)^{1/2}},\tag{2.1}$$

根据包含关系 $\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\subset\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)$，有 $u^{-1}\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)\le u^{-1}\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)$。再根据 Holder 不等式

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)&=\int_{\mathrm{B}_\beta(z,t)}\mathrm{d}v=\int_{\mathrm{B}_\beta(z,t)}u^{1/2}\cdot u^{-1/2}\mathrm{d}v\le\left(\int_{\mathrm{B}_\beta(z,t)}u\mathrm{d}v\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\mathrm{B}_\beta(z,t)}u^{-1}\mathrm{d}v\right)^{1/2}\\&=u\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)^{1/2}\cdot u^{-1}\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)^{1/2}\end{aligned}$$

得

$$\frac{1}{u^{-1}\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)^{1/2}}\le\frac{u\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)^{1/2}}{\mathrm{vol}\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)}.\tag{2.2}$$

结合不等式(2.1)，得

$$u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)^{1/2}\le C\frac{\mathrm{vol}\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)}{\mathrm{vol}\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)}u\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)^{1/2}.$$

根据引理 2.4，可得

$$u\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)^{1/2}\le u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)^{1/2}\le Cu\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)^{1/2}.$$

当 $\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\supset\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)$ 时，同样可得所需结论。下面假设二者互相包含关系均不成立。根据条件 $r>0$，$t,s\in\left(0,1\right)$，再根据 Bergman 度量函数的三角不等式易知 $\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\subset\mathrm{B}_\beta\left(w,t+r\right)$。由上面的证明，可得

$$u\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)\le u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,t+r\right)\right)\le Cu\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right).$$

同理可得

$$u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)\le u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,t+r\right)\right)\le Cu\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right).$$

所以

$$cu\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right)\le u\left(\mathrm{B}_\beta\left(w,s\right)\right)\le Cu\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,t\right)\right).$$

以下结论由 Luecking 给出证明，参考文献[1]中引理 3.1。

引理 2.6. 如果 $0<r<1$，$u\in\mathrm{C}_2$，则存在与 $z\in B_n$ 无关的常数 $C>0$，对于 $\forall f\in A^2\left(u\right)$，使得

$$\left|f\left(z\right)\right|^2\le\frac{C}{u\left(\mathrm{B}_\beta\left(z,r\right)\right)}\int_{\mathrm{B}_\beta(z,r)}\left|f\left(w\right)\right|^2u\left(w\right)\mathrm{d}v\left(w\right).$$

对于固定的 $z\in B_n$，定义 $A^2\left(u\right)$ 上的泛函 L_z 为 $L_z\left(f\right)=f\left(z\right)$，其中 $f\in A^2\left(u\right)$，称这个泛函 L_z 为点赋值泛函。根据上述引理可知加权 Bergman 空间 $A^2\left(u\right)$ 上的点赋值泛函的有界性。

推论 2.7. 对于任意的 $z\in B_n$，$u\in\mathrm{C}_2$，点赋值泛函 L_z 是 $A^2\left(u\right)$ 上的有界线性泛函。

证明：根据引理 2.6，有

$$\left|f(z)\right|^2 \le \frac{C}{u\left(\mathrm{B}_\beta(z,r)\right)}\int_{\mathrm{B}_\beta(z,r)}\left|f(w)\right|^2 u(w)\mathrm{d}v(w) \le \frac{C\|f\|_{A^2(u)}^2}{u\left(\mathrm{B}_\beta(z,r)\right)}.$$

记 H 是一个 Hilbert 空间，用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ 表示它的内积。如果集合 $A\subset H$， 记 $A^\perp$ 为 A 的垂直空间，即

$$A^\perp=\left\{y\in H:\langle y,x\rangle=0,\forall x\in A\right\}.$$

我们需要著名的 Riesz 表示定理(详见文献[10])，如下：

Riesz 表示定理。设 H 是 Hilbert 空间，H^* 是其对偶空间，则对于任意 $f\in H^*$，存在唯一一个 $z_f\in H$，使得

$$f(x)=\left(x,z_f\right),\quad \forall x\in H,$$

并且

$$\|f\|_{H^*}=\|z_f\|_H$$

由推论 2.7，对于任意 $a\in B_n$，点赋值泛函 L_a 为内积空间 $A^2(u)$ 上的有界线性泛函，再根据 Riesz 表示定理，存在一个函数 $K_u(\cdot,a)\in A^2(u)$，使得对于任意的 $f\in A^2(u)$ 有

$$\left\langle f,K_u(\cdot,a)\right\rangle_{A^2(u)}=f(a). \tag{2.3}$$

我们称函数 $K_u(\cdot,a)$ 是 $A^2(u)$ 中的再生核。

推论 2.8. 设 u 满足 C_2 条件，集合 $\left\{K_u(\cdot,w):w\in B_n\right\}$ 在 $A^2(u)$ 中稠密。

证明：我们只需证 $\left\{K_u(\cdot,a):a\in B_n\right\}^\perp=0$。对于任意的 $f\in K_u(\cdot,a)^\perp$，由垂直空间定义我们得到对于任意 $a\in B_n$，$\left\langle f,K_u(\cdot,a)\right\rangle=0$，由再生核的定义(2.3)知 $f(a)=0$，所以 $f=0$。

