Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(4), 486-491
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.94065

Discussion on the Least-Squares Method

Jiaxing Miao

School of Mathematics and Information, Zhejiang Ocean University, Zhoushan Zhejiang
Email: 1350661072@qq.com

Received: May 27th, 2019; accepted: Jun. 6th, 2019; published: Jun. 19th, 2019

Abstract

In algebra, there are many methods for the calculation of the maximum common factor of polynomial, and there are few narratives for the minimum double. In this paper, three kinds of calculation methods of minimum double type are analyzed and demonstrated, and the corresponding examples are verified.

Keywords

Polynomial, Least Common Multiple, Greatest Common Factor

关于最小公倍式求法的讨论

苗嘉兴

浙江海洋大学数理与信息学院，浙江 舟山
Email: 1350661072@qq.com

收稿日期：2019年5月27日；录用日期：2019年6月6日；发布日期：2019年6月19日

摘 要

在代数学中，关于多项式的最大公因式的计算有较多的方法，而对于最小公倍式的叙述较少。本文将对最小公倍式的三种计算方法展开分析和论证，并进行相应的例题验证。

关键词

多项式，最小公倍式，最大公因式

文章引用：苗嘉兴. 关于最小公倍式求法的讨论[J]. 理论数学, 2019, 9(4): 486-491.
DOI: 10.12677/pm.2019.94065

1. 引言及预备知识

最小公倍式是最小公倍数概念的延伸，是由多项式中的最大公因式推导得出。求最小公倍式是分式运算中通分的基础。在计算最小公倍式的过程中，为保证计算结果的准确性与快速性，不同的情景应当使用不同的计算方法，即对于具体问题，根据所给多项式的条件，选取恰当的方法。文中给出了三种计算最小公倍式的方法，分别为根据定义以及与最大公因式的联系求解、利用因式分解法求解、利用矩阵的初等变换求解。

为了叙述方便，对符号进行如下约定：$p[x]$ 表示系数在数域 P 上的多项式；$m(x)$ 表示为 $f(x)$，$g(x)$ 的最小公倍式；$d(x)$ 表示 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式；$[f(x),g(x)]$ 表示 $f(x)$，$g(x)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式；$(f(x),g(x))$ 表示 $f(x)$，$g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式；$M(P(x))$ 表示所有多项式元素的系数在数域 P 上的多项式矩阵。

首先给出相关的定义及引理。

定义 1 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $p[x]$ 中的任意两个多项式，若存在 $m(x)$ 满足：

1) $m(x)\in p[x]$；

2) $f(x)\mid m(x)$，$g(x)\mid m(x)$；

3) $f(x)$，$g(x)$ 的任一个公倍式 $h(x)$，都有 $m(x)\mid h(x)$，

则称 $m(x)$ 为 $f(x)$，$g(x)$ 的最小公倍式[1]。

定义 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $p[x]$ 中的任意两个多项式，$p[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式，若它满足下面的两个条件：

1) $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式；

2) $f(x)$，$g(x)$ 的公因式都是 $d(x)$ 的因式。

引理 1： 数域 P 上若多项式 $f(x)$ 次数大于等于 1，则 $f(x)$ 可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积，唯一性则是指，若存在两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

则必有 $s=t$，且适当排列因式的次序后得

$$p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s,$$

其中 $c_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 为非零常数[2]。

引理 2： 对一个 $s\times n$ 矩阵 A 作一初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 $s\times s$ 初等矩阵。

引理 3： n 级可逆矩阵 A 是可逆矩阵的充要条件是 A 能表示成一些初等矩阵的乘积

$$A=Q_1Q_2\cdots Q_m.$$

2. 主要结果

下面给出计算多项式的最小公倍式三种方法。

2.1. 根据定义以及最小公倍式与最大公因式的联系求解

定理 1 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $p[x]$ 中的任意两个多项式，设 $d(x)=(f(x),g(x))$，m 为 $f(x)g(x)$ 的首

项系数，则

$$\left[f(x),g(x)\right]=\frac{f(x)g(x)}{md(x)}.$$

证明 因为

$$d(x)=\left(f(x),g(x)\right),$$

所以

$$d(x)\mid f(x),\ d(x)\mid g(x).$$

易知存在 $h_1(x)$， $h_2(x)$ 属于 $p[x]$，可以使得

$$f(x)=h_1(x)d(x),\ g(x)=h_2(x)d(x),$$

$$\left(h_1(x),h_2(x)\right)=1.$$

设 $h(x)$ 为 $f(x)$， $g(x)$ 的任一个最小公倍式，则

$$f(x)\mid h(x),\ g(x)\mid h(x),$$

即

$$h_1(x)\mid\frac{h(x)}{d(x)},\ h_2(x)\mid\frac{h(x)}{d(x)},$$

所以可得

$$h_1(x)h_2(x)\mid\frac{h(x)}{d(x)},$$

即

$$\frac{f(x)g(x)}{d(x)^2}\mid\frac{h(x)}{d(x)}.$$

最后可推出

$$\frac{f(x)g(x)}{d(x)}\mid h(x).$$

又易知 $\frac{f(x)g(x)}{d(x)}$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公倍式，除以 m 得到首项系数 1 的最小公倍式所以由定义得证。

注：所以本方法中求最小公倍式先求出最大公因式，然后用 $f(x)$， $g(x)$ 的乘积除以最大公因式即可。

2.2. 利用因式分解法求解

定理 2 设 $f(x)$， $g(x)$ 是 $p[x]$ 中的两个多项式，由引理 2， $f(x)$， $g(x)$ 都可以唯一分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积

$$f(x)=mp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),\ g(x)=nq_1^{l_1}(x)q_2^{l_2}(x)\cdots q_t^{l_t}(x),$$

