Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(5), 568-577
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.95076

Finte Nonabelian Simple Groups and the S_3-Conjecture

Yuyue Luo, Yanjun Liu*

College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: 1181682429@qq.com, *364749235@qq.com

Received: Jun. 18th, 2019; accepted: Jul. 4th, 2019; published: Jul. 11th, 2019

Abstract

The S_3-conjecture is a long-satnding open problem in the theory of finite groups. This paper shows that any finite nonabelian simple group has at least two conjugacy classes of same size, and so is not a counterexample to the S_3-conjecture.

Keywords

Finite Groups, The S_3-Conjecture, Simple Groups, Conjugacy Classes

有限非交换单群与S_3-猜想

罗雨玥，刘燕俊*

江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: 1181682429@qq.com, *364749235@qq.com

收稿日期：2019年6月18日；录用日期：2019年7月4日；发布日期：2019年7月11日

摘 要

有限群论中S_3-猜想是一个非常古老的公开问题。本文证明了有限非交换单群至少有2个长度相同的共轭类，因此它们都不是S_3-猜想的反例。

关键词

有限群论，S_3-猜想，单群，共轭类

*通讯作者。

文章引用: 罗雨玥, 刘燕俊. 有限非交换单群与 S_3-猜想[J]. 理论数学, 2019, 9(5): 568-577.
DOI: 10.12677/pm.2019.95076

1. 引言

有限群论是数学的一个分支，是代数学的基础组成部分。迄今为止，有限群论已经日渐完善，但仍有越来越多的问题尚待解决。近几十年，群论中的大多数公开问题及其进展都收集在 The Kourovka Notebook 系列丛书中，目前已经到第 19 版，详见[1]。在有限群论研究中，一个非常本质的课题是如何理解共轭类，其中 Burnside、Poland、Ito 等数学家特别从数量角度研究共轭类长对于群结构的影响。关于这方面研究，有一个老而著名的问题，现被称为 S_3-猜想，见([1], 16.3)：

S_3-猜想： 若有限群 G 的共轭类长度各不相同，则 $G \cong S_3$。

1994 年，我国著名有限群论专家张继平教授[2]证明了可解情形下 S_3-猜想。1995 年 Knörr，Lempken 以及 Thielcke [3]也独立证明了这一情形。要特别提到的是，1994 年，Arad，Muzychuk，Oliver [4]应用特征标理论证明了如果 G 是 S_3-猜想的极小反例，那么 G 的非交换底柱(socle)要么平凡要么同构于下列群之一：A_5^a，$PSL(3,4)^e$，其中 $3 \le a \le 5$，$1 \le e \le 10$。根据单群分类定理以及有限单群的共轭类长，本文主要证明下述定理：

定理 1： 任一非交换有限单群至少有两个长度相同的共轭类。因此，若非交换有限群 G 的共轭类长度各不相同，则 G 非单。

2. 预备知识

为了方便起见，本文用到的已知结论均以引理的形式给出。除特别指出，所用的记号都是标准的，参见[5]。

引理 2.1： 若 $n > 19$，则 $\phi(n)^2 > 2n$，其中 ϕ 为欧拉函数。

引理 2.2： 令 $n = \dfrac{q^{l+1}-1}{(q-1)\gcd(l+1,q-1)}$，则 $n > 2(l+1)^2$，除非 $(l+1,q)$ 为下列形式：

$(2,4),(2,5),(2,7),(2,9),(2,11),(2,13),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(5,2),(6,2)$。

证明： 这是([6]，引理 2)。 □

引理 2.3： 令 $n = \dfrac{q^{l+1}-(-1)^{l+1}}{(q+1)\gcd(l+1,q+1)}$，其中 $l+1 \ge 3$，则 $n > 2(l+1)^2$，除非 $(l+1,q)$ 下列形式：

$(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2),(8,2),(9,2),(3,3),(4,3),(3,4),(5,4),(3,5)$。

证明： 这是([6]，引理 3)。 □

引理 2.4： 令 q 为素数方幂，l 为正整数，则 $\phi(q^l-1) \ge 24(l+1)$，除非 (l,q) 为下列形式：

1) $l=2, q \in \{2,3,4,5,7,8,9,11,13\}$；2) $l=3, q \in \{2,3,4,5\}$；3) $l \in \{4,5\}, q \in \{2,3\}$；4) $l \in \{6,7,8\}, q=2$。

证明： 这是([6]，引理 6)。 □

引理 2.5： 设 $G = PSL(n,q), PSU(n,q), PSP(2n,q), PSO(2n+1,q), PSO^+(2n,q)$ 或 $PSO^-(2n,q)$，则 G 有一个半单元素，阶为 $(q^n-1)/n(q-1), (q^{n/2}-1)/n, (q^n-1)/2, (q^n-1)/2, (q^n-1)/2, (q^{n-1}-1)/2$，并且至多分别共轭 $n, n, 2n, 2n+1, 2n, 2n$ 个半单元素的幂。

