Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(5), 557-562
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.95074

Congruences on Normal Cryptic rpp Semigroups

Wenjuan Guo[1], Xiaojiang Guo[2]

[1]School of Education, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
[2]College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: 584753648@qq.com, xjguo@jxnu.edu.cn

Received: Jun. 13th, 2019; accepted: Jul. 2nd, 2019; published: Jul. 9th, 2019

Abstract

The aim of this note is to study congruences on cryptic rpp semigroups. Some properties of traces of L^*-unary congruences on this class of semigroups are obtained. Also, some special cases are considered.

Keywords

rpp Semigroup, Cryptic rpp Semigroup, Unary Congruence, Trace

密码rpp半群上的同余

郭文娟[1]，郭小江[2]

[1]江西师范大学教育学院，江西 南昌
[2]江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: 584753648@qq.com, xjguo@jxnu.edu.cn

收稿日期：2019年6月13日；录用日期：2019年7月2日；发布日期：2019年7月9日

摘　要

本文的主要目的是研究密码rpp半群的同余，得到了这类半群上的L^*-酉同余迹的一些性质。另外，也考虑了一些特殊L^*-酉同余。

关键词

rpp半群，密码rpp半群，酉同余，迹

文章引用: 郭文娟, 郭小江. 密码 rpp 半群上的同余[J]. 理论数学, 2019, 9(5): 557-562.
DOI: 10.12677/pm.2019.95074

1. 引言和准备

称半群 S 为右主投射半群(简称 rpp 半群)，如果对于任意的 $a \in S$，作为 S^1-系，aS^1 总是投射的。对偶地，定义左主投射半群(lpp 半群)。作为完全正则半群(completely regular semigroup)的推广，郭聿琦，岑嘉评，朱聘瑜[1]定义了强 rpp 半群(strongly rpp semigroup)。之后，有一系列论文从事这一课题的研究(参见，[2]-[22])。类似于密码群(cryptogroup)，郭小江，杨艳萍[12] [20]定义了密码 rpp 半群(cryptic rpp semigroup)，并且给出了这类半群的结构。同余理论是半群理论的重要组成部分，同余性质可以很好地表达半群的结构信息，因此研究半群上的同余是有意义的。本文将考虑密码 rpp 半群的同余问题。事实上，对密码 rpp 半群的同余理论，已经做了些探索(见[8])。

作为通常 Green-关系的推广，我们有

$$aL^*b \Leftrightarrow \left(\forall x, y \in S^1, ax = ay \leftrightarrow bx = by\right).$$

$$aR^*b \Leftrightarrow \left(\forall x, y \in S^1, xa = ya \leftrightarrow xb = yb\right).$$

众所周知，L^* 为右同余，R^* 为左同余。一般地，$L \subseteq L^*$，$R \subseteq R^*$。但当 a，b 都是正则元时，$aL(R)b$ 当且仅当 $aL^*(R^*)b$。等价地，半群 S 为 rpp 半群当且仅当对于任意的 $a \in S$，都存在幂等元 e 使得 aL^*e。易知，正则半群是 rpp 半群。

定义 1.1： 一个 rpp 半群 S 称为强 rpp 半群(strongly rpp semigroup)，如果对于任意的 $a \in S$，都存在惟一幂等元 a^0，使得 aL^*a^0 且 $a = aa^0$。

对偶地，定义强 lpp 半群(strongly lpp semigroup)。为更好地研究强 rpp 半群，郭小江，郭聿琦，岑嘉评[5] [6]定义了如下关系。令 S 为强 rpp 半群，$a,b \in S$，定义

$$a\bar{R}b \Leftrightarrow a^0Rb^0; \bar{H} = L^* \cap \bar{R}; D^{(l)} = L^* \vee R.$$

郭小江，郭聿琦，岑嘉评证明了：

1) $a\bar{H}a^0$；
2) $D^{(l)} = R \circ L^*$；
3) 对于任意的正则元 $a,b \in S$，$aD(H)b \Leftrightarrow aD^{(l)}(\bar{H})b$。