引理 2.9. (文献[2]定理 2.23)。存在一个正整数 N，使得对任意 $0<r\le1$，都存在 B_n 中的一个序列 $\{a_k\}$，满足以下三条性质：

1) $B_n=\bigcup_k \mathrm{B}_\beta(a_k,r)$；

2) 对于任意 $k\ne j$， $\mathrm{B}_\beta(a_k,r/4)\cap\mathrm{B}_\beta(a_j,r/4)=\phi$；

3) 对于每个点 $z\in B_n$ 在集族 $\left\{\mathrm{B}_\beta(a_k,2r):k=1,2,\cdots\right\}$ 中至多存在 N 个 $\mathrm{B}_\beta(a_k,2r)$ 包含 z。

满足上述引理条件的序列 $\{a_k\}$ 被称为 B_n 的一个 r-格。

引理 2.10. (文献[1]定理 3.12)。设 u 是满足 C_2 条件的权函数，$\{a_k\}$ 是 B_n 中的一个序列，满足 $\inf\left\{\rho(a_k,a_j):k\ne j\right\}=\varepsilon>0$，那么存在一个常数 $C_0>0$，使得对于任意的 $f\in L^2(u)$，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|f(a_k)\right|^2 u\left(\mathrm{B}_\beta(a_k,r)\right)\le C_0\|f\|_{L^2(u)}$$

成立。

引理 2.11. (文献[1]定理 3.14)。设 u 是一个 C_2 权函数，常数 $\varepsilon>0$，$0<r<1$，则存在 $\delta>0$，对于 B_n 中满足以下性质的序列 $\{a_k\}$：

$$\mathrm{vol}\left[\bigcup_k \mathrm{B}_\beta(a_k,\delta)\cap\mathrm{B}_\beta(a,r)\right]\ge\varepsilon\,\mathrm{vol}\left[\mathrm{B}_\beta(a,r)\right],\quad \forall a\in B_n$$

存在一个常数 C，使得对于所有 $f\in L^2(u)$，

$$\|f\|_{L^2(u)}^2 \le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|f(a_k)\right|^2 u\left(\mathrm{B}_\beta(a_k,r)\right)$$

成立。

3. 主要结论

下面证明本文的主要定理。

定理 3.1. 设 $u\in \mathrm{B}_2$，则存在一个 r-格 $\{a_n\}\subset B_n$，对于每个 $f\in A^2(u)$，存在 $c_n\in \ell^2$，使得对于任意 $z\in B_n$，

$$f(z)=\sum_n c_n K_u(z,a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2}$$

成立。

证明：首先根据引理 2.11 我们可以找到一个 r-格 $\{a_n\}$ 和常数 $C_0>0$，使得

$$\|f\|_{A^2(u)}^2 \le C_0\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(a_n)\right|^2 u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right). \tag{3.1}$$

定义一个从 $A^2(u)$ 到 ℓ^2 的算子 R 如下，对于任意的 $f\in A^2(u)$：

$$Rf:=\left(f(a_1)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_1,r)\right)^{1/2},\cdots,f(a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2},\cdots\right).$$

下面证明 R 是线性的。对于任意 f_1,f_2，

$$\begin{aligned}
&R(f_1+f_2)\\
&=\left(\left[f_1(a_1)+f_2(a_1)\right]u\left(\mathrm{B}_\beta(a_1,r)\right)^{1/2},\cdots,\left[f_1(a_n)+f_2(a_n)\right]u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2},\cdots\right)\\
&=\left(f_1(a_1)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_1,r)\right)^{1/2},\cdots,f_1(a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2},\cdots\right)\\
&\quad+\left(f_2(a_1)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_1,r)\right)^{1/2},\cdots,f_2(a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2},\cdots\right)\\
&=Rf_1+Rf_2
\end{aligned}$$

对于任意 $f\in A^2(u)$，存在常数 α，使得

$$R(\alpha f)=\alpha\left(f(a_1)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_1,r)\right)^{1/2},\cdots,f(a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2},\cdots\right)=\alpha Rf.$$