证明： 这是([7]，推论 3.4)。 □

引理 2.6： 设 $\sigma \in A_n$，K_σ 是 A_n 中所有与 σ 有相同类型置换的集合，考虑 σ 在 S_n 中的中心化子 $C_{S_n}(\sigma)$，

则：① 当 $C_{S_n}(\sigma)$ 含有一个奇置换时，K_σ 是 A_n 的一个共轭类；② 当 $C_{S_n}(\sigma)$ 不含有奇置换时，K_σ 在 A_n 中分裂为以下两个长度相同的共轭类：

$$K'_\sigma=\left\{\tau\sigma\tau^{-1}\middle|\tau\in S_n,\tau\text{是偶置换}\right\};\quad K''_\sigma=\left\{\tau\sigma\tau^{-1}\middle|\tau\in S_n,\tau\text{是奇置换}\right\}.$$

证明：这是([10]，定理 2.7.6)。□

3. 有限单群共轭类长

根据单群分类定理，有限非交换单群为以下群之一：离散单群、交错群、李型单群以及 Tits 单群，详见[8]。

3.1. 离散单群与 Tits 单群

命题 3.1：设 S 为离散单群或 Tits 单群，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明：根据 GAP [9]直接验证可得，具体如表 1。□

3.2. 交错群共轭类长

命题 3.2：对于任意的 $n\geq 5$，交错群 A_n 至少有两个长度相同的共轭类。

证明：当 n 为奇数时，令 $\sigma=(1,2,\cdots,n)$，则 $C_{A_n}(\sigma)=\langle\sigma\rangle$，从而 $C_{A_n}(\sigma)$ 中不含有奇置换。根据引理 2.6，K_σ 在 A_n 中分裂为长度相同的两个共轭类；当 n 为偶数时，令

$$\sigma_1=(1,\cdots,n-2,n-1),\sigma_2=(1,\cdots,n-2,n),$$

则 $\left|C_{A_n}(\sigma_1)\right|=\left|C_{A_n}(\sigma_2)\right|$，此时 A_n 也有两个长度相同的共轭类 $\sigma_1^{A_n}$ 与 $\sigma_2^{A_n}$。命题得证。□

Table 1. Conjugate class lengths of discrete singletons and Tits singletons with multiplicities of at least 2
表 1. 离散单群与 Tits 单群重数至少为 2 的共轭类长

离散单群	共轭类长	离散单群	共轭类长	离散单群	共轭类长
M_{11}	720	Co_1	106609661706240000	R_u	5031936000
M_{12}	8640	Co_2	1410180710400	Suz	21349785600
M_{22}	40320	Co_3	20656944000	$O'N$	14865016320
M_{23}	443520	Fi_{22}	1345036492800	HN	6825772800000
M_{24}	10644480	Fi_{23}	104858217263923200	Ly	772614612000000
J_1	9340	Fi_{24}	11622275085098719641600	Th	2326819074048000
J_2	40320	HS	2217600	B	9032133654840056937342566400000
J_3	3684840	McL	29937600	M	679006239323120063770134373917403997483827200000000
J_4	1314781379486023680	He	143942400	${}^2F_4(2)'$	1123200

3.3. 李型单群的共轭类长

本节我们考察李型单群的共轭类长。李型单群共有 16 族，其中典型单群为

$A_l(q)$ 其中 $l\geq 1$ 且 $(l,q)\neq(1,2),(1,3)$，${}^2A_l(q^2)$ 其中 $l\geq 2$ 且 $(l,q)\neq(2,2)$，$B_l(q)$ 其中 $l\geq 2$、$C_l(q)$ 其中 $l>2$、$D_l(q)$ 其中 $l\geq 4$、${}^2D_l(q^2)$ 其中 $l\geq 3$；

例外单群为

$G_2(q)$其中$q>2$，${}^3D_4(q^3)$，$F_4(q)$，$E_6(q)$，${}^2E_6(q^2)$，$E_7(q)$，$E_8(q)$，${}^2G_2(q^2)$其中$q^2=3^{2m+1}>3$，${}^2B_2(q^2)$其中$q^2=2^{2m+1}>2$，${}^2F_4(q^2)$其中$q^2=2^{2m+1}>2$。

