Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(6), 755-761
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.96099

Hans汉斯

# A Rearrangement Optimization Problem Involving a Nonlocal Operator

**Chong Qiu**[1], **Yuying Zhou**[2]

[1]School of Mathematics and Physics, TaiZhou University, Taizhou Jiangsu
[2]School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou Jiangsu
Email: qchsuda@163.com, yuyingz@suda.edu.cn

Received: Jul. 21st, 2019; accepted: Jul. 31st, 2019; published: Aug. 16th, 2019

## Abstract

**In this paper, we study a rearrangement optimization problem involving a nonlocal operator, *i.e.*, fractional Laplacian. Firstly, we use the property of the first eigenvalue to prove that the nonlinear equation with a perturbation term involving the fractional Laplacian has a unique solution. Then, we introduce an optimization problem which takes the ground state energy functional as the objective function. We show that under suitable assumptions such an optimization problem is solvable.**

## Keywords

**Nonlocal Operator, Rearrangement Optimization, Perturbation Term**

# 一类非局部算子相关的重排优化问题

**邱　崇**[1]**，周育英**[2]

[1]泰州学院数理学院，江苏 泰州
[2]苏州大学数学科学学院，江苏 苏州
Email: qchsuda@163.com, yuyingz@suda.edu.cn

收稿日期：2019年7月21日；录用日期：2019年7月31日；发布日期：2019年8月16日

## 摘　要

**本文考虑了与一类非局部算子，即分数阶Laplace算子相关的一个重排优化问题。首先利用第一特征值性质证明含分数阶Laplace算子的扰动方程存在唯一解，然后以该分数阶Laplace算子方程相关的能量泛函为目标函数研究一个重排优化问题，最后在一定的条件下得到此极小重排优化问题的可解性。**

文章引用: 邱崇, 周育英. 一类非局部算子相关的重排优化问题[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 755-761.
DOI: 10.12677/pm.2019.96099

## 关键词

**非局部算子，重排优化，扰动项**



## 1. 引言

令 $\Omega \subset R^N$ 为一个有界光滑区域，所谓 $\Omega$ 上可测函数 $f$ 生成的重排函数空间 $R(f)$ 是指由所有满足条件：

$$meas\left(\{x \in \Omega : g(x) \geq a\}\right) = meas\left(\{x \in \Omega : f(x) \geq a\}\right), \forall a \in R$$

的可测函数 $g$ 组成的全体。

如果可行集为某个可测函数的所有重排函数组成的重排函数空间，则在此可行集上考虑的最优化问题即是重排优化问题。重排优化问题的相关理论最早由 Burton 建立，见参考文献[1] [2]。之后许多作者在寻找重排优化问题最优解的存在性和唯一性以及对称性等不同方面做了很多更为广泛的研究，见参考文献[3]-[9]。

值得注意的是，以上文献中研究的都是 Laplace 算子等局部算子相关的重排优化问题。非局部算子相关的重排优化问题研究结果并不多见。

在文献[10]中，我们考虑了如下边值问题

$$\begin{cases} -L_\theta^s u = f(x) + h(x,u), x \in \Omega \\ u = 0, x \in R^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

相关的重排优化问题，其中 $L_\theta^s$ 是如下定义的分数阶 Laplace 型非局部算子

$$L_\theta^s u(x) = \int_{R^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} \theta(y) \mathrm{d}y, x \in R^N,$$

更多非局部算子相关的重排优化问题研究结果见[11] [12]。

在文献[10]中，扰动项 $h(x,u)$ 关于第二变元单调非增是方程(1.1)存在唯一解的一个重要假设条件。

本文将考虑如下的扰动方程

$$\left(P_{\lambda,h,f}\right) \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x) + \lambda h(x) u, x \in \Omega \\ u = 0, x \in R^N \setminus \Omega \end{cases}$$

引出的重排优化问题，其中 $\lambda > 0$ 为一个参数， $h(x) > 0$ 为某个可测函数。

容易看出，扰动项 $\lambda h(x) u$ 关于第二变元是单调递增的，这是与文献[10]中关于扰动项 $h(x,u)$ 条件的一个重要区别。

记 $I : H^s(\Omega) \to R$ 为方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的能量泛函，即

