Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(4), 492-502
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.94066

Hans汉斯

A Method for Finding Eigenvectors and Eigenvalues of Surfaces under Weingarten Transformation

Hao Huang, Qing Huang, Weijun Lu*

College of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning Guangxi
Email: *763234301@qq.com

Received: May 30th, 2019; accepted: Jun. 9th, 2019; published: Jun. 21st, 2019

Abstract

In this paper, by using the traditional method of solving the eigenvalues of matrix with order n in Advanced Algebra, the eigenvalues and corresponding eigenvectors of some regular surfaces under Weingarten transformation are obtained. Precisely, after obtaining all eigenvalues of characteristic equation of the Weingarten matrix, we solve the eigenvector corresponding to its eigenvalue. The biggest distinction is in that the eigenvector is expressed by the basis formed by tangent vectors of coordinate curves with respect to the tangent plane on given surface. Some examples of canonical surfaces are used to illustrate the methods for solving eigenvalues and eigenvector to their Weingarten transformations, which help us a better understanding of eigenvalue and eigenvector of surfaces.

Keywords

Weingarten Matrix, Weingarten Transform, Eigenvalue, Eigenvector

Weingarten变换下曲面的特征向量和特征值的一种求法

黄　浩，黄　晴，卢卫君*

广西民族大学理学院，广西　南宁
Email: *763234301@qq.com

收稿日期：2019年5月30日；录用日期：2019年6月9日；发布日期：2019年6月21日

*通讯作者。

文章引用: 黄浩，黄晴，卢卫君. Weingarten 变换下曲面的特征向量和特征值的一种求法[J]. 理论数学，2019，9(4): 492-502. DOI: 10.12677/pm.2019.94066

摘 要

本文运用高等代数中*n*阶矩阵特征值求解的传统方法，来求出一些正则曲面Weingarten变换下曲面的特征值。具体而言就是先求出Weingarten矩阵特征方程的全部特征根，然后依据Weingarten变换定义来求出曲面的特征向量。这里求特征向量的最大区别在于特征向量要先用给定曲面在讨论点处切平面的坐标曲线切向量基底表示，再根据曲面的第一基本量和特征向量的单位来求出相应的分量。以一些特有性质的正则曲面为例子，来阐述它们的Weingarten变换的特征值和特征向量求解方法，加深对求曲面特征值和特征向量的理解。

关键词

Weingarten矩阵，Weingarten变换，特征值，特征向量

1. 引言

矩阵的特征值和特征向量的意义和一般求法在高等代数教科书里已有专门介绍(如[1] [2])，简单地说，一个非零向量和一个矩阵的乘积等于一个数与这个向量的乘积，则这个向量就叫做特征向量，与之对应的数称为矩阵的一个特征值。而 Weingarten 变换下曲面的特征向量和特征值在文献[3]中有专门的介绍。关于 Weingarten 变换下曲面的特征值和特征向量问题的研究，所提及的文献很少，而曲面的第一基本形式和第二基本形式的基本量决定了它的一个 Weingarten 矩阵，因此我们借助到高等代数中求 n 阶矩阵的特征值和特征向量的知识来对此类问题进行研究。

关于 n 阶矩阵 A 的特征值和特征向量的解法，常见的有两种。其一是利用特征多项式 $|\lambda I - A| = 0$ 来求出全部的根，即为矩阵的特征值，其中 I 为单位矩阵。然后将矩阵 A 的任一特征值 λ (可能有重根)代入到齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 中求出所有非零解，这样可以得到一个基础解系，这样的基础解系构成的线性组合就是所求的矩阵 A 关于特征值 λ 所对应的特征向量；其二是利用矩阵初等变换的方法。关于 Weingarten 变换下曲面的特征向量和特征值的解法，首先通过切平面的考察点以及第一、第二基本量来求得 Weingartan 矩阵的具体形式，再利用特征多项式 $|\lambda I - \omega| = 0$ 来求出全部的根，即为 Weingarten 矩阵 ω 的特征值，不同于一般 n 阶矩阵 A 的特征向量的求解，本文采用的方法，是将 Weingarten 变换下在给定考察点曲面的特征向量通过自然基底 $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ 下分解成两个分量，即为 $\xi_i = \xi_i^j \boldsymbol{r}_j$， $i, j = 1,2$ 的形式，再利用到 $|\xi_i|^2 = 1$ 和 $(\lambda I - \omega)\xi_i^j = \lambda \xi_i^j$ 来求出相应分量，最后代入到 $\xi_i = \xi_i^j \boldsymbol{r}_j$ 得到曲面的特征向量。另外，本文的新颖之处是结合曲面五网的特点，以此类正则曲面为例子，来加深对此类问题的理解，这也减轻了我们的计算上的困难。

