Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(4), 533-539
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.94070

Hans汉斯

On Dynamics of Affine Map on $Q_p \times Q_p$

Yunpeng Xiao

Department of Mathematics, School of Science, Shanghai University, Shanghai
Email: 978834002@qq.com

Received: May 31st, 2019; accepted: Jun. 10th, 2019; published: Jun. 26th, 2019

Abstract

The dynamical structure of affine map $T_{A,b}(X) = AX + b$ on $Q_p \times Q_p$ is described in this paper. We mainly discuss minimal sets and orbit closure.

Keywords

Minimal Decomposition, Affine Map, Non-Archimedean Field

$Q_p \times Q_p$上仿射映射的动力学性质

肖云鹏

上海大学理学院数学系，上海
Email: 978834002@qq.com

收稿日期：2019年5月31日；录用日期：2019年6月10日；发布日期：2019年6月26日

摘 要

本文研究了仿射映射$T_{A,b}(X) = AX + b$在二维非阿基米德空间$Q_p \times Q_p$上仿射动力学的性质。主要包括对于不同类型的A，该动力系统的极小集，轨迹闭包等。

关键词

极小分解，仿射映射，非阿基米德域

文章引用：肖云鹏. $Q_p \times Q_p$上仿射映射的动力学性质[J]. 理论数学, 2019, 9(4): 533-539.
DOI: 10.12677/pm.2019.94070

1. 引言

记 $p \ge 2$ 是一个素数，Q_p 是 p-adic 数域且 Z_p 是 p-adic 整数环。Q_p 中任意点 x 可以表示为 $\sum_{i\ge m} p^i u_i$，其中 $u_i \in F = \{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$m \in Z$ 且 $u_m \in F^* = \{1,2,\cdots p-1\}$。非零元素 x 的赋值为 $v_p(x) = m$。$x \ne 0$ 的绝对赋值是 $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ 且若 $x = 0$，设 $|x|_p = 0$。赋予了绝对值 $|\cdot|_p$ 的 Q_p 是一个非阿基米德空间。

Oselies 和 Zieschang 在 1975 年在 Z_p 上研究了仿射动力系统，具体地，他们研究形如 $M_a(x) = ax$ (其中 $|a|_p = 1$)的映射在 Z_p^* 动力学性质[1]。2006 年，Fan，Li，Yao 和 Zhou 对 p-adic 整数系数仿射映射 $f = \alpha x + \beta$，(其中 $\alpha, \beta, x \in Z_p$)在 Z_p 上的极小分解与唯一遍历性进行了研究并发表了文章[2]。2011 年，Fan 和 Fares 研究了系数在 Q_p 上的仿射映射的遍历性分解[3]。2011 年，Fan 和 Liao 研究了 p-adic 多项式动力系统的极小分解[4]。2014 年，Fan，Liao 和 Wang 发表了关于 p-adic 分式变换的动力系统的极小分解的研究成果[5]。

我们在本文中讨论二维的仿射映射

$$T_{A,b}(X) = AX + b \tag{1.1}$$

在 $Q_p \times Q_p$ 上的动力学性质，其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 且所有的元素都在 Q_p 中。

令 $m > 1 \in Z^*, n \in Z$ 对于二次同余式

$$x^2 \equiv n \bmod m, (n,m) = 1 \tag{1.2}$$

若式(1.2)有解，则称 n 为模 m 的二次剩余；若无解，则称 n 为模 m 的二次非剩余。

设 M, N 都是 2 阶方阵，若存在 2 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}MP = N$，则称 M 与 N 相似，P 称为相似变换阵。

令 $\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$，则

1) 如果 $\Delta \ne 0$ 是模 p 的二次剩余，那么 A 与 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 相似。

2) 如果 $\Delta = 0$，那么 A 与 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 相似，其中 $v_p(\lambda) = 0$。

3) 如果 Δ 是模 p 的二次非剩余。

注：本文研究情况 1)和 2)中 $|\lambda|_p \ne 1$ 或 $|\lambda|_p = 1$ 的情况。

对应于式子(1.1)中不同类型的 A，根据上述中 1) 2)，我们得到与 $T_{A,b}$ 共轭的仿射映射，分别是：

类型 1 $T_{B,b'}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$，其中 $\beta_1, \beta_2 \in Q_p$。