那么由引理 2.10 我们得到

$$\|Rf\|_{\ell^2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(a_n)\right|^2 u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)\le C\|f\|_{A^2(u)}^2.$$

则 R 为从 $A^2(u)$ 到 ℓ^2 的有界线性算子。

下面证明 R 有闭值域。设 $f_n\in A^2(u)$，且 Rf_n 收敛于 g。根据柯西收敛准则，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n,m>N$ 时，有 $\|Rf_n-Rf_m\|<\dfrac{\varepsilon}{C_0}$。根据不等式(3.1)，可得

$$\|f_n-f_m\|\le C_0\|Rf_n-Rf_m\|<\varepsilon.$$

因此 $\{f_n\}$ 是 $A^2(u)$ 中的柯西列，所以它在 $A^2(u)$ 中收敛，即存在 $f_0\in A^2(u)$，使得函数列 $\{f_n\}$ 依 $A^2(u)$ 的范数收敛到 f_0。又因为

$$\|Rf_0-g\|=\|Rf_0-Rf_n+Rf_n-g\|\le\|Rf_0-Rf_n\|+\|Rf_n-g\|,$$

所以不等式两边对 $n\to 0$ 求极限得 $Rf_0-g=0$，因此 R 有闭值域。

下面证明 R 为单射。如果存在 $f_1,f_2\in A^2(u)$，使得 $Rf_1=Rf_2$。再根据不等式(3.1)，有

$$0=\|Rf_1-Rf_2\|\ge C\|f_1-f_2\|,$$

所以 $f_1=f_2$，即 R 为单射。

因此 R 为从 $A^2(u)$ 到 ℓ^2 的有闭值域的有界单射线性算子。

下面证明 R 的对偶算子 R^* 是从 ℓ^2 到 $A^2(u)$ 的满射。假设对偶算子 R^* 不是满射，则 $R^*\ell^2\not\subset A^2(u)$，即 $\left(R^*\ell^2\right)^\perp\ne\{0\}$，(否则就有 $\left(\left(R^*\ell^2\right)^\perp\right)^\perp=\{0\}^\perp=H$)。即存在非零函数 $g\in\left(R^*\ell^2\right)^\perp$。则对于任意 $\{a_n\}\in\ell^2$，有

$$0=\left\langle g,R^*\{a_n\}\right\rangle=\left\langle Rg,\{a_n\}\right\rangle$$

由 $\{a_n\}$ 的任意性知 $Rg=0$。因为 R 是单射，所以 $g=0$，与 g 为非零函数矛盾。因此 R^* 是满射。

设 $\{c_n\}\in\ell^2$，对于每个 $f\in A^2(u)$，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle R^*\{c_n\},f\right\rangle_{A^2(u)}&=\left\langle\{c_n\},Rf\right\rangle_{\ell^2}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\overline{f(a_n)}u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}c_nu\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2}\int_{B_n}\overline{f(z)}K_u(z,a_n)u(z)\mathrm{d}v(z)\\&=\int_{B_n}\overline{f(z)}\sum_{n=1}^{\infty}c_nK_u(z,a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2}u(z)\mathrm{d}v(z)\\&=\left\langle\sum_{n=1}^{\infty}c_nK_u(\cdot,a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2},f\right\rangle_{A^2(u)}\end{aligned}\tag{3.2}$$

第四个等号成立是交换了积分号与求和号的顺序，我们将在最后给出这个交换是成立的。

因为 f 是任意的，所以

$$R^*\{c_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c_nK_u(\cdot,a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2}.$$

因为 R^* 是从 ℓ^2 到 $A^2(u)$ 的满射，对于任意的 $f\in A^2(u)$，都存在 $\{c_n\}\in\ell^2$，使得 $R^*\{c_n\}=f$，所以

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nK_u(z,a_n)u\left(\mathrm{B}_\beta(a_n,r)\right)^{1/2}.$$

为了完成证明，下面证明不等式(3.2)中的积分与求和可交换。

因为 $\{c_n\}\in\ell^2$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ 收敛，任给一个 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathrm{N}$，使得当 $m,l>N$ 时，都有