由此可见，两种特征值解法是一致的，区别在于它们对特征向量的解法。曲面上特征值和特征向量依赖于曲面的第一、第二基本形式以及曲面切平面上的考察点，特别是曲面特征向量通过自然基底 $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ 分解成两个分量并求出两个分量的具体形式的方法，以及特征向量要先用给定曲面在讨论点处切平面的坐标曲线切向量基底表示，这与 n 阶矩阵 A 的特征向量的求解在本质上是有区别的。值得一提的是，对于一些正则曲面而言，Weingarten 变换下曲面的特征向量不一定存在，本文通过验证发现环面就是这样

的例子，下文也做了具体的分析。

2. 基本概念

n 阶矩阵的特征值和特征向量和曲面上 Weingarten 变换下特征值和特征向量在求解的方法上有着许多相同之处，但它们本质上还是有很大的区别。大多数《高等代数》的教材对 n 阶矩阵的特征值和特征向量有如下定义：

定义 2.1 设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，若 $\exists \lambda \in P$ 以及一个非零向量 $\boldsymbol{\xi} \in P^n$，使得

$$A\boldsymbol{\xi} = \lambda \boldsymbol{\xi}, \tag{2.1}$$

则称 λ 为矩阵 A 的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 称为矩阵 A 关于特征值 λ 对应的一个特征向量。

因为矩阵 A 的特征多项式[4]

$$|A-\lambda I| = \lambda^n - (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

是数域 P 上关于 λ 的 n 次多项式，故矩阵 A 有 n 个特征值(可能有复数根)，因此矩阵 A 一定有特征值和特征向量。

定义 2.2 [3] [5]对正则曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$，$(u,v) \in U \subset R^2$，称二次微分式

$$I = \mathrm{d}s = E(u,v)\mathrm{d}u^2 + 2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(u,v)\mathrm{d}v^2$$

为曲面 S 的第一基本形式，其中 E，F，G 为曲面第一基本量，它们分别表示为

$$E(u,v) = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u,\quad F(u,v) = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v,\quad G(u,v) = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v.$$

定义 2.3 [3] [5]对正则曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$，$(u,v) \in U \subset R^2$，称二次微分式

$$II = -\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} = L(u,v)\mathrm{d}u^2 + 2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(u,v)\mathrm{d}v^2$$

为曲面 S 的第二基本形式，其中 L，M，N 为曲面第二基本量，它们分别表示为

$$L(u,v) = \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n},\quad M(u,v) = \boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n},\quad N(u,v) = \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}.$$

我们知道在曲面自然标架场 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$ 下的 Weingarten 公式确定为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_i \mathrm{d}u^i = -\omega_i^j \mathrm{d}u^i \boldsymbol{r}_j = -\Omega_{ik} g^{kj} \boldsymbol{r}_j$$

因此可改写 Weingarten 公式为矩阵形式：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = (\mathrm{d}u^1, \mathrm{d}u^2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_1\\ \boldsymbol{n}_2\end{pmatrix} = -(\mathrm{d}u^1, \mathrm{d}u^2)\,\omega\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\end{pmatrix} = -(\mathrm{d}u^1, \mathrm{d}u^2)\,\Omega g^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\end{pmatrix},$$