类型 2 $T_{B,b'}(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$，其中 $\beta_1, \beta_2 \in Q_p$。

我们得出以下结果：

定理 1. 针对**类型 1** 中仿射映射 $T_{B,b'}(X)$，动力系统 $(Q_p \times Q_p, T_{B,b'}(X))$ 分解成：

$$Q_p \times Q_p = P \bigcup M \bigcup H,$$

其中 P 代表 $T_{B,b'}(X)$ 的吸引域，$M=\bigcup_i M_i$ 是所有(至少可数多个)闭开集 M_i 的并，其中 M_i 是有限个圆盘的并而且子系统 $T_{B,b'}:M_i \to M_i$ 是极小的。H 中的点最终会落在 P 与 M 中。

具体分解如下：

1) 如果 $\lambda_1=\lambda_2=1$，则有 $D_{v_p(\beta_1)}(0)\times D_{v_p(\beta_2)}(0)$ 包含于 M。根据 $r_i<v_p(\beta_i)$ 时，$S_{r_i}(0)$ 由 $p^{v_p(\beta_i)-r-1}(p-1)(i=1,2)$ 个极小集组成。此时 $Q_p\times Q_p$ 包含于 M，$P=H=\varnothing$。

2) 如果 $|\lambda_1|_p>1$，$|\lambda_2|_p>1$，$P=\{\infty\}\times\{\infty\}\bigcup\left\{\frac{\beta_1}{1-\lambda_1}\right\}\times\left\{\frac{\beta_2}{1-\lambda_2}\right\}\bigcup\left\{\frac{\beta_1}{1-\lambda_1}\right\}\times\{\infty\}\bigcup\{\infty\}\times\left\{\frac{\beta_2}{1-\lambda_2}\right\}$，$M=\varnothing$，$H=Q_p\times Q_p\setminus\left\{\{\infty\}\times\{\infty\}\bigcup\left\{\frac{\beta_1}{1-\lambda_1}\right\}\times\left\{\frac{\beta_2}{1-\lambda_2}\right\}\bigcup\left\{\frac{\beta_1}{1-\lambda_1}\right\}\times\{\infty\}\right\}$。

3) 当 $|\lambda_1|_p<1$，$|\lambda_2|_p<1$，则 $P=\left\{\frac{\beta_1}{1-\lambda_1}\right\}\times\left\{\frac{\beta_2}{1-\lambda_2}\right\}$，$M=\varnothing$，$H=Q_p\times Q_p\setminus\left\{\frac{\beta_1}{1-\lambda_1}\right\}\times\left\{\frac{\beta_2}{1-\lambda_2}\right\}$。

4) 若 $\lambda_1,\lambda_2\neq 1$，且存在 $d_i\geq 2$ 使得 $\lambda_i^{d_i}=1(i=1,2)$。则对于任意的 $X\in Q_p\times Q_p$，$T_{B,b'}^n(X)$ 是 $[d_1,d_2]$-周期的($[d_1,d_2]$ 代表 d_1 与 d_2 的最小公倍数)。此时 $P=Q_p\times Q_p$，$M=H=\varnothing$。

5) 如果 $|\lambda_1|_p=1$，$|\lambda_2|_p=1$，且 $\lambda_i\notin V$，则对于 $r_i\in Z$，$S_{r_i}\left(\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}\right)$ 由 $\frac{p^{v_0(\lambda_i)}(p-1)}{\delta_i}$ 个极小集组成，其中 δ_i 是 λ_i 在群 $\left(Z_p/p^{v_0(\lambda_i)}Z_p\right)^*(i=1,2)$ 的阶。此时 $S_{r_i}\left(\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}\right)\times S_{r_i}\left(\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}\right)$ 包含在 M 中。所以 $M\in Q_p\times Q_p$，$P=H=\varnothing$。