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{R^N} \int_{R^N} \frac{\left(u(x)-u(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega hu^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega fu \mathrm{d}x \tag{1.2}$$

假设 $h_0, f_0$ 为可测函数，本文将研究下述重排优化问题：是否存在 $\hat{h}\in R(h_0), \hat{f}\in R(f_0)$ 使得

$$\text{(Opt)} \qquad I\left(u_{\hat{h},\hat{f}}\right)=\inf_{h\in R(h_0), f\in R(f_0)} I\left(u_{h,f}\right)?$$

其中 $u_{h,f}$ 为方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的唯一基态解(参见定理 3.1)。

不同于文献[11] [12]，文献[11]考虑的是与非局部算子相关的第一特征值优化问题，文献[12]研究的为含分数阶 Laplace 算子的形状优化问题。与文献[10]不同，由于本文研究的重排优化问题(Opt)中具有两个独立选取的函数 $h_0$ 和 $f_0$，这将给我们的研究带来更多困难。

## 2. 预备知识

仍记 $\Omega\subset R^N$ 为一个有界光滑区域。定义分数阶 Sobolev 空间如下

$$H^s(\Omega)=\left\{u\in L^2\left(R^N\right): u\equiv 0, x\in R^N\setminus\Omega, \int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right\},$$

其中 $0<s<1$ 。$H^s(\Omega)$ 为 Hilbert 空间，其中 $u$ 和 $v$ 之间的内积定义为：

$$\langle u,v\rangle=\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall u,v\in H^s(\Omega).$$

设 $u\in H^s(\Omega)$，则 $u$ 的范数为

$$\|u\|=\left(\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**定义 2.1** 称 $u\in H^s(\Omega)$ 为方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的一个解，如果

$$\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\left(\lambda huv+fv\right)\mathrm{d}x=0, \forall v\in H^s(\Omega).$$

容易验证，方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的能量泛函 $I\in C^1\left(H^s(\Omega),R\right)$ 且

$$I'(u)v=\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\left(\lambda huv+fv\right)\mathrm{d}x, \forall v\in H^s(\Omega).$$

所以，$u\in H^s(\Omega)$ 为方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的解当且仅当 $I'(u)v=0, \forall v\in H^s(\Omega)$ 。

在本文中，我们将记 $\|u\|_{L^p}$ 为通常的空间 $L^p(\Omega)(1\le p\le\infty)$ 中的范数。记号 $C$ 表示某个正常数。

现在我们给出一些本文中常用的引理。

**引理 2.1** (见文献[13]引理 8) $H^s(\Omega)$ 可以连续嵌入 $L^r\left(R^N\right)$，其中 $1\le r\le\frac{2N}{N-2s}$ 且当 $1\le r<\frac{2N}{N-2s}$ 时是紧嵌入。

**引理 2.2** (见文献[2]引理 2.1) 若 $f\in L^p(\Omega), 1\le p<\infty$，则对任意的 $g\in R(f)$ 都有 $g\in L^p(\Omega)$ 且 $\|g\|_{L^p}=\|f\|_{L^p}$ 。

**引理 2.3** (见文献[7]引理 2.3) 设 $f\in L^r(\Omega)$，$g\in L^{r'}(\Omega)$ 则存在 $\hat{f}\in R(f)$ 为关于 $h\in\overline{R(f)}$ 的线性泛函 $\int_\Omega hg\mathrm{d}x$ 最大值点。

**引理 2.4** (见文献[14]引理 6.2 和定理 6.1) 特征值方程 $\left(L_h\right)$

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=\lambda h(x)u, x\in\Omega \\ u=0, x\in R^N\setminus\Omega\end{cases} \tag{2.1}$$

的第一特征值 $\lambda_1(h)$ 可表示如下：

$$\lambda_1(h)=\inf_{v\in H^s(\Omega),v\neq 0}\frac{\|v\|^2}{\int_\Omega hv^2\mathrm{d}x} \tag{2.2}$$