引理 3.3.1：设$S=A_l(q)$，其中$(l,q)\neq(1,2),(1,3)$，$q>1$是素数p的方幂，则S至少有两个长度相同的共轭类。

证明：注意到$S=A_l(q)\cong PSL_{l+1}(q)$。根据([6]，引理 17)，令$q=p^f$，其中$f$为正整数。记$F_{q^a}$是有$q^a$个元素的有限域，$F_{q^a}^*$为$F_{q^a}$的乘法群。由有限域的乘法群为循环群，记$\sigma$为$F_{q^{l+1}}^*$的生成元，则$F_{q^{l+1}}^*=\langle\sigma\rangle$，$o(\sigma)=q^{l+1}-1$。令$\overline{F_p}$为$F_p$的代数闭包。令$G$为域$\overline{F_p}$上的$A_l$型单的单连通代数群，$F$为$G$中 Frobenius 自同态，并记$\hat{G}:=G^F$为$F$作用下的有限不动点群，$\hat{G}:=G^F=SL_{l+1}(q)$。记$(G^*,F^*)$为$(G,F)$的对偶，则$\hat{G}^*=G^{*F^*}=PGL_{l+1}(q)$。

令$M\in\hat{G}^*$，$M=diag\left(\tau,\tau^q,\cdots,\tau^{q^l}\right)$，其中$\tau=\sigma^{q-1}$，则

$$o(\tau)=o\left(\sigma^{q-1}\right)=\frac{o(\sigma)}{\left(o(\sigma),q-1\right)}=\frac{q^{l+1}-1}{q-1}。$$

令$Z=Z(GL)$且$^{-}:GL_{l+1}\left(\overline{F_p}\right)\to G^*$为自然同态，即

$$^{-}:GL_{l+1}\left(\overline{F_p}\right)\to\frac{GL_{l+1}\left(\overline{F_p}\right)}{Z\left(GL_{l+1}\left(\overline{F_p}\right)\right)}=PGL_{l+1}\left(\overline{F_p}\right)=G^*,$$

则$\bar{M}=MZ$，$\langle\bar{M}\rangle=\langle MZ\rangle=\dfrac{\langle M\rangle Z}{Z}\cong\dfrac{\langle M\rangle}{\langle M\rangle\cap Z}$。已知$\left|\langle M\rangle\cap Z\right|=\gcd(l+1,q-1)$，则

$$\left|\langle\bar{M}\rangle\right|=\left|\frac{\langle M\rangle}{\langle M\rangle\cap Z}\right|=\frac{\left|\langle M\rangle\right|}{\left|\langle M\rangle\cap Z\right|}=\frac{\left(q^{l+1}-1\right)/(q-1)}{\gcd(l+1,q-1)},$$

即得$o(\bar{M})=\dfrac{q^{l+1}-1}{(q-1)\gcd(l+1,q-1)}$。

又$\varnothing\neq\left(\bar{M}^{G^*}\right)^{F^*}\subseteq G^{*F^*}=\hat{G}^*$，那么$\bar{M}$在$G^*$及$\hat{G}^*$共轭类相交非空。在它们交集中选取半单元素$s$，$s\in\left(\bar{M}^{G^*}\right)^{F^*}$且$o(s)=o(\bar{M})$，则$s$最多共轭于$l+1$个在$G^*$的$s$的幂，因此对于在$\hat{G}^*$中$s$的本原方幂至少有$\phi\left(\dfrac{q^{l+1}-1}{(q-1)\gcd(l+1,q-1)}\right)\Big/(l+1)$个共轭类，又$|M|=1$，则$s\in S=PSL_{l+1}(q)$。而$PSL_{l+1}(q)\lhd\hat{G}^*$，故$s^{\hat{G}^*}\subseteq PSL_{l+1}(q)$。

要证S至少有两个长度相同的共轭类，即要证

$$\phi\left(\frac{q^{l+1}-1}{(q-1)\gcd(l+1,q-1)}\right)\Big/(l+1)\geq 2,$$

而这等价于证明

$$\phi\left(\frac{q^{l+1}-1}{(q-1)\gcd(l+1,q-1)}\right)\geq 2(l+1).$$

记$n=\dfrac{q^{l+1}-1}{(q-1)\gcd(l+1,q-1)}$，由引理 2.1，2.2 可知$\phi(n)^2>2n>4(l+1)^2$。易知$\dfrac{\phi(n)}{l+1}>2$，故$S$至少

有两个长度相同的共轭类，除了下列情况：$n\le 19$ 及 (l,q) 为下列形式：

$$(2,4),(2,5),(2,7),(2,9),(2,11),(2,13),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(5,2),(6,2).$$