对于**类型 2** 中仿射映射 $T_{B,b'}$，其在 $Q_p\times Q_p$ 上的一些动力学性质如下结果给出。

定理 2. 如果 $\lambda=1$，则 $T_{B,b'}(x)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ 以初始点为 $\{x_1\}\times\{x_2\}$ 在 $Q_p\times Q_p$ 中轨迹有以下性质：

1) 当 $p>2$ 且 p 是素数时，

a) 如果 $\beta_2=0$，$\overline{\{T_{B',b'}^n:n\geq 0\}}=\left\{x_1+p^{v_p(x_2)}Z_p\right\}\times\{x_2\}$。

b) 如果 $v_p(\beta_2)=s\neq 0$，且 $\frac{\beta_2}{2}=p^s u$，其中 $u\in Z_p^*$，则当 $v_p(x_2)\geq s$，$\overline{\{T_{B',b'}^n:n\geq 0\}}=\{D''\}\times\{D\}$，其中 $D=\bigcup_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\bigcup_{i=0}^{\infty}p^{2i}\left(a_j+pZ_p\right)$，$D''=x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}-\bigcup_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}u\cdot D_j'$，

$D_j'=\bigcup_{i=0}^{\infty}p^{2i+s}\left(b_j+pZ_p\right)$ 且 a_j、b_j 是模 p 的二次剩余。

2) 当 $p=2$ 时，

a) 如果 $\beta_2=0$，$\overline{\{T_{B',b'}^n:n\geq 0\}}=\left\{x_1+p^{v_p(x_2)}Z_p\right\}\times\{x_2\}$。

b) 如果 $\beta_2\neq 0$，令 $v_2(\beta_2)=t$ 且 $\frac{\beta_2}{2}=2^{t-1}w$，其中 $w\in Z_2^*$，我们得到当 $v_2(x_2)=t-1$ 且 $v_2(2x_2-\beta_2)\geq 0$，$\overline{\{T_{B',b'}^n:n\geq 0\}}=\{D''\}\times\left\{D_{v_2(\beta_2)}\right\}$，其中 $D''=x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}-wD$ 且 $D=\bigcup_{i=0}^{\infty}\left(2^{2i+t}\left(1+8Z_2\right)\right)$。

定理 2 的结论有助于得到系统极小分解的相关内容。

2. 预备知识

我们首先介绍有关 p-adic 数域 Q_p 的一些基本性质以及本文所需的一些基本概念。

$$Q_p=\left\{\sum_{n\ge v_p(x)} x_n p^n : x_n\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}, n\ge v_p(x)\right\}.$$

记 Z_p 为 N 关于 $|\cdot|_p$ 的闭包，则 $Z_p=\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x_n p^n : 0\le x_n<p\right\}=\left\{x\in Q_p : |x|_p\le 1\right\}$。

Z_p 是个局部环。对任意 $x\in Q_p$ 可以分解为 $x=p^n\cdot u$，其中 $n\in Z, u\in Z_p^*$。

令 X 是紧度量空间，且 $T:X\to X$ 是一个连续映射。对于任意的 $x\in X$，我们称 $\left\{T^n x : n\ge 0\right\}$ 为 x 在 T 下的轨迹。其闭包表示为 $\overline{\left\{T^n x : n\ge 0\right\}}$。如果对于所有的 $x\in X$，都有 $X=\overline{\left\{T^n x : n\ge 0\right\}}$，则称系统 (X,T) 是极小的。

对于 $x\in Q_p$ 和 $r\in Z$，我们令

$$D_r(x)=\left\{y\in Q_p : v_p(y-x)\ge r\right\};$$

$$S_r(x)=\left\{y\in Q_p : v(y-x)=r\right\};$$

$$V=\left\{x\in Q_p : x^{p-1}=1\right\}.$$

设 $p\ne 3$ 时，$s_p=1$；$p=2$ 时，$s_p=2$。对于在 Z_p 中的单位 a，令

$$\delta=\delta(a)=\inf\left\{n\ge 1, v_p\left(a^n-1\right)\ge s_p\right\};$$

$$v_0=v_0(a)=v_p\left(a^\delta-1\right).$$

引理 1 [3]. 令 $\varphi(x)=x+b\,(b\ne 0)$ 是在 Q_p 上的平移变换。则有

1) 圆盘 $D_{v_p(b)}(0)$ 是极小的。

2) 对于任意的整数 $r<v_p(b)$，圆周 $S_r(0)$ 包含 $p^{v(b)-r-1}(p-1)$ 个极小集。

引理 2 [3]. 考虑在 Q_p 上的仿射映射 $\varphi(x)=ax+b$。假设 $v_p(a)=0$ 且 a 不是单位元的根.令 x_0 是 $\varphi(x)$ 的唯一不动点。