且若 $0<h_0(x)\in L^\infty(\Omega)$，则存在 $\overline{h}\in R(h_0)$ 使得

$$0<\lambda_*:=\lambda_1(\overline{h})=\inf_{h\in R(h_0)}\lambda_1(h)=\inf_{h\in R(h_0)}\inf_{v\in H^s(\Omega),v\neq 0}\frac{\|v\|^2}{\int_\Omega hv^2\mathrm{d}x}. \tag{2.3}$$

## 3. 方程 $(P_{\lambda,h,f})$ 解的存在唯一性

**定理 3.1** 设 $0<h(x)\in L^\infty(\Omega)$，$f\in L^q(\Omega)$，$q>\dfrac{2N}{N+2s}$，$0<\lambda<\lambda_1(h)$，其中 $\lambda_1(h)$ 表示特征值方程 $(L_h)$ 的第一特征值，则方程 $(P_{\lambda,h,f})$ 存在唯一解 $u_{h,f}\in H^s(\Omega)$，且 $I(u_{h,f})=\inf_{v\in H^s(\Omega)}I(v)$。

**证明**：第一步：证明方程 $(P_{\lambda,h,f})$ 解的存在性。任取 $u\in H^s(\Omega)$，结合 Holder 不等式和引理 2.1 可得

$$\left|\int_\Omega fu\mathrm{d}x\right|\leq\|f\|_{L^q}\|u\|_{L_{q'}}\leq C\|u\|,$$

其中 $1<q':=q/(q-1)<2N/(N-2s)$。

利用(1.2)和(2.2)，容易知道

$$I(u)\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1(h)}\right)\|u\|^2-C\|u\|\to\infty,\ 若\ \|u\|\to\infty,$$

所以泛函 $I$ 是强制的。

容易看出泛函 $I$ 是弱下半连续的。因此，$I$ 存在一个全局极小点 $u_{h,f}\in H^s(\Omega)$ 即 $I(u_{h,f})=\inf_{v\in H^s(\Omega)}I(v)$。又 $I\in C^1(H^s(\Omega),R)$，则由全局极小原理可得 $u_{h,f}$ 是方程 $(P_{\lambda,h,f})$ 的一个解，即

$$I'(u_{h,f})v=0,\forall v\in H^s(\Omega).$$

第二步：证明方程 $(P_{\lambda,h,f})$ 解的唯一性。

利用反证法，假设存在 $w_{h,f}\in H^s(\Omega)$ 是方程 $(P_{\lambda,h,f})$ 的解且 $w_{h,f}\neq u_{h,f}$，即至少存在一个正测集 $E\subset\Omega$ 使得

$$w_{h,f}(x)\neq u_{h,f}(x),\forall x\in E. \tag{2.4}$$

由定义 2.1 可知，对任一个 $v\in H^s(\Omega)$ 都有

$$\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{(u_{h,f}(x)-w_{h,f}(x))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega(\lambda hu_{h,f}v+fv)\mathrm{d}x,\forall v\in H^s(\Omega),$$

$$\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{(u_{h,f}(y)-w_{h,f}(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega(\lambda hw_{h,f}v+fv)\mathrm{d}x,\forall v\in H^s(\Omega).$$

上两式相减可得

$$\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(\left(u_{h,f}(x)-w_{h,f}(x)\right)-\left(u_{h,f}(y)-w_{h,f}(y)\right)\right)\left(v(x)-v(y)\right)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega \lambda h\left(u_{h,f}-w_{h,f}\right)v\mathrm{d}x.$$

特别地，令 $v=u_{h,f}-w_{h,f}$ 并注意到 $0<\lambda<\lambda_1(h)$， $0<h(x)\in L^\infty(\Omega)$ 则由(2.2)，(2.4)可知

$$\begin{aligned}\left\|u_{h,f}-w_{h,f}\right\|^2&=\int_\Omega \lambda h\left(u_{h,f}-w_{h,f}\right)^2\mathrm{d}x\\&<\int_\Omega \lambda_1(h)h\left(u_{h,f}-w_{h,f}\right)^2\mathrm{d}x\\&\le\left\|u_{h,f}-w_{h,f}\right\|^2\end{aligned}$$