一般地，$\bar{R}$ 不是 S 上的左同余。如果 $\bar{R}$ 为 S 上的左同余，则称 S 为超 rpp 半群(super rpp semigroup) (见[6])。事实上，一个强 rpp 半群为超 rpp 半群的充分必要条件是它上的 $D^{(l)}$ 关系为半格同余。

定义 1.2： 强 rpp 半群 S 称为密码 rpp 半群(cryptic rpp semigroup)，如果 $\bar{H}$ 为 S 上的同余。finition

郭小江，杨艳萍[12]指出：密码 rpp 半群都是超 rpp 半群，并且密码群恰为正则的密码 rpp 半群。关于密码群，参见[23])。叶火平，郭俊颖，郭小江[21]证明了：一个超 rpp 半群的所有正则元构成一个完全正则半群。这表明，一个密码 rpp 半群的所有正则元构成一个密码群。

定义 1.3： 半群 S 上的同余 ρ 称为 L^*-同余(L^*-congruence)，如果对于任意的 $a,b \in S$，aL^*b 蕴含着 $a\rho L^*b\rho$。

定义 1.4： 强半群 S 上的同余 ρ 称为酉同余(unary congruence)，如果对于任意的 $a,b \in S$，$a\rho = b\rho$ 蕴含着 $a^0\rho = b^0\rho$。

引理 1.5 ([8]，引理 7)：令 S 为强 rpp 半群。若 ρ 为 S 上的 L^*-酉同余，则 S/ρ 为强 rpp 半群，且 $E(S/\rho)=E(S)\rho$，$(a\rho)^0=a^0\rho$。

本文将采用教科书[24]的概念和术语，未给出定义的可参见文献[6]。

2. 迹

本节将研究密码 rpp 半群上同余的性质。首先，回忆同余迹的定义。

定义 2.1：令 S 为半群，ρ 为 S 上的同余。称 $E(S)$(S 的幂等元集)上的等价关系 $tr\rho=\rho|_{E(S)}$ 为同余 ρ 的迹。

为得到密码 rpp 半群同余迹的一般性质，引进如下概念。

定义 2.2：E(S)上等价关系 τ 称为正规的(nomral)，如果

(T) $e\tau f, x,y\in S^1 \Rightarrow (xey)^0\,\tau\,(xfy)^0$.

进一步，$E(S)$上的正规等价关系 τ 称为真的(proper)，如果 τ 既不为恒等关系 ε，也不是泛关系 ω。

明显，$E(S)$上的恒等关系 ε 和泛关系 ω 都是正规的。记 $JN(S)$为 $E(S)$上所有正规等价关系所组成的集合，并赋予集合的包含关系。

据定义，不难验证，有如下推论：

推论 2.3：$E(S)$上的正规等价关系的交还是正规的。

基于推论 2.3，可以证得下面引理。

引理 2.4：关于如下运算：对于 $A\subseteq JN(S)$,

$$\bigwedge_{\tau\in A}\tau=\bigcap_{\tau\in A}\tau,\quad \bigvee_{\tau\in A}\tau=\left\{\theta\in JN(S):\coprod_{\tau\in A}\tau\subseteq\theta\right\}$$

$JN(S)$是完备格。

证明：据推论 2.3，$\bigcap_{\tau\in A}\tau$ 与 $\bigcap\left\{\theta\in JN(S):\coprod_{\tau\in A}\tau\subseteq\theta\right\}$ 均为 $E(S)$上的正规等价关系。因此

$$\bigwedge_{\tau\in A}\tau=\bigcap_{\tau\in A}\tau$$

和

$$\bigvee_{\tau\in A}\tau=\bigcap\left\{\theta\in JN(S):\coprod_{\tau\in A}\tau\subseteq\theta\right\}$$