矩阵 ω 称为曲面在参数 (u^1, u^2) 下的 Weingarten 矩阵，它表示为

$$\omega = \Omega g^{-1} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{LG-MF}{EG-F^2} & \dfrac{ME-LF}{EG-F^2} \\ \dfrac{MG-NF}{EG-F^2} & \dfrac{NE-MF}{EG-F^2} \end{pmatrix},$$

其中 E、F、G 是曲面的第一基本量，L、M、N 是曲面的第二基本量。

定义 2.4 [3] (Weingarten 变换)在 E^3 的正则曲面 S 上，其每一点 p 的切平面 T_p 都具有 E^3 的诱导内积而成为二维欧氏空间 E^2，按 Weingarten 公式定义线性变换，即

$$W: T_p \mapsto T_p,$$

$$\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{r}_i\big|_p \mapsto W(\boldsymbol{a})=a^iW\left(\boldsymbol{r}_i\big|_p\right),$$

其中定义

$$W\left(\boldsymbol{r}_i\big|_p\right)=\left(\omega_i^j\boldsymbol{r}_j\right)\Big|_p,$$

则称之为曲面S在点p处的切平面T_p上的Weingarten变换。其中，Weingarten变换的特征值即为Weingarten矩阵ω的实特征值，其特征向量对应于矩阵ω的实特征向量。

3. 关于 Weingarten 矩阵ω的性质

Weingarten 矩阵的特征值方程为

$$\lambda^2-tr\omega\cdot\lambda+|\omega|=0,$$

这是由$|\omega-\lambda I|=0$推导出来的，其中I为单位矩阵，已知

$$\omega=\Omega g^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{LG-MF}{EG-F^2} & \dfrac{ME-LF}{EG-F^2}\\ \dfrac{MG-NF}{EG-F^2} & \dfrac{NE-MF}{EG-F^2}\end{pmatrix},$$

由$|\omega-\lambda I|=0$知，

$$\begin{aligned}|\omega-\lambda I|&=\begin{vmatrix}\dfrac{LG-MF}{EG-F^2}-\lambda & \dfrac{ME-LF}{EG-F^2}\\ \dfrac{MG-NF}{EG-F^2} & \dfrac{NE-MF}{EG-F^2}-\lambda\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{LG-MF}{EG-F^2}-\lambda\right)\left(\frac{NE-MF}{EG-F^2}-\lambda\right)-\frac{ME-LF}{EG-F^2}\cdot\frac{MG-NF}{EG-F^2}\\&=\lambda^2-\left(\frac{LG-MF}{EG-F^2}+\frac{NE-MF}{EG-F^2}\right)\lambda+\frac{LG-MF}{EG-F^2}\cdot\frac{NE-MF}{EG-F^2}-\frac{ME-LF}{EG-F^2}\cdot\frac{MG-NF}{EG-F^2}\\&=\lambda^2-\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}\lambda+\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\\&=\lambda^2-tr\omega\cdot\lambda+|\omega|\end{aligned}$$

由于在保向参数变换下不变，从而其系数分别构成的几何不变量

$$tr\omega=tr\left(\Omega g^{-1}\right)=\frac{g_{11}\Omega_{22}-2g_{12}\Omega_{12}+g_{22}\Omega_{11}}{|g|}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2},$$

$$|\omega|=\left|\Omega g^{-1}\right|=\frac{|\Omega|}{|g|}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

由此可见，可直接利用 Weingarten 矩阵的特征值方程求得 Weingarten 矩阵的特征值。

定理 3.1 [3]正则曲面上的 Weingarten 矩阵ω具有两个实特征值。

证明 我们知道 Weingarten 矩阵的特征值方程为

$$\lambda^2-tr\omega\cdot\lambda+|\omega|=0.$$

把它看成一个关于λ的一元二次方程，此时考虑曲面上的函数，

$$\begin{aligned}\Delta = f &= (tr\omega)^2 - 4|\omega| \\ &= \left(\omega_1^1 + \omega_2^2\right)^2 - 4\left(\omega_1^1\omega_2^2 - \omega_1^2\omega_2^1\right) \\ &= \left(\omega_1^1 - \omega_2^2\right)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^1\end{aligned}$$