1) 对于 $x,y\in Q_p$，我们有 $\overline{O(x)}=\overline{O(y)}$ 当且仅当 $v_p(y-x_0)=v_p(x-x_0)$ 且 $\dfrac{y-x_0}{x-x_0}$ 是在由 a 生成的 $\left(Z/p^{v_0}\right)^*$ 的子群中。

2) 对于 $r\in Z$，球体 $S_r(x_0)$ 包含 $\dfrac{p^{v_0}(p-1)}{\delta}$ 个极小集，其中 δ 是 a 在群 $\left(Z_p/p^{v_0}Z_p\right)^*$ 的阶。

引理 3 [4]. 令 $F(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ 是一个系数是 p-adic 整数的多项式。令 $F'(x)=c_1+2c_2x+\cdots+nc_nx^{n-1}$ 是 $F(x)$ 的导函数。假设 $\overline{a}_0$ 是满足 $F(\overline{a}_0)\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 和 $F'(\overline{a}_0)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 的 p-adic 整数。

引理 4 [6]. 一个不被 p 整除的整数 a 在 $Z_p\,(p\ne 2)$ 有平方根当且仅当 a 是模 p 的二次剩余。

引理 5. 对于素数 $p\ge 3$，可得 $\overline{\left\{n^2 : n\ge 0\right\}}=\bigcup_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} D_j$，其中 $D_j=\bigcup_{i=0}^{\infty} p^{2i}\left(a_j+pZ_p\right)$ 且 a_j 是模 p 的二次剩余。

证明：考虑二次多项式 $P(x)=x^2-a=0$，其中 a 是一个 p-adic 整数。上述 $P(x)=0$ 在 Z_p 上有根仅当 $v_p(a)=v_p\left(x^2\right)=2v_p(x)$ 是偶数，设为 $2m$，其中 $m\in Z$。进而 $v_p\left(\dfrac{a}{p^{2m}}\right)=0$，故不妨设 $v_p(a)=0$，我们

知道在循环群 F_p^* 中，平方将其分为秩为 2 的子群。假设 $a_1=1, a_2=\left\langle 2^2\right\rangle_p, a_3=\left\langle 3^2\right\rangle_p, \cdots, a_{\frac{p-1}{2}}=\left\langle \frac{p-1}{2}\right\rangle_p$ 是模 p 的二次剩余，其中 $a_i, i=1,2,3,\cdots,\frac{p-1}{2}$ 是有理整数，根据引理 4 可得 $D_j=\bigcup_{i=0}^{\infty} p^{2i}\left(a_j+pZ_p\right)$，$j=1,2,3,\cdots,\frac{p-1}{2}$，在 Z_p 上有二次根，结论得证。

引理 6. 对于 $p=2$，有 $\overline{\left\{n^2: n\geq 0\right\}}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(2^{2i}\left(1+8Z_2\right)\right)$。

证明：由[7]可得 $a\in Z_2^*$ 是平方数当且仅当 $a\in 1+8Z_2$，由此可知若 $a\in Z_2^*\in\overline{\left\{n^2: n\geq 0\right\}}$，则 $a\in 1+8Z_2$。同时可知 $2^{2m}\left(1+8Z_2\right)\subset\overline{\left\{n^2: n\geq 0\right\}}, m=1,2,3,\cdots$。相反的，每一个 $a\in 2^{2m}\left(1+8Z_2\right)$，$m=1,2,3,\cdots$，在 Q_p 中有平方根。