对于这些例外情形，可以直接用 GAP 验证 $\frac{\phi(n)}{l+1}\ge 2$，从而引理得证。 □

引理 3.3.2： 设 $S={}^2A_l(q)$，其中 $l>1$，$q>1$ 是素数 p 的方幂且 $(l,q)\ne(2,2)$，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 注意到 ${}^2A_l(q)$ 又称 ${}^2A_l(q^2),PSU_{l+1}(q),PSU(l+1,q),U_{l+1}(q),{}^2A_l(q,q^2)$，那么算 ${}^2A_l(q)$ 的共轭类及其长度，即算 $U_{l+1}(q)$ 的共轭类及其长度。若 $l+1$ 为奇数，令 ω 为 $F^*_{q^{2(l+1)}}$ 的生成元。$F^*_{q^{2(l+1)}}=\langle\omega\rangle$，$o(\omega)=q^{2(l+1)}-1$，定义 $\tau=\begin{cases}\sigma^{q+1} & 若l为奇\\ \omega^{(q^{l+1}-1)(q+1)} & 若l为偶\end{cases}$，则当 l 为奇数时，

$$o(\tau)=o(\sigma^{q+1})=\frac{o(\sigma)}{(0(\sigma),q+1)}=\frac{q^{l+1}-1}{q+1};$$

当 l 为偶数时，

$$o(\tau)=o\left(\omega^{(q^{l+1}-1)(q+1)}\right)=\frac{o(\omega)}{(o(\omega),(q^{l+1}-1)(q+1))}=\frac{q^{2(l+1)}-1}{(q^{l+1}-1)(q+1)}=\frac{q^{l+1}+1}{q+1}.$$

即 $o(\tau)=\frac{q^{l+1}-(-1)^{l+1}}{q+1}$。令 $N=diag\left(\tau^{(-q)^0},\tau^{(-q)^1},\cdots,\tau^{(-q)^l}\right)$，则 $|N|=1$，从而 $N\in U_{l+1}(q)$。

令 $n=\frac{q^{l+1}-(-1)^{l+1}}{(q+1)(l+1,q+1)}$，由引理 2.3 可知，$\phi(n)^2>(l+1)^2$，从而 $\frac{\phi(n)}{l+1}>2$。因此 S 至少有 2 个长度相同的共轭类，除非 $(l+1,q)$ 为下列形式：

$(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2),(8,2),(9,2),(3,3),(4,3),(3,4),(5,4),(3,5)$。而对于这些例外情形，利用 GAP 直接验证可得当 $(l+1,q)$ 为 $(5,2),(7,2),(8,2),(9,2),(3,3),(3,4),(5,4),(3,5)$ 时 $\frac{\phi(n)}{l+1}\ge 2$。对于剩余情形，即

$$(l+1,q)=(3,2),(4,2),(6,2)\text{ 或 }(4,3),$$

运行 GAP 程序可知 ${}^2A_3(2^2)=U_4(2)$ 有两个长度为 40 的共轭类；${}^2A_3(3^2)=U_4(3)$ 有两个长度为 3360 的共轭类；${}^2A_5(2^2)=U_6(2)$ 有两个长度为 1774080 的共轭类。又由于 ${}^2A_2(2^2)$ 可解无需考虑，故引理得证。 □

引理 3.3.3. 设 $S=B_l(q)$，其中 $l>1$，$q>1$ 是素数 p 的方幂且 $(l,q)\ne(2,2)$，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： $B_l(q)$ 又称 $O_{2l+1}(q)$ 或 $PSO_{2l+1}(q)$，求 $B_l(q)$ 共轭类及其长度即求 $PSO_{2l+1}(q)$ 共轭类及其长度。令 $G=PSO_{2l+1}(q)$，根据([7]，推论 3.4)在 G 中包含一个半单元素 s，且 $o(s)=\frac{q^l-1}{2}$，对于 $\langle s\rangle$，有 $o(\langle s\rangle)=\phi\left(\frac{q^l-1}{2}\right)$ 个生成元，则 s 至多共轭于 $2l+1$ 个 s 的方幂。则 s 的本原方幂至少有 $\frac{\phi\left(\frac{q^l-1}{2}\right)}{2l+1}$ 个共轭类，即 $\frac{\phi(q^l-1)}{2(2l+1)}$ 个共轭类，下证 $\frac{\phi(q^l-1)}{2(2l+1)}\ge 2$。

由([6]，引理 6)易知，$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{2(2l+1)} \ge \dfrac{24(l+1)}{2(2l+1)} > 6 \ge 2$，除非$(l,q)$为下列形式：

1) $l=2, q\in\{2,3,4,5,7,8,9,11,13\}$；

2) $l=3, q\in\{2,3,4,5\}$；

3) $l\in\{4,5\}, q\in\{2,3\}$；

4) $l\in\{6,7,8\}, q=2$，若$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{2(2l+1)}>1$，则结论成立；对于$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{2(2l+1)}\le 1$的情况，即$(l,q)=(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3)$或$(4,2)$。