都是 $JN(S)$上代数运算。据此，易知：$(JN(S),\wedge,\vee)$ 为一个完备格。

下面是本节的主要结果。

定理 2.5：令 S 为密码 rpp 半群。对于 $E(S)$上的等价关系 τ，以下各款等价：

(i) τ 为正规的；

(ii) $\tau=tr\left(\bar{H}\tau\bar{H}\right)^0$，其中 $\left(\bar{H}\tau\bar{H}\right)^0$ 为含于 $\bar{H}\tau\bar{H}$ 的最大同余；

(iii) 存在 S 上的 L^*-酉同余 ρ，使得 $\tau=tr\rho$；

(iv) $\tau=tr\tau^*$，其中 r^* 为包含 τ 的最小 L^*-酉同余。

而且，如果条件(i)~(iv)满足，那么 S 上以 τ 为迹的 L^*-酉同余均包含在区间 $\left[\tau^*,\left(\bar{H}\tau\bar{H}\right)\right]$。

证明：(i)⇒(ii)显然，$\bar{H}\tau\bar{H}$ 为自反的，对称的。令 $(a,b)\in\bar{H}\tau\bar{H}$ 且 $(b,c)\in\bar{H}\tau\bar{H}$，则存在 $x,y,w,z\in S$ 使得 $a\bar{H}x\tau y\bar{H}b\bar{H}w\tau z\bar{H}c$。而 $x\bar{H}y,y,w\in E(S)$，进而 $y=w$，因此 $x\tau z$，故 $a\bar{H}\tau\bar{H}c$。

这样，$\bar{H}\tau\bar{H}$ 为传递的。

记 $\lambda=\left(\bar{H}\tau\bar{H}\right)^0$。令 $e\tau f$，则对于任意的 $x,y\in S^1$，$xey\bar{H}\,(xey)^0\,\tau\,(xfy)^0\,\bar{H}xfy$，进而 $xey\bar{H}\tau\bar{H}xfy$，从

而 $\tau\subseteq\lambda$，显然 $\tau\subseteq tr\lambda$，反之，若 $gt\tau\lambda h$，则 $g\bar{H}\tau\bar{H}h$，进而存在 $p,q\in E(S)$ 使得 $g\bar{H}p\tau q\bar{H}h$，从而 $gHp\tau qHh$。但一个 H-类最多含有一个幂等元，从而 $g=p,h=q$，故 $g\tau h$，这样 $tr\lambda\subseteq\tau$。现在证明了：$\tau=tr\lambda$。

(ii)⇒(iii)。用(i)⇒(ii)证明中的符号，仅需证明：λ 为 L^*-酉同余。

令 $x\in S$，由 $x=xx^0$，知 $x\lambda=(x\lambda)(x^0\lambda)$。对于任意的 $u,v\in S$，

1) 若 $(x\lambda)(u\lambda)=(x\lambda)(v\lambda)$，即 $(xu)\lambda=(xv)\lambda$，则对于任意的 $a,b\in S^1$，$axub\bar{H}\tau\bar{H}axvb$，从而存在 $e,f\in E(S)$ 使得 $axub\bar{H}e\tau f\bar{H}axvb$。但 $\bar{H}$ 为 S 上的同余，于是

$$ax^0ub\bar{H}axub\bar{H}e\tau f\bar{H}axvb\bar{H}ax^0ub\text{。}$$

因此 $(x^0\lambda)(u\lambda)=(x^0u)\lambda=(x^0v)\lambda=(x^0\lambda)(v\lambda)$。

2) 若 $(x\lambda)(u\lambda)=(xu\lambda)=x\lambda$，则 $(x\lambda)(u\lambda)=(x\lambda)(x^0\lambda)$，再根据(1)，有

$$(x^0\lambda)(u\lambda)=(x^0\lambda)(x^0\lambda)=(x^0x^0)\lambda=x^0\lambda$$

综合(1)，(2)，已经证明了：对于任意的 $u\lambda,v\lambda\in(S/\lambda)^1$，

$$(x\lambda)(u\lambda)=(x\lambda)(v\lambda)\Rightarrow(x^0\lambda)(u\lambda)=(x^0\lambda)(v\lambda).$$