$$\sum_{n=m+1}^{l}|c_n|^2<\frac{\varepsilon}{\|R^*\|}$$

成立。为了书写方便，我们定义

$$\overline{c}_n=\begin{cases}c_n,n=m+1,\cdots,l;\\0,\quad 其他情况\end{cases}\tag{3.3}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{n=m+1}^{l} c_n K_u\left(z,a_n\right) u\left(\mathrm{B}_\beta\left(a_n,r\right)\right)^{1/2} \right\|_{A^2(u)} \\
&= \sup_{\|f\|_{A^2(u)}=1} \left| \left\langle \sum_{n=m+1}^{l} c_n K_u\left(z,a_n\right) u\left(\mathrm{B}_\beta\left(a_n,r\right)\right)^{1/2}, f \right\rangle_{A^2(u)} \right| \\
&= \sup_{\|f\|_{A^2(u)}=1} \left| \sum_{n=m+1}^{l} c_n u\left(\mathrm{B}_\beta\left(a_n,r\right)\right)^{1/2} \overline{\int_{B_n} \overline{K_u\left(z,a_n\right)} f\left(z\right) u\left(z\right) \mathrm{d}v\left(z\right)} \right| \\
&= \sup_{\|f\|_{A^2(u)}=1} \left| \sum_{n=m+1}^{l} c_n \overline{f\left(a_n\right)} u\left(\mathrm{B}_\beta\left(a_n,r\right)\right)^{1/2} \right| \\
&= \sup_{\|f\|_{A^2(u)}=1} \left| \left\langle \left\{\overline{c}_n\right\}, Rf \right\rangle_{\ell^2} \right| \\
&= \sup_{\|f\|_{A^2(u)}=1} \left| \left\langle R^* \left\{\overline{c}_n\right\}, f \right\rangle_{A^2(u)} \right| \\
&\le \left\| R^* \right\| \left\| \left\{\overline{c}_n\right\} \right\|_{\ell^2} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

因此序列

$$
s_m\left(z\right) = \sum_{n=1}^{m} c_n K_u\left(z,a_n\right) u\left(\mathrm{B}_\beta\left(a_n,r\right)\right)^{1/2}
$$

是 $A^2\left(u\right)$ 中的柯西序列，并且收敛到

$$
s\left(z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n K_u\left(z,a_n\right) u\left(\mathrm{B}_\beta\left(a_n,r\right)\right)^{1/2} \in A^2\left(u\right).
$$

因为

$$
\int_{B_n} f\left(z\right) \overline{s_m\left(z\right)} u\left(z\right) \mathrm{d}v\left(z\right) = \left\langle f, s_m \right\rangle_{A^2(u)}
$$

和

$$
\int_{B_n} f\left(z\right) \overline{s\left(z\right)} u\left(z\right) \mathrm{d}v\left(z\right) = \left\langle f, s \right\rangle_{A^2(u)},
$$

再根据内积的连续性有

$$
\lim_{m\to\infty} \left\langle f, s_m \right\rangle_{A^2(u)} = \left\langle f, s \right\rangle_{A^2(u)},
$$

所以

$$
\lim_{m\to\infty} \int_{B_n} f\left(z\right) \overline{s_m\left(z\right)} u\left(z\right) \mathrm{d}v\left(z\right) = \int_{B_n} f\left(z\right) \overline{s\left(z\right)} u\left(z\right) \mathrm{d}v\left(z\right).
$$

参考文献

[1] Luecking, D. (1985) Representation and Duality in Weighted Spaces of Analytic Functions. *Indiana University Mathematics Journal*, **34**, 319-336.

[2] Zhu, K. (2005) Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. Springer-Verlag, New York.

[3] Kedenmanlm, H., Korenblum, B. and Zhu, K. (2000) Theory of Bergman Spaces. Graduate Texts in Mathematics 199. Springer-Verlag, New York.

[4] Bekolle, D. (1981/1982) Inegalite a poids pour le projecteur de Bergman dans la boule unite de C^n. *Studia Mathematica*, **71**, 305-323. (In French) https://doi.org/10.4064/sm-71-3-305-323

[5] Bekolle, D. and Bonami, A. (1978) Inegalites a poids pour le noyau de Bergman. *Comptes Rendus Mathematique Academie des Sciences*, *Paris*, *Série A-B*, **286**, A775-A778. (In French)

[6] Constantin, O. (2010) Carleson Embeddings and Some Classes of Operators on Weighted Bergman Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 668-682. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.11.035

[7] Chacon, G.R. (2013) Toeplitz Operators on Weighted Bergman Spaces. *Journal of Function Spaces and Applications*, **2013**, Article ID: 753153, 1-5. https://doi.org/10.1155/2013/753153

[8] Pott, S. and Reguera, M.C. (2013) Sharp Bekolle Estimates for the Bergman Projection. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 3233-3244. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.08.018

[9] Rahm, R., Tchoundja, E. and Wick, B. (2017) Weighted Estimates for the Berezin Transform and Bergman Projection on the Unit Ball in C^n. *Mathematische Zeitschrift*, **286**, 1465-1478. https://doi.org/10.1007/s00209-016-1809-4

[10] 江泽坚, 孙善利, 泛函分析(第 2 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.