运行 GAP 程序可知$PSO_5(2)$有 2 个长度为 40 的共轭类、$PSO_5(3)$共轭类长度为 40 的重数大于 2、$PSO_5(4)$共轭类长度为 255 的重数大于 2、$PSO_5(5)$共轭类长度为 13,000 的重数大于 2、$PSO_7(2)$共轭类长度为 13,000 的重数大于 2、$PSO_7(3)$共轭类长度为 262,080 的重数大于 2、$PSO_9(2)$共轭类长度为 13,000 的重数大于 2，即$B_l(q)$至少有两个长度相同的共轭类。故引理得证。 □

引理 3.3.4：设$S=C_l(q)$，其中$l>2$，$q>1$是素数p的方幂，则S至少有两个长度相同的共轭类。

证明：$C_l(q)$又称$PSP_{2l}(q)$、$S_{2l}(q)$，求$C_l(q)$共轭类及其长度即求$PSP_{2l}(q)$共轭类及其长度。令$G=PSP_{2l}(q)$，根据([7]，推论 3.4)，在G中包含一个半单元素s，且$o(s)=\dfrac{q^l-1}{2}$，对于$\langle s\rangle$有$\phi(\langle s\rangle)=\phi\left(\dfrac{q^l-1}{2}\right)$个生成元，则$s$至多共轭于$2l$个$s$的方幂。则$s$的本原方幂至少有$\dfrac{\phi\left(\frac{q^l-1}{2}\right)}{2l}$个共轭类，即$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{4l}$个共轭类，下证$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{4l}\ge 2$。

根据([6]，引理 6)易知，$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{4l} \ge \dfrac{24(l+1)}{4l} > 6 > 1$，除非$(l,q)$为下列形式：

1) $l=2, q\in\{2,3,4,5,7,8,9,11,13\}$；

2) $l=3, q\in\{2,3,4,5\}$；

3) $l\in\{4,5\}, q\in\{2,3\}$；

4) $l\in\{6,7,8\}, q=2$，若$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{2(2l+1)}>1$则结论成立；对于$\dfrac{\phi\left(q^l-1\right)}{2(2l+1)}\le 1$的情况，即

$$(l,q)=(3,2),(3,3)\text{或}(4,2)。$$

运行 GAP 程序可知$PSP_6(2)$共轭类长度为 7560 的重数至少为 2；$PSP_6(3)$共轭类长度为 364 的重数至少为 2；$PSP_8(2)$共轭类长度为 514,080 的重数至少为 2。即$C_l(q)$有两个不同的共轭类长度相同。故引理得证。 □

引理 3.3.5：设$S=D_l(q)$，其中$l>3$，$q>1$是素数p的方幂，则S至少有两个长度相同的共轭类。

证明：$D_l(q)$又称$PSO_{2l}^{+}(q)$、$O_{2l}^{+}(q)$，求$D_l(q)$共轭类及其长度即求$PSO_{2l}^{+}(q)$共轭类及其长度。令$G=PSO_{2l}^{+}(q)$，根据([7]，推论 3.4)，在G中包含一个半单元素s，且$o(s)=\dfrac{q^l-1}{2}$，对于$\langle s\rangle$，有$\phi(\langle s\rangle)=\phi\left(\dfrac{q^l-1}{2}\right)$个生成元，则$s$至多共轭于$2l$个$s$的方幂。则$s$的本原方幂至少有$\dfrac{\phi\left(\frac{q^l-1}{2}\right)}{2l}$个共轭类，

即 $\frac{\phi\left(q^{l}-1\right)}{4l}$ 个共轭类，下证 $\frac{\phi\left(q^{l}-1\right)}{4l}\geq 2$。

根据([6]，引理 6)易知，$\frac{\phi\left(q^{l}-1\right)}{4l}\geq\frac{24(l+1)}{4l}>6>1$，除非 (l,q) 为下列形式：

1) $l=2,q\in\{2,3,4,5,7,8,9,11,13\}$；
2) $l=3,q\in\{2,3,4,5\}$；
3) $l\in\{4,5\},q\in\{2,3\}$；
4) $l\in\{6,7,8\},q=2$，若 $\frac{\phi\left(q^{l}-1\right)}{2(2l+1)}>1$ 则结论成立；对于 $\frac{\phi\left(q^{l}-1\right)}{2(2l+1)}\leq 1$ 的情况，即