引理 7 [2]. 对于任意 $x\in Z_p$，有 $O_{T_{1,1}}(x)=x+N$ 在 Z_p 中稠密。

3. 定理的证明

定理 1 的证明：

1) 我们有

$$T_{B,b'}(X)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1+\beta_1\\ \lambda_2 x_2+\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1(X)\\ \delta_2(X)\end{pmatrix}.$$

根据引理 1，$D_{v_p(\beta_1)}(0)\times D_{v_p(\beta_2)}(0)$ 是极小集，因此包含于 M。同时 $r_i<v_p(\beta_i)$ 时，$S_{r_i}(0)$ 是由 $p^{v_p(\beta_i)-r-1}(p-1)(i=1,2)$ 个极小集组成。因此 $S_{r_1}(0)\times S_{r_2}(0)$ 包含于 M。故(1)成立。

2) $|\lambda_1|_p>1, |\lambda_2|_p>1$ 时，任意 $x\in Q_p\setminus\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}$，都有 $\lim_{n\to\infty}\delta_i^n(x)=\infty$，因此 $Q_p\setminus\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}$ 在 ∞ 的吸引域内，而 ∞ 和 $\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}, i=1,2$ 是 $\delta_i(X)$ 的不动点，所以结论得证。

3) $|\lambda_1|_p<1, |\lambda_2|_p<1$ 时，$\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}, i=1,2$ 时 $\delta_i(X)$ 的唯一不动点，当 $x\in Q_p\setminus\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}$ 时，$\lim_{n\to\infty}\delta_i^n(x)=\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}, i=1,2$，所以任意 $x\in Q_p\setminus\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}$ 在 $\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}$ 的吸引域内，结论得证。

4) 若 $\lambda_1,\lambda_2\neq 1$，但存在 $d_i\geq 2$，使得 $\lambda_i^{d_i}=1(i=1,2)$，对于任意的 $x\in Q_p\setminus\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}$ 时，$\delta_i^n(x)$ 是 d_i-周期的，因此 $X\in Q_p\times Q_p$，$T_{B,b'}^n(X)$ 是 $[d_1,d_2]$-周期的($[d_1,d_2]$ 代表 d_1 与 d_2 的最小公倍数)，结论得证。

5) 如果 $|\lambda_1|_p=1, |\lambda_2|_p=1$ 且 $\lambda_i\notin V$，则由引理 2 知，对于 $r_i\in Z$，$S_{r_i}\left(\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}\right)$ 由 $\frac{p^{v_0(\lambda_i)}(p-1)}{\delta_i}$ 个极小集组成，其中 δ_i 是 λ_i 在群 $\left(Z_p/p^{v_0(\lambda_i)}Z_p\right)^*(i=1,2)$ 的阶。此时 $S_{r_i}\left(\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}\right)\times S_{r_i}\left(\frac{\beta_i}{1-\lambda_i}\right)$ 包含在 M 中。结论得证。

为了证明 2，我们需要以下两个引理。

引理 8. 当 p 是素数且 $p>2$，$\frac{\beta_2}{2}=p^s u$，其中 $u\in Z_p^*$，$n\in N^*$。

$$\overline{\left\{x_1-\frac{\left(2x_2-\beta_2\right)^2}{8\beta_2}+\frac{\beta_2}{2}\left(n+\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)^2 : n\geq 0\right\}}$$

如下给出：

$$v_p(x)\geq s,\ \overline{\left\{x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}+\frac{\beta_2}{2}\left(n+\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)^2 : n\geq 0\right\}}=x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}+\bigcup_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}u\cdot B_j',$$

其中 $D_j'=\bigcup_{i=0}^{\infty}p^{2i+s}\left(a_j+pZ_p\right)$ 且 a_j 是模 p 的二次剩余。

证明：$v_p(x)\geq s$，则 $v_p\left(\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)\geq 0$，

$\overline{\left\{x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}+\frac{\beta_2}{2}\left(n+\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)^2 : n\geq 0\right\}}=\overline{\left\{x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}+\frac{\beta_2}{2}n^2 : n\geq 0\right\}}$，因为由引理 7 知，