从而 $x\lambda L^*x^0\lambda$，故 λ 为 L^*-同余。

设 $x\lambda=y\lambda$，那么 $g,h\in E(S)$ 使得 $x\bar{H}g\tau h\bar{H}y$，进而 $x^0\bar{H}x\bar{H}g\tau h\bar{H}y\bar{H}y^0$，于是 $x^0Hg\tau hHy^0$，从而 $x^0=g$，$y^0=h$，因此 $(x^0,y^0)\in\tau\subseteq tr\lambda\subseteq\lambda$。故 λ 为酉同余。

(iii)⇒(iv)。明显，$\tau^*=(tr\rho)^*\subseteq\rho$，进而 $tr\tau^*\subseteq tr\rho$。若 $(e,f)\in tr\rho$，则 $(e,f)\in\tau$，从而 $e\tau^*f$，这样 $tr\rho\subseteq tr\tau^*$，故 $tr\tau^*=tr\rho=\tau$。

(iv) ⇒(i)。因为

$$\begin{aligned}&e\tau f\Rightarrow e\tau^*f\\&\Rightarrow xey\tau^*xfy \text{ 对于任意 } x,y\subseteq S^1\\&\Rightarrow(xey)^0\,\tau^*(xfy)^0\quad(\text{由于 }\tau^*\text{为酉同余})\\&\Rightarrow(xey)^0\,\tau(xfy)^0\end{aligned}$$

所以 τ 为正规等价关系。

现在假设条件(i)~(iv)成立。令 ρ 为 S 上的 L^*-同余，且 $\tau=tr\rho$，则 $\tau^*=(tr\rho)^*\subseteq\rho$。对于任意的 $a,b\in S$，且 $a\rho b$，由 $a\bar{H}a^0\tau b^0\bar{H}b$，从而 $a\bar{H}\tau\bar{H}b$，因此 $\rho\subseteq\bar{H}\tau\bar{H}$，进而 $\rho\subseteq(\bar{H}\tau\bar{H})^0$。反之，若 $\tau^*\subseteq\rho\subseteq(\bar{H}\tau\bar{H})^0$，则由条件(ii)，(iv)，

$$\tau=tr\tau^*\subseteq tr\rho\subseteq tr(\bar{H}\tau\bar{H})^0=\tau$$

故 $\tau=tr\rho$。

3. 几类 L^*-酉同余

本节考虑密码 rpp 半群上的几类重要同余。

半群 S 上的同余 ρ 称为幂等元分离(idempotent-separating)，如果对于任意 $e,f\in E(S)$，$e\rho f$ 蕴含着 $e=f$。等价地说，ρ 为幂等元分离同余的充分必要条件是 $tr\rho=\varepsilon$ ($E(S)$上的恒等关系)。

命题 3.1：令 S 为密码 rpp 半群，ρ 为 S 上的 L^*-酉同余，则 ρ 为幂等元分离同余的充分必要条件是 $\rho\subseteq\bar{H}$。

证明：(充分性)设 $\rho\subseteq\bar{H}$。对于任意的 $e,f\in E(S)$，若 $e\rho f$，进而 eHf，从而 $e=f$，故 ρ 为幂等

元分离同余。

(必要性)设 ρ 为幂等元分离同余，那么 $tr\rho=\varepsilon$，据定理 2.5，$\rho\subseteq\left(\bar{H}tr\rho\bar{H}\right)^0=\left(\bar{H}\varepsilon\bar{H}\right)^0\subseteq\bar{H}$。

半群 S 上的同余 ρ 称为左消幺半群同余(left cancellative monoid congruence)，如果 S/ρ 为左消幺半群。不难验证，对于 rpp 半群，任一左消幺半群同余都是 L^*-酉同余。

命题 3.2： 令 S 为密码 rpp 半群，ρ 为 S 上的 L^*-酉同余，则 ρ 为左消幺半群同余的充分必要条件是 $tr\rho=\omega$。

证明： 设 ρ 为左消幺半群同余，则 S/ρ 有且仅有一个幂等元。易知，对于任意的 $e\in E(S)$，$e\rho$ 是 S/ρ 的幂等元，因此 $\omega\subseteq\rho$，故 $\omega\subseteq tr\rho\subseteq\omega$，于是 $tr\rho=\omega$。