由于它在参数变换下不变，故不妨设已经在正交网下考虑，此时有

$$\omega_1^1 = \frac{L}{E},\quad \omega_1^2 = \frac{M}{G},\quad \omega_2^1 = \frac{M}{E},\quad \omega_2^2 = \frac{N}{G}.$$

故

$$f = \left(\omega_1^1 - \omega_2^2\right)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^1 = \left(\frac{L}{E} - \frac{N}{G}\right)^2 + \frac{4M^2}{EG} \ge 0.$$

所以特征方程具有两个实根，即 Weingarten 矩阵 ω 具有两个实特征值。

注：定理 3.1 的结论在理论上也说明了任何一个正则曲面就一定存在着两个曲面特征值。

4. 求正则曲面特征值和特征向量的讨论

下面举出几个正则曲面的例子来讨论 Weingarten 变换下的特征值和特征向量的解法。

正则曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 的坐标网为渐近网时，即 $L = N = 0$。这样的曲面的例子如双曲抛物面，通过一个例子来讨论。

例 4.1 双曲抛物面 $S : \boldsymbol{r}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$ 在 $(2,0,1)$ 处的 Weingarten 变换下的特征值和单位特征向量。

解 1) 先求出第一基本量 E，F，G 和第二基本量 L，M，N。

由 $\boldsymbol{r}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$，可得

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_u = (1,1,v),\quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_v = (1,-1,u),\quad \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (u+v, v-u, -2),$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|} = \frac{(u+v, v-u, -2)}{\sqrt{2\left(u^2+v^2+2\right)}},\quad \boldsymbol{r}_{uu} = \boldsymbol{r}_{vv} = (0,0,0),\quad \boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{r}_{vu} = (0,0,1),$$

于是

$$E(u,v) = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = 2 + v^2,\quad F(u,v) = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = uv,\quad G(u,v) = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = 2 + u^2;$$

$$L(u,v) = \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = 0,\quad M(u,v) = \boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{u^2+v^2+2}},\quad N(u,v) = \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

2) 再求得 Weingarten 变换在点 $(x,y,z) = (2,0,1)$ 处的 Weingarten 矩阵，在点 $(x,y,z) = (2,0,1)$ 处所对应为

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u-v=0, \\ uv=1 \end{cases}$$

解之得 $u = v = 1$。

这时

$$E(1,1) = 3,\quad F(1,1) = 1,\quad G(1,1) = 3;$$

$$L(1,1) = N(1,1) = 0,\quad M(1,1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所对应的 Weingarten 矩阵

$$\begin{aligned}\omega&=\Omega g^{-1}\\&=\begin{pmatrix}L(1,1)&M(1,1)\\M(1,1)&N(1,1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(1,1)&F(1,1)\\F(1,1)&G(1,1)\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{16}&-\frac{3\sqrt{2}}{16}\\-\frac{3\sqrt{2}}{16}&\frac{\sqrt{2}}{16}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

求矩阵 ω 的特征值，由 $|\lambda I-\omega|=0$ 得

$$\begin{vmatrix}\lambda-\frac{\sqrt{2}}{16}&-\frac{3\sqrt{2}}{16}\\-\frac{3\sqrt{2}}{16}&\lambda-\frac{\sqrt{2}}{16}\end{vmatrix}=0\text{，解之得 }\lambda_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ 或 }\lambda_2=-\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

设 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所对应的单位特征向量为 ξ_1，则

$$\xi_1=\xi_1^1\boldsymbol{r}_1(1,1)+\xi_1^2\boldsymbol{r}_2(1,1).$$

由 $|\xi_1|^2=1$ 得

$$|\xi_1|^2=(\xi_1^1)^2E(1,1)+2\xi^1\xi^2F(1,1)+(\xi_1^2)^2G(1,1)=3(\xi_1^1)^2+2\xi_1^1\xi_1^2+3(\xi_1^2)^2=1,$$