$$(l,q)=(4,2),$$

运行 GAP 程序可知在 $PSO_8^+(2)$ 共轭类长度为 3780 的重数至少为 2。即 $D_l(q)$ 有两个不同的共轭类长度相同，引理得证。 □

引理 3.3.6： 设 $S={}^2D_l\left(q^2\right)$，其中 $l>3$，$q>1$ 是素数 p 的方幂，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： ${}^2D_l\left(q^2\right)$ 又称 $PSO_{2l}^-(q)$，求 ${}^2D_l\left(q^2\right)$ 共轭类及其长度即求 $PSO_{2l}^-(q)$ 共轭类及其长度。令 $G=PSO_{2l}^-(q)$，根据([7]，推论 3.4)，在 G 中包含一个半单元素 s，且 $o(s)=\frac{q^{l-1}-1}{2}$，对于 $\langle s\rangle$，有 $\phi(\langle s\rangle)=\phi\left(\frac{q^{l-1}-1}{2}\right)$ 个生成元，则 s 至多共轭于 $2l$ 个 s 的方幂。则 s 的本原方幂至少有 $\frac{\phi\left(\frac{q^{l-1}-1}{2}\right)}{2l}$ 个共轭类，即 $\frac{\phi\left(q^{l-1}-1\right)}{4l}$ 个共轭类，下证 $\frac{\phi\left(q^{l-1}-1\right)}{4l}\geq 2$。

根据([6]，引理 6)易知，$\frac{\phi\left(q^{l-1}-1\right)}{4l}\geq\frac{24l}{4l}>6>1$，除非 (l,q) 为下列形式

1) $l=2,q\in\{2,3,4,5,7,8,9,11,13\}$；
2) $l=3,q\in\{2,3,4,5\}$；
3) $l\in\{4,5\},q\in\{2,3\}$；
4) $l\in\{6,7,8\},q=2$，若 $\frac{\phi\left(q^{l}-1\right)}{2(2l+1)}>1$ 则结论成立；对于 $\frac{\phi\left(q^{l}-1\right)}{2(2l+1)}\leq 1$ 的情况，即

$$(l,q)=(4,2),(4,3)\text{或}(5,2),$$

运行 GAP 程序可知在 $PSO_8^-(2)$ 共轭类长度为 9,400,320 的重数至少为 2、$PSO_8^-(3)$ 共轭类长度为 268,632 的重数至少为 2、$PSO_{10}^-(2)$ 共轭类长度为 609,280 的重数至少为 2。即 ${}^2D_l\left(q^2\right)$ 有两个不同的共轭类长度相同，引理得证。 □

引理 3.3.7： 设 $S=G_2(q)$，其中 $q>2$ 是素数 p 的方幂，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 当 $p>3$，则由([11], p. 409)，$G_2(q)$ 有两个不同的共轭类 $K_{3,3,i}$，其长度为 $\frac{q^6\left(q^6-1\right)\left(q^2-1\right)}{3q^2}$；

当 $p=3$，则由([12]，p. 239，表 VII-1)，$G_2(q)$ 有 $\frac{q(q+1)}{6}$ 个不同的共轭类，其中 $\frac{q(q+1)}{6}\geq 2$，则有至少两个不同的共轭类 $h_i\left(i,qi,q^2i\right)$，长度为

$$q^6\left(q^6-1\right)\left(q^2-1\right)\Big/\frac{1}{6}q\left(q+1\right);$$

当 $p=2$，$G_2(q)$ 非单，无需考虑，当 $q>2$ 时，由([13]，p. 364，表 IV-1)，$G_2(q)$ 有 $\frac{q}{2}\geq 2$ 个不同的共轭类 $h_\eta(i,-i,0)$，长度为 $q^6\left(q^6-1\right)\left(q^2-1\right)/q\left(q+1\right)\left(q^2-1\right)$，引理得证。 □

引理 3.3.8： 群 $F_4(q)$ 至少有两个长度相同的共轭类，其中 $q>1$ 是素数 p 的方幂。

证明： 根据[14]可知，当 $q\equiv 1,5,7,9,11(\mathrm{mod}\,12)$ 时，群 $F_4(q)$ 有 $\frac{1}{2}(q+1)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同；当时 $q\equiv 4,8(\mathrm{mod}\,12)$ 时，群 $F_4(q)$ 有 $\frac{1}{2}q\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。下设 $q=2,3$。当 $q=2$ 时，运行 GAP 可知，此时群 $F_4(2)$ 至少有两个不同的共轭类，它们的长度相同，为 69615。当 $q=3$ 时，同样根据[14]可知，群 $F_4(3)$ 至少有 $\frac{1}{6}q(q+1)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。引理得证。 □

引理 3.3.9： 设 $S=E_6(q)$，其中 $q>1$ 是素数 p 的方幂，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 根据[14]可知，当 $q\equiv 1,3,5(\mathrm{mod}\,6)$ 时，群 $E_6(q)$ 有 $\frac{1}{2}(q-1)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同；当 $q\equiv 2,4(\mathrm{mod}\,6)$ 时，群 $E_6(q)$ 有 $\frac{1}{2}q\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。下设 $q=2$，由[14]另一数据可知，此时群 $E_6(2)$ 至少有 $\frac{1}{6}q^2\phi(1)\phi(2)\geq 2$ 不同的共轭类，它们的长度相同，GAP 运行得为共轭类长度为 136592595114393600。当 $q=3$ 时，同样根据[14]可知，群 $E_6(3)$ 至少有 $\frac{1}{6}q^2\phi(1)\phi(2)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。由此引理得证。 □