反之，若 $tr\rho=\omega$，则根据引理 1.5，S/ρ 有且仅有一个幂等元。因此 S/ρ 为幺半群。但 S/ρ 为强 rpp 半群，所以 S/ρ 为左消幺半群，故 ρ 为 S 上的左消幺半群同余。

下面是命题 3.2 的直接推论。

推论 3.3： 令 S 为密码 rpp 半群，则 ω^* 是 S 上的最小左消幺半群 L^*-酉同余。

Rpp 半群 S 称为 C-rpp 半群，如果 $E(S)$在 S 的中心内。等价地，一个半群为 C-rpp 半群的充分必要条件是它为一些左消去幺半群的强半格。值得指出，一个 C-rpp 半群的所有正则元构成一个子半群，并且为 Clifford 半群(即，所有幂等元都在其中心的正则半群)。关于 Clifford 半群，参见([24], p. 93)。

半群 S 上的同余 ρ 称为 S 上的 C-rpp 半群同余，如果 S/ρ 为 C-rpp 半群。

引理 3.4： 令 S 为密码 rpp 半群，ρ 为 S 上的 L^*-酉同余。对于任意的 $a,b\in S$，若 $a\bar{R}b$，则 $a\rho\bar{R}b\rho$。

证明： 由定义，知 a^0Rb^0，于是 $a^0\rho Rb^0\rho$。据引理 1.5，$(a\rho)^0=a^0\rho$，$(b\rho)^0=b^0\rho$。因此 $(a\rho)^0R(b\rho)^0$，从而 $a\rho\bar{R}b\rho$。

命题 3.5： 令 S 为密码 rpp 半群，ρ 为 S 上的 L^*-酉同余，则 ρ 为 C-rpp 半群同余的充分必要条件是 $tr\rho=trD^{(l)}$。

证明： (必要性)设 ρ 为 C-rpp 半群同余，若 $(e,f)\in D^{(l)}$，于是存在 $c\in S$ 使得 $eLcRf$，从而 $e\rho Lc Rf\rho$。但 S/ρ 的所有正则元组合 Clifford 子半群，所以 $e\rho=f\rho$，因此 $trD^{(l)}\subseteq tr\rho$。反之，记 $RegS$ 为 S 的所有正则元组合的集合。由 S 为密码 rpp 半群，知 S 为超 rpp 半群，于是 $RegS$ 为完全正则子半群，易知，$\rho|RegS$ 为 $RegS$ 上的 Clifford 半群同余，再据([23], p. 257, Exercises VI.2.13(i))，$tr\rho|RegS=trD$。若有 $(e,f)\in tr\rho$，显然，$(e,f)\in tr\rho|RegS$，于是 $(e,f)\in D\subseteq D^{(l)}$，从而 $tr\rho\subseteq trD^{(l)}$。故 $tr\rho=trD^{(l)}$。

(充分性)假设 $tr\rho=trD^{(l)}$。注意到，$RegS$ 为密码群，再根据引理 1.5，要证 S/ρ 为 C-rpp 半群，仅需证：$Reg\,S/\rho|RegS$ 为 Clifford 半群。又 $tr\rho=trD^{(l)}$ 蕴含着 $tr\rho|RegS=trD|RegS$，再由([23], p. 257, Exercises VI.2.13(i))，$Reg\,S/\rho|RegS$ 为 Clifford 半群。从而 S/ρ 为 C-rpp 半群，即 ρ 为 C-rpp 半群同余。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761034, 11361027, 11661042)和江西省自然科学基金项目(20161BAB201018)资助。

参考文献

[1] Guo, Y.Q., Shum, K.P. and Zhu, P.Y. (1995) The Structure of Left C-rpp Semigroups. *Semigroup Forum*, **50**, 9-23. https://doi.org/10.1007/BF02573502

[2] Guo, J.Y., Guo, X.J. and Ding, J.Y. (2015) Completely $J^{(\ell)}$-Simple Semigroups. *Advances in Mathematics* (*China*), **44**, 710-718.