矛盾。

综上：方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 存在唯一解 $u_{h,f}$。

**注：**若 $\lambda=\lambda_1(h)$， $u_{h,f}$ 是方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的一个解，令 $\varphi$ 是方程 $\left(L_h\right)$ 的特征函数，则容易验证，对任意的 $t\in R$ 和 $v\in H^s(\Omega)$ 都有

$$\begin{aligned}&\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u_{h,f}(x)+t\varphi(x)-u_{h,f}(y)-t\varphi(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\left(\lambda h\left(u_{h,f}+t\varphi\right)v+fv\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u_{h,f}(x)-u_{h,f}(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\left(\lambda hu_{h,f}v+fv\right)\mathrm{d}x=0\end{aligned}.$$

由定义 2.1，这表明 $u_{h,f}+t\varphi$ 也是方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的解。因此，本文只考虑 $0<\lambda<\lambda_1(h)$ 的情形以保证方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 解的唯一性。

## 4. 重排优化问题(Opt)的可解性

**定理 4.1** 设 $0<h_0(x)\in L^\infty(\Omega)$， $f_0\in L^q(\Omega)$， $q>2N/(N+2s)$， $0<\lambda<\lambda_*$，其中 $\lambda_*$ 由(2.3)定义，则问题(Opt)是可解的，即存在 $\hat h\in R(h_0)$， $\hat f\in R(f_0)$ 使得

$$I(\hat u)=\inf_{h\in R(h_0),f\in R(f_0)}I\left(u_{h,f}\right),$$

其中 $\hat u=u_{\hat h,\hat f}$ 表示方程 $\left(P_{\lambda,\hat h,\hat f}\right)$ 的唯一解。

**证明：**令 $A=\inf_{h\in R(h_0),f\in R(f_0)}I\left(u_{h,f}\right)$，其中 $u_{h,f}$ 为对应方程 $\left(P_{\lambda,h,f}\right)$ 的唯一解，则 $A$ 是有意义的，即 $A>-\infty$。

事实上，任取 $h\in R(h_0),f\in R(f_0)$，则由(2.2)和(2.3)容易验证

$$\lambda_*\int_\Omega hu_{h,f}^2\mathrm{d}x\le\lambda_1(h)\int_\Omega hu_{h,f}^2\mathrm{d}x\le\left\|u_{h,f}\right\|^2.$$

再利用 Holder 不等式和引理 2.1 可以知道，

$$\begin{aligned}I\left(u_{h,f}\right)&=\frac12\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left(u_{h,f}(x)-u_{h,f}(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega hu_{h,f}^2\mathrm{d}x-\int_\Omega fu_{h,f}\mathrm{d}x\\&\ge\frac12\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)\left\|u_{h,f}\right\|^2-C\|f\|_{L_q}\left\|u_{h,f}\right\|\end{aligned}. \tag{4.1}$$

又由引理 2.2，$\|f\|_{L_q}=\|f_0\|_{L_q}$，所以由上式可以得到 $A$ 一定是有限数，即 $A$ 是良定义的。

任取 $\{(h_i,f_i)\}$ 为一个极小化序列，即 $h_i\in R(h_0),f_i\in R(f_0)$， $\forall i\in\mathbf{N}$ 且

$$A=\lim_{i\to\infty}I(u_i),$$

其中 $u_i = u_{h_i, f_i}$。由不等式(4.1)可知 $\{u_i\}$ 在 $H^s(\Omega)$ 中有界，则存在子列(不妨仍记为 $\{u_i\}$)弱收敛于 $u \in H^s(\Omega)$ 且强收敛于 $u$ 在 $L^{q'}(\Omega)\left(1 < q' = q/(q-1) < 2N/(N-2s)\right)$ 中。记 $\overline{R(f_0)}^{q,w}$ 为 $R(f_0)$ 在 $L^q(\Omega)$ 中的弱闭包。因为 $\|f_i\|_{L_q} \equiv \|f_0\|_{L_q}$，则 $\{f_i\}$ 也存在子列(不妨仍记为 $\{f_i\}$)弱收敛于某个 $\bar{f} \in \overline{R(f_0)}^{q,w}$。因为 $u \in L^{q'}(\Omega)$，根据弱收敛的定义可得

$$\left|\int_\Omega \left(f_i - \bar{f}\right) u \mathrm{d}x\right| \to 0, i \to \infty .$$