引理 3.3.10： 设 $S={}^2E_6\left(q^2\right)$，其中 $q>1$ 是素数 p 的方幂，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 根据[14]可知，当 $q\equiv 1,3,5(\mathrm{mod}\,6)$ 时，群 ${}^2E_6\left(q^2\right)$ 有 $\frac{1}{2}(q-1)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同；当 $q\equiv 2,4(\mathrm{mod}\,6)$ 时，群 ${}^2E_6\left(q^2\right)$ 有 $\frac{1}{2}q\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。下设 $q=2$，由[14]另一数据可知，此时群 ${}^2E_6\left(q^2\right)$ 至少有 $q\geq 2$ 不同的共轭类，它们的长度相同，运行 GAP 程序得共轭类长度为 96543730483200；当 $q=3$，由[14]另一数据可知，此时群 ${}^2E_6\left(q^2\right)$ 至少有 $q\geq 2$ 不同的共轭类，它们的长度相同。故引理得证。 □

引理 3.3.11： 群 $E_7(q)$ 至少有两个长度相同的共轭类，其中 $q>1$ 是素数 p 的方幂。

证明： 对于 $E_7(q)$，根据[14]可知，当 $q\equiv 1,5,7,9,11(\mathrm{mod}\,12)$ 时，群 $E_7(q)$ 有 $\frac{1}{2}(q-1)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。当 $q\equiv 4,8(\mathrm{mod}\,12)$ 时，群 $E_7(q)$ 有 $\frac{1}{2}q\geq 2$ 个不同的共轭类。下面考虑 $q=2,3$，当 $q=3$ 时，根据[14]另一张表格可知，群 $E_7(3)$ 有 $\frac{1}{6}q(q+1)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。当 $q=2$ 时，根据[14]可知有 531 个共轭类，有两个元素中心化子的阶为 $2^{26}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$，则 $E_7(2)$ 至少有两个不同的共轭类，它们的长度相同。故引理得证。 □

引理 3.3.12： 群 $E_8(q)$ 至少有两个长度相同的共轭类，其中 $q>1$ 是素数 p 的方幂。

证明： 对于 $E_8(q)$，根据文献[14]可知，

当 $q\equiv 1,5,7,9,11,13,17,19,21,23,25,27,29,31,37,41,43,47,49,53,59(\mathrm{mod}\,60)$ 时，群 $E_8(q)$ 有 $\frac{1}{2}(q-1)\geq 2$

个不同的共轭类，它们的长度相同。当 $q \equiv 4,8,16,32\pmod{60}$ 时，群 $E_8(q)$ 有 $\frac{1}{2}q \geq 2$ 个不同的共轭类。当 $q=3$ 时，根据文献[14]另一张表格可知，群 $E_8(q)$ 有 $\frac{1}{6}q(q+1)\geq 2$ 个不同的共轭类，它们的长度相同。当 $q=2$ 时，根据文献[14]可知，$E_8(q)$ 至少有两个不同的共轭类，它们的长度相同。引理得证。 □

引理 3.3.13： 群 ${}^3D_4(q^3)$ 至少有两个长度相同的共轭类，其中 $q>1$ 是素数 p 的方幂。

证明： 对于 ${}^3D_4(q^3)$，根据([18]，p. 53，表 4.4)可知，其中心化子的阶为

$$\left(q^3+1\right)\left(q^2-q+1\right)\left(q^4-q^2+1\right),$$

当 q 为偶数时，重数为

$$\frac{1}{2}\left(q^2+q\right)\geq\frac{1}{2}\left(2^2+2\right)=3;$$

当 q 为奇数时，重数为

$$\frac{1}{2}\left(q^2+q\right)\geq\frac{1}{2}\left(3^2+3\right)=6;$$

那么它们至少有 2 个共轭类长度相同。引理得证。 □

引理 3.3.14： 设 $S={}^2G_2(q)$，其中 $q=3^{2m+1}>3$，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 对于任意群 G 中的元素 x 及其逆元素 x^{-1} 有

$$C_G(x)=C_G\left(x^{-1}\right) \text{ 且 } x^G=\left(x^{-1}\right)^G,$$

根据([16], p. 87)可知，群 ${}^2G_2(q)$ 有非实元素 T,T^{-1} 有 $C_G(T)=C_G\left(T^{-1}\right)$，但 T,T^{-1} 位于不同的共轭类，它们所在的共轭类长度相同，即 ${}^2G_2(q)$ 至少有两个共轭类长度相同，由此引理得证。 □