即

$$3(\xi_1^1)^2+2\xi_1^1\xi_1^2+3(\xi_1^2)^2=1. \tag{4.1}$$

又因为

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{16}&-\frac{3\sqrt{2}}{16}\\-\frac{3\sqrt{2}}{16}&\frac{\sqrt{2}}{16}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^1\\\xi_1^2\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}\xi_1^1\\\xi_1^2\end{pmatrix}$$

解之得

$$\xi_1^1=-\xi_1^2 \tag{4.2}$$

联立上述(4.1)和(4.2)式解得

$$\begin{cases}\xi_1^1=\frac{1}{2}\\\xi_1^2=-\frac{1}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\xi_1^1=-\frac{1}{2}\\\xi_1^2=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

故 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 对应的特征向量为

$$\xi_1=\xi_1^1\boldsymbol{r}_u(1,1)+\xi_1^2\boldsymbol{r}_v(1,1)=\frac{1}{2}(1,1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}-\frac{1}{2}(1,-1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}=\boldsymbol{j},$$

同理可以得

$$\xi_1=\xi_1^1\boldsymbol{r}_u(1,1)+\xi_1^2\boldsymbol{r}_v(1,1)=-\frac{1}{2}(1,1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(1,-1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{j}.$$

类似地，设 $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{8}$，对应的特征向量为 ξ_2，可以解得

$$\begin{cases}\xi_2^1=\frac{\sqrt{2}}{4}\\\xi_2^2=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\xi_2^1=-\frac{\sqrt{2}}{4}\\\xi_2^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}.$$

故

$$\xi_2=\xi_2^1\boldsymbol{r}_u(1,1)+\xi_2^2\boldsymbol{r}_v(1,1)=\frac{\sqrt{2}}{4}(1,1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{4}(1,-1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k},$$

或

$$\xi_2=\xi_2^1\boldsymbol{r}_u(1,1)+\xi_2^2\boldsymbol{r}_v(1,1)=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1,1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{4}(1,-1,1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}.$$

Weingarten 矩阵是一个 2 阶矩阵，求解 2 阶矩阵的特征值有一些规律，我们可以利用这样的规律使得计算更为简单。

引理 4.1 [6]设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ 是实数域 R 上的二阶矩阵，如果 $a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}$，则 $\lambda_1=a_{11}+a_{12}$ 或 $\lambda_1=a_{22}+a_{21}$ 是矩阵 A 的一个特征值，其另一个特征值为 $\lambda_2=a_{11}-a_{21}$ 或 $\lambda_2=a_{22}-a_{12}$。

如例题 4.1 的 Weingarten 矩阵

$$\omega=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{16}&-\frac{3\sqrt{2}}{16}\\-\frac{3\sqrt{2}}{16}&\frac{\sqrt{2}}{16}\end{pmatrix}$$

于是直接利用引理 4.1 可得两个特征值分别为

$$\lambda_1=a_{11}+a_{12}=\frac{\sqrt{2}}{16}-\frac{3\sqrt{2}}{16}=-\frac{\sqrt{2}}{8}，\text{或}\ \lambda_2=a_{11}-a_{21}=\frac{\sqrt{2}}{16}-\left(-\frac{3\sqrt{2}}{16}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

所得的特征值运用相同的方法可求得所求的特征向量。

正则曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的坐标网既是正交网，又是渐近网时，即 $F=0$，$L=N=0$。得出它的特征值方程为

$$\lambda^2-\frac{M^2}{EG}=0,$$

从此方程可解得

$$\lambda_1=-\frac{M}{\sqrt{EG}}\text{ 或 }\lambda_2=\frac{M}{\sqrt{EG}}.$$

既是正交网，又是渐近网的曲面最典型的曲面就是正螺面。

例 4.2 求正螺面 $S:\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos,u\sin v,v)$ 在原点 $(0,0,0)$ 处的 Weingarten 变换下的特征值和单位特征向量。