$\overline{\left\{\left(n+\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)^2 : n\geq 0\right\}}=\overline{\left\{n^2 : n\geq 0\right\}}$。设 $\frac{\beta_2}{2}=p^s u$，其中 $u\in Z_p^*$，则由引理 5 知，

$\overline{\left\{\frac{\beta_2}{2}\left(n+\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)^2 : n\geq 0\right\}}=\bigcup_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}u\cdot D_j'$，其中 $D_j'=\bigcup_{i=0}^{\infty}p^{2i+s}\left(a_j+pZ_p\right)$ 且 a_j 是模 p 的二次剩余。

引理 9. 当 $p=2$ 且 $\frac{\beta_2}{2}=2^{t-1}w$，其中 $w\in Z_2^*$，我们得到当 $v_2(x_2)=t-1$ 且 $v_2(2x_2-\beta_2)\geq 1+t$，则

$$\overline{\left\{x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}+\frac{\beta_2}{2}\left(n+\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)^2 : n\geq 0\right\}}=x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}+wD,$$

其中 $D=\bigcup_{i=0}^{\infty}\left(2^{2i+t}\left(1+8Z_2\right)\right)$。

证明：类似于引理 8 的证明。

定理 2 的证明：

当 $\lambda=1$ 时，$T_{B,b'}(x)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}$。因为 $T_{0,C}\circ T_{B',b'}(X)=T_{B',b''}\circ T_{0,C}(X)$，其中 $T_{0,C}=X+\begin{pmatrix}0\\-\beta_2\end{pmatrix}$，

则 $T_{B,b'}(x)$ 与 $T_{B,b''}(x)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\beta_2\end{pmatrix}$ 共轭。

$$T_{B',b''}^{n}(X)=\begin{pmatrix}x_1+nx_2+\frac{(n-1)n}{2}\beta_2\\x_2+n\beta_2\end{pmatrix}.$$

首先，考虑 $x_1+nx_2+\frac{(n-1)n}{2}\beta_2$，则当 $\beta_2=0$ 和 $v_p(x_2)=s$ 时，$\overline{\{x_1+nx_2 : n\geq 0\}}=x_1+p^sZ_p$，而当 $\beta_2\neq 0$，上式变形为 $x_1-\frac{(2x_2-\beta_2)^2}{8\beta_2}+\frac{\beta_2}{2}\left(n+\frac{2x_2-\beta_2}{2\beta_2}\right)^2$，由引理 8 与引理 9，结论得证。对 $x_2+n\beta_2$，当 $\beta_2=0$，$x_2+n\beta_2=x_2$。而当 $\beta_2\neq 0$，根据引理 1，结论得证。

参考文献

[1] Oselies, R. and Zieschang, H. (1975) Ergodische Eigenschaften der Automorphismen p-adischer Zahlen. *Archiv der Mathematik*, **26**, 144-153. https://doi.org/10.1007/bf01229718

[2] Fan, A.H., Li, M.T., Yao, J.Y. and Zhou, D. (2007) Strict Ergodicity of Affine p-Adic Dynamical Systems on Z_p. *Advances in Mathematics*, **214**, 666-700.

[3] Fan, A.H. and Fares, Y. (2011) Minimal Subsystems of Affine Dynamics on Local Fields. *Archiv der Mathematik*, **96**, 423. https://doi.org/10.1007/s00013-011-0245-2

[4] Fan, A. and Liao, L. (2011) On Minimal Decomposition of p-Adic Polynomial Dynamical Systems. *Advances in Mathematics*, **228**, 2116--2144. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.06.032

[5] Fan, A., Fan, S., Liao, L. and Wang, Y. (2014) On Minimal Decomposition of p-Adic Homographic Dynamical Systems. *Advances in Mathematics*, **257**, 92-135. https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.02.007

[6] Tahar, Z., Mohamed, K. and Knapp, M. (2010) Hensel Codes of Square Roots of p-Adic Numbers. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **4**, 32-40. https://doi.org/10.2298/aadm1000009m

[7] Robert, A.M. (2000) A Course in p-Adic Analysis. Springer, New York.