[3] Guo, J.Y., Guo, X.J. and Ding, J.Y. (2015) Free Completely $J^{(\ell)}$-Simple Semigroups. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **31**, 1086-1096. https://doi.org/10.1007/s10114-015-4117-8

[4] Guo, X.J. (2000) The Structure of NBe-rpp Semigroups. *Northeastern Mathematical Journal*, **4**, 398-404.

[5] Guo, X.J., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2008) Rees Matrix Theorem for $D^{(\ell)}$-Simple Strongly Rpp Semigroups. *Asian-European Journal of Mathematics*, **1**, 215-223. https://doi.org/10.1142/S1793557108000205

[6] Guo, X.J., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2010) Super Rpp Semigroups. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **41**, 505-533. https://doi.org/10.1007/s13226-010-0030-0

[7] 郭小江. 满足置换恒等式的强 rpp 半群的结构[J]. 科学通报, 1996, 41(18): 1647-1650.

[8] 郭俊颖, 郭小江, 叶火平. 正规密码 rpp 半群上的同余[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2017, 41(4): 360-366.

[9] Guo, X.J., Jun, Y.P. and Zhao, M. (2010) Pseudo-C-Rpp Semigroups. *Acta Mathematica Sinica*, **26**, 629-646. https://doi.org/10.1007/s10114-010-8030-x

[10] Guo, X.J., Shum, K.P. and Guo, Y.Q. (2001) Perfect Rpp Semigroups. *Communications in Algebra*, **29**, 2447-2459. https://doi.org/10.1081/AGB-100002400

[11] 郭小江, 吴爱军. 关于左 C-Rpp 半群的一点注记[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(4): 283-286.

[12] Guo, X.J. and Yang, Y.P. (2013) Cryptic Rpp Semigroups. *Advances in Mathematics* (*China*), **42**, 465-474.

[13] Guo, X.J., Zhao, M. and Shum, K.P. (2008) Wreath Product Structure of Left C-Rpp Semigroups. *Algebra Colloquium*, **15**, 101-108. https://doi.org/10.1142/S1005386708000102

[14] 郭聿琦, 岑嘉评, 朱聘瑜. 左 C-rpp 半群的结构[J]. 科学通报, 1992(4): 292-294.

[15] 郭聿琦. 左 C-rpp 半群的右对偶[J]. 科学通报, 1997(19): 1599-1603.

[16] He, Y., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2004) The Construction of Orthodox Super Rpp Semigroups. *Science in China*, **17**, 552-565. https://doi.org/10.1360/02ys0365

[17] Shum, K.P., Guo, X.J. and Ren, X.M. (2000) ${(\ell)}$-Green's Relations and Perfect Rpp Semigroups. In: Sunada, T., Polly, W.S. and Yang, L., Eds., *Proceedings of the* 3*th Asian Mathematical Conference*, 604-613.

[18] Shum, K.P. and Ren, X.M. (2004) The Structure of Right C-Rpp Semigroups. *Semigroup Forum*, **68**, 280-292. https://doi.org/10.1007/s00233-003-0012-1

[19] Wang, J.Q., Guo, X.J. and Qiu, X.W. (2014) Regular OS-Rpp Semigroups. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **37**, 597-610.

[20] Yang, Y.P. and Guo, X.J. (2009) Orthocryptic Rpp Semigroups. *International Mathematical Forum*, **42**, 2065-2074.

[21] 叶火平, 郭俊颖, 郭小江. 超 rpp 半群的核心[J]. 理论数学, 2016(6): 172-176.

[22] 王莹, 郭俊颖, 吴灏驰, 郭小江. 密码 rpp 半群的若干特征[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2019, 43(1): 22-27.

[23] Petrich, M. and Reilly, N.R. (1999) Completely Regular Semigroups. John Wiley & Sons, New York.

[24] Howie, J.M. (1976) An Introduction to Semigroup Theory. Academic Press, London.