解 1) 类似例 4.1 中的 1)，可求得第一基本量 E，F，G 和第二基本量 L，M，N 分别为

$$E(u,v)=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=1,\ \ F(u,v)=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0,\ \ G(u,v)=u^2+1;$$

$$L(u,v)=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \ M(u,v)=\boldsymbol{r}(u,v)\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}},\ \ N(u,v)=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

2) 再求得 Weingarten 变换在原点 $(0,0,0)$ 的 Weingarten 矩阵。

在 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 处所对应为

$$\begin{cases}u\cos v=0\\ u\sin v=0\\ v=0\end{cases},$$

解之得 $u=v=0$。

此时有

$$E(0,0)=1,\ \ F(0,0)=1,\ \ G(0,0)=1,$$

$$L(0,0)=N(0,0)=0,\ \ M(0,0)=-1.$$

于是

$$\lambda_1=-\frac{M}{\sqrt{EG}}=1\text{ 或 }\lambda_2=\frac{M}{\sqrt{EG}}=-1.$$

设 $\lambda=1$，所对应的特征向量为 ξ_1，则

$$\xi_1=\xi_1^1\boldsymbol{r}_1(0,0)+\xi_1^2\boldsymbol{r}_2(0,0).$$

由 $|\xi_1|^2=1$ 得

$$|\xi_1|^2=(\xi_1^1)^2E(0,0)+2\xi_1^1\xi_1^2F(0,0)+(\xi_1^2)^2G(0,0)=(\xi_1^1)^2+(\xi_1^2)^2=1,$$

即

$$(\xi_1^1)^2+(\xi_1^2)^2=1. \tag{4.3}$$

又因为

$$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^1\\ \xi_1^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1^1\\ \xi_1^2\end{pmatrix},$$

解之得

$$\xi_1^1=-\xi_1^2. \tag{4.4}$$

联立上述(4.3)和(4.4)式解得

$$\begin{cases} \xi_1^1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \xi_1^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \xi_1^1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \xi_1^1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

故 $\lambda = 1$ 对应的单位特征向量为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1^1 \boldsymbol{r}_1(0,0) + \xi_1^2 \boldsymbol{r}_2(0,0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \\ &= -\sqrt{2}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1^1 \boldsymbol{r}_1(0,0) + \xi_1^2 \boldsymbol{r}_2(0,0) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

类似的，设 $\lambda = -1$，所对应的特征向量为 ξ_2，可以解得

$$\begin{cases} \xi_2^1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \xi_2^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \xi_2^1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \xi_2^2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

于是它的单位特征向量分别为

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_2^1 \boldsymbol{r}_1(0,0) + \xi_2^2 \boldsymbol{r}_2(0,0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_2^1 \boldsymbol{r}_1(0,0) + \xi_2^2 \boldsymbol{r}_2(0,0) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \\ &= -\sqrt{2}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

正则曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 的坐标网为曲率网时，即 $F = M = 0$。这类的曲面比较特殊。此时，它的 Weingarten 矩阵为

$$\omega = \begin{pmatrix} \dfrac{L}{E} & 0 \\ 0 & \dfrac{N}{G} \end{pmatrix},$$

由$\left|\lambda I-\omega\right|=0$，得

$$\begin{vmatrix}\lambda-\dfrac{L}{E} & 0\\ 0 & \lambda-\dfrac{N}{G}\end{vmatrix}=0,$$

解之得

$$\lambda_1=\frac{L}{E}\text{ 或 }\lambda_2=\frac{N}{G}.$$

对于这类的正则曲面，它有特征值，但没有单位特征向量，这是因为$F=M=0$，曲面上有脐点，曲面没有单位特征向量，即

设$\lambda=\dfrac{L}{E}$对应的特征向量为ξ_1，则

$$\omega\begin{pmatrix}\xi_1^1\\ \xi_1^2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\xi_1^1\\ \xi_1^2\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\dfrac{L}{E} & 0\\ 0 & \dfrac{N}{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^1\\ \xi_1^2\end{pmatrix}=\frac{L}{E}\begin{pmatrix}\xi_1^1\\ \xi_1^2\end{pmatrix},$$