其中 $p_i(x)$， $p_j(x)$ 是数域 P 上首项系数为 1 的不可约多项式($i=1,2,\cdots,s$ ， $j=1,2,\cdots,t$)， r_i,l_j 为非负整数， $m,n\in P$ 。

1) 若对任意的i,j，不存在$p_i(x)=q_j(x)$，即$(f(x),g(x))=1$，则有

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{mn};$$

2) 对任意的i,j，若存在$p_i(x)=q_j(x)$，则令$p_{k_i}(x)=p_i(x)=q_j(x)$，并取$a_k=\max\{r_i,l_j\}$为$p_{k_i}(x)$的次数，则有

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{mn\prod_{k=1}^{M}p_{k_i}^{r_i+l_j}(x)}\cdot\prod_{k=1}^{M}p_{k_i}^{a_k}(x).$$

证明 对于第一种情况结论显然。下述证明第二种情况：还是利用第一种方法，易知，只需证明下列式子即可

$$(f(x),g(x))=\frac{\prod_{k=1}^{M}p_{k_i}^{r_i+l_j}(x)}{\prod_{k=1}^{M}p_{k_i}^{a_k}(x)},$$

即$f(x)$，$g(x)$的最大公因式为它们的全体相同重因式取较低次幂的乘积，取

$$d(x)=\frac{\prod_{k=1}^{M}p_{k_i}^{r_i+l_j}(x)}{\prod_{k=1}^{M}p_{k_i}^{a_k}(x)},$$

可以很清楚的知道① $d(x)\mid f(x);d(x)\mid g(x)$；② $f(x)$，$g(x)$的任意其他公因式都是$d(x)$的因式；所以由最大公因式的定义可得，得证。

注：很多情况下，多项式进行因式分解很复杂繁琐，分解不易，因此使用此方法有一定的局限性。

2.3. 利用矩阵的初等变换求解

定理 3 设$f(x)$，$g(x)$是$p[x]$中的任意两个非零多项式，令矩阵

$$A=\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ g(x) & g(x) \end{pmatrix},$$

则A可经过一系列的初等变换得到R，使得

$$R=\begin{pmatrix} d(x) & h(x) \\ 0 & m(x) \end{pmatrix},$$

其中$d(x)$为最大公因式，$m(x)$即为所求的最小公倍式[3]。

证明 由引理 2 和引理 3 可知，对多项式矩阵进行一次初等变换等同于左乘一个多项式矩阵，那么有限次的初等变换也可表现为左乘一个可逆矩阵，则证明上述方法只需证存在一个可逆矩阵$B\in M(P(x))$，使得$BA=R$即可。

易知存在$u(x),v(x)\in P(x)$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))=d(x),$$

取

$$B=\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u_1(x) & v_1(x) \end{pmatrix},$$

其中令 $u_1(x)=\dfrac{-g(x)}{md(x)}$，$v_1(x)=\dfrac{f(x)}{md(x)}$，$m$ 为 $f(x)g(x)$ 的首项系数，则

$$BA=\begin{pmatrix} d(x) & v(x)g(x) \\ 0 & \dfrac{f(x)g(x)}{md(x)} \end{pmatrix}.$$

根据方法 1 的公式可得

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{md(x)},$$

下证多项式矩阵 B 可逆

$$|B|=\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u_1(x) & v_1(x) \end{vmatrix}=u(x)v_1(x)-u_1(x)v(x)$$

$$=u(x)*\frac{f(x)}{md(x)}-\frac{-g(x)}{md(x)}*v(x)$$

$$=\frac{u(x)f(x)+v(x)g(x)}{md(x)}=\frac{1}{m}\neq 0$$

因此多项式矩阵 B 可逆，所以上述得证。

3. 举例验证

例 1 设 $f(x)=x^2+2x+1$，$g(x)=x^3+x^2$，用三种方法求 $[f(x),g(x)]$。

方法 1 运用辗转相除法得最大公因式 $d(x)=x+1$，那么

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{md(x)}=\frac{(x^2+2x+1)(x^3+x^2)}{x+1}=x^4+2x^3+x^2.$$

方法 2 $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$，

$$g(x)=x^3+x^2=x^2(x+1),$$

所以

$$[f(x),g(x)]=x^2(x+1)^2=x^4+2x^3+x^2.$$

方法 3 设

$$A=\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ g(x) & g(x) \end{pmatrix},$$

则对 A 进行一系列的初等变换如下

$$A=\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ g(x) & g(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+2x+1 & 0 \\ x^3+x^2 & x^3+x^2 \end{pmatrix}\xrightarrow{(1)*(-x)+(2)}\begin{pmatrix} x^2+2x+1 & 0 \\ -x^2-x & x^3+x^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)*1+(1)}\begin{pmatrix} x+1 & x^3+x^2 \\ -x^2-x & x^3+x^2 \end{pmatrix}\xrightarrow{(1)*x+(2)}\begin{pmatrix} x+1 & x^3+x^2 \\ 0 & x^4+2x^3+x^2 \end{pmatrix}$$

4. 结论

综上所述，用以上三种方法都可以有效求解多项式的最小公倍式，当然三种方法中第二种方法有着一定的局限性，所以要慎用。

参考文献

[1] 王萼芳, 石生明. 高等代数第四版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 1-42.

[2] 李师正. 多项式代数[M]. 济南: 山东人民出版社, 1981: 1-87.

[3] 王新民. 最大公因数与最小公倍数的矩阵求法[J]. 潍坊学院学报, 2002, 2(2): 42-44.