引理 3.3.15： 设 $S={}^2B_2\left(q^2\right)$，其中 $q^2=2^{2m+1}>2$，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 同 ${}^2G_2(q)$ 的做法，根据([17], p. 143，定理 13)，群 ${}^2B_2\left(q^2\right)$ 有元素 ρ,ρ^{-1}，位于不同的共轭类，它们所在的共轭类长度相同。引理得证。 □

引理 3.3.16： 设 $S={}^2F_4\left(q^2\right)$，其中 $q^2=2^{2m+1}>2$，则 S 至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 根据([15]，p. 7，表 2)，在 ${}^2F_4\left(q^2\right)$ 中有元素 $u_{15}=\alpha_1(1)\alpha_3(1)$，$u_{16}=\alpha_1(1)\alpha_2(1)\alpha_3(1)$，$u_{17}=\alpha_1(1)\alpha_3(1)\alpha_5(1)$，$u_{18}=\alpha_1(1)\alpha_2(1)\alpha_3(1)\alpha_5(1)$，它们中心化子的阶相同均为 $4q^4$。

由群 ${}^2F_4\left(q^2\right)$ 阶为 $q^{12}\left(q^6+1\right)\left(q^4-1\right)\left(q^3+1\right)(q-1)$ 可知，其共轭类长度相同为

$$\frac{q^8\left(q^6+1\right)\left(q^4-1\right)\left(q^3+1\right)(q-1)}{4},$$

即 ${}^2F_4\left(q^2\right)$ 至少有两个共轭类长度相同，从而引理得证。 □

命题 3.3： 任意李型单群至少有两个长度相同的共轭类。

证明： 由引理 2.3.1.~2.3.16 即得。 □

定理 1 的证明： 根据有限单群分类定理以及命题 3.1~3.3 即得。 □

参考文献

[1] Khukhro, E.I. and Mazurov, V.D. (2014) Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook.

[2] Zhang, J. (1994) Finite Groups with Many Conjugate Elements. *Journal of Algebra*, **170**, 608-624. https://doi.org/10.1006/jabr.1994.1356

[3] Knörr, R., Lempken, W. and Thielcke, B. (1995) The S_3-Conjecture for Solvable Groups. *Israel Journal of Mathemat-*

ics, **91**, 61-76. https://doi.org/10.1007/BF02761639

[4] Arad, Z., Muzychuk, M. and Oliver, A. (2004) On Groups with Conjugacy Classes of Distinct Sizes. *Journal of Algebra*, **280**, 537-576. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.03.029

[5] Rose, J.S. (1978) A Course on Group Theory. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne.

[6] Liu, Y., Song, X. and Xiong, H. (2013) Almost Simple DD-Groups. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, **49**, 741-753.

[7] Moreto, A. (2007) Complex Group Algebras of Finite Groups: Brauer's Problem 1. *Advances in Mathematics*, **208**, 236-248. https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.02.006

[8] Gorenstein, D. (1982) Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification. University Series in Mathematics. Plenum Publishing Corp., New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8497-7_1

[9] The GAP Group (2015) GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.9. http://www.gap-system.org

[10] 胡冠章. 应用近似代数(第三版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[11] Chang-Ree (1972) The Characters of $G_2(q)$. In: *Symposia Mathematica*, Vol. VIII Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni, INDAM, Rome, 395-413.

[12] Enonoto, H. (1976) The Characters of the Finite Chevalley Group $G_2(q)$, $q=3^f$. *Japanese Journal of Mathematics*. *New Series*, **2**, 191-248. https://doi.org/10.4099/math1924.2.191

[13] Enonoto, H. and Yamada, H. (1986) The Characters of $G_2(2^n)$. *Japanese Journal of Mathematics*. *New Series*, **12**, 325-377. https://doi.org/10.4099/math1924.12.325

[14] Luebeck, F. () Centralizers and Numbers of Semi-Simple Classes in Exceptional Groups of Lie Type of Rank < 9. http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/chev/DegMult/index.html

[15] Shinoda, K. (1975) The Conjugacy Classes of the Finite Ree Groups of Type (F_4). *Journal of the Faculty of Science*, *the University of Tokyo*. *Sect*. 1 *A*, *Mathematics*, **22**, 1-15.

[16] Haroldn, W. (1966) On Ree's Series of Simple Groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, **121**, 62-89. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1966-0197587-8

[17] Suzuki, M. (1962) On a Class of Doubly Transitive Groups. *Annals of Mathematics*, **75**, 105-145. https://doi.org/10.2307/1970423

[18] Deriziotis, D.I. and Michler, G.O. (1987) Character Table and Blocks of Finite Simple Triality Groups ${}^3D_4(q)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, **303**, 39-70. https://doi.org/10.2307/2000778