则会出现

$$\frac{N}{G}=\frac{L}{E},$$

的结果，这是不可能的，即便是代入切平面的考察点，我们都无法保证这样的结论能够成立，因此我们断定该条件下的正则曲面是没有单位特征向量的。这类正则曲面的例子如环面和球面等，下面具体举出环面的例子来加深理解。

例 4.3 求环面

$$\boldsymbol{r}=\left(\left(R+r\cos u\right)\cos v,\left(R+r\cos u\right)\sin v,r\sin u\right),\quad 0\le u<2\pi,\quad 0\le v<2\pi$$

的 Weingarten 变换的单位特征向量。

解 1) 类似例 4.1 中的 1)，可先求出第一、第二基本形式的系数，得

$$E\left(u,v\right)=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=r^2,\quad F\left(u,v\right)=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0,\quad G\left(u,v\right)=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=\left(R+r\cos u\right)^2;$$

$$L\left(u,v\right)=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=r,\quad M\left(u,v\right)=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad N\left(u,v\right)=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\left(R+r\cos u\right)\cos u.$$

所以对应的 Weingarten 矩阵为

$$\omega=\begin{pmatrix}\dfrac{L}{E} & 0\\ 0 & \dfrac{N}{G}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r} & 0\\ 0 & \dfrac{\cos u}{R+r\cos u}\end{pmatrix},$$

依照上文的讨论可直接得到关于ω的特征值分别为

$$\lambda_1 = \frac{1}{r} \text{ 或 } \lambda_2 = \frac{\cos u}{R + r\cos u}.$$

设 $\lambda = \frac{1}{r}$ 对应的特征向量为 ξ_1，由

$$\omega\begin{pmatrix}\xi_1^1 \\ \xi_1^2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\xi_1^1 \\ \xi_1^2\end{pmatrix}$$

知

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R + r\cos u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^1 \\ \xi_1^2\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}\xi_1^1 \\ \xi_1^2\end{pmatrix},$$

这样会有

$$\frac{\cos u}{R + r\cos u} = \frac{1}{r},$$

显然这是不合理的，故环面没有 Weingarten 变换的单位特征向量。

同理设 $\lambda = \frac{\cos u}{R + r\cos u}$ 对应的特征向量为 ξ_2，也会出现

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos u}{R + r\cos u}$$

的结果。对此，作者也求出球面曲面特征值和特征向量，也是得到相同的结论，因此断定对于 $F = M = 0$ 这类曲面，它们有特征值，但没有特征向量。

5. 结束语

通过对以上几个正则曲面在 Weigarten 变换下的特征值和特征向量求法讨论，我们可以认识求 Weingarten 变换下曲面的特征值和特征向量，它需要考虑到曲面切平面上考察点，此时曲面的第一和第二基本形式的基本量在其中发挥了很大的作用。特别地是两者在特征向量的求解方法和表达方式上在本质上是不同的。这就要求学生严格掌握好 Weigarten 变换定义的含义，避免混淆两者之间的本质。

基金项目

广西民族大学研究生教育创新项目[gxun-chxzs2018037]。

参考文献

[1] 王萼芳, 石生明, 高等代数-3 [M], 北京: 高等教育出版社, 2003.
[2] 徐克龙. 浅谈矩阵的特征向量特征值的意义[J]. 科技创新与应用, 2013(30): 297-297.
[3] 王幼宁, 刘继, 微分几何讲义[M], 北京: 北京大学出版社, 2006: 113-116.
[4] 吴春生. 浅议线性变换与矩阵的特征值与特征向量的关系[J]. 连云港师范高等专科学报, 2004(4): 75-76.
[5] 梅向明, 黄敬之, 微分几何-2 [M], 北京: 高等教育出版社, 2004.
[6] 智婕. 二阶矩阵特征值和特征向量的快速求法[J]. 洛阳师范学院学报, 2014(5): 5-7.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org