再利用 Holder 不等式，所以

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \left(f_i u_i - \bar{f} u\right) \mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_\Omega f_i \left(u_i - u\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_\Omega \left(f_i - \bar{f}\right) u \mathrm{d}x\right| \\ &\le \|f_i\|_{L^q} \|u_i - u\|_{L^{q'}} + \left|\int_\Omega \left(f_i - \bar{f}\right) u \mathrm{d}x\right| \to 0, i \to \infty\end{aligned}. \tag{4.2}$$

记 $\overline{R(h_0)}^{r,w}$ 为 $R(h_0)$ 在 $L^r(\Omega)(r > N/2s)$ 中的弱闭包。因为 $\|h_i\|_{L_r} \equiv \|h_0\|_{L_r}$ 则 $\{h_i\}$ 在 $L^r(\Omega)$ 中有界，所以存在子列(不妨仍记为 $\{h_i\}$)弱收敛于某个 $\bar{h} \in \overline{R(h_0)}^{r,w}$。通过类似地论证可以得到

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega \left(h_i u_i^2 - \bar{h} u^2\right) \mathrm{d}x = 0 . \tag{4.3}$$

结合(4.2)，(4.3)并利用 $H^s(\Omega)$ 中范数的弱下半连续性，所以

$$A = \lim_{i\to\infty} I(u_i) \ge \frac{1}{2} \int_{R^N} \int_{R^N} \frac{\left(u(x) - u(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \bar{h} u^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \bar{f} u \mathrm{d}x \tag{4.4}$$

由引理 2.3，存在 $\hat{f} \in R(f_0)$ 为线性泛函 $l : \overline{R(f_0)}^{q,w} \mapsto R, l(f) = \int_\Omega f u \mathrm{d}x$ 的极大点。因此，

$$\int_\Omega \bar{f} u \mathrm{d}x \le \int_\Omega \hat{f} u \mathrm{d}x .$$

同理，存在 $\hat{h} \in R(h_0)$ 为线性泛函 $L : \overline{R(h_0)}^{r,w} \mapsto R, L(h) = \int_\Omega h u^2 \mathrm{d}x$ 的极大点。因此，

$$\int_\Omega \bar{h} u^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega \hat{h} u^2 \mathrm{d}x .$$

再结合(4.4)，容易得到

$$A \ge \frac{1}{2} \int_{R^N} \int_{R^N} \frac{\left(u(x) - u(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \hat{h} u^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \hat{f} u \mathrm{d}x . \tag{4.5}$$

又由定理 3.1，则

$$\begin{aligned}I(\hat{u}) &= \inf_{v \in H^s(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{R^N} \int_{R^N} \frac{\left(u(x) - u(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \hat{h} v^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \hat{f} v \mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2} \int_{R^N} \int_{R^N} \frac{\left(u(x) - u(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \hat{h} u^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \hat{f} u \mathrm{d}x\end{aligned}. \tag{4.6}$$

由(4.5)和(4.6)即可推出，$I(\hat{u}) \le A$。

注意到 $\hat{h} \in R(h_0)$，$\hat{f} \in R(f_0)$，而由定义 $A = \inf_{h \in R(h_0), f \in R(f_0)} I\left(u_{h,f}\right)$，所以显然 $I(\hat{u}) \ge A$。

综上，$I(\hat{u}) = A$。命题得证。

## 基金项目

本文得到国家自然科学基金项目(11771319)和江苏省自然科学基金青年基金(BK20150281，BK20170590)及江苏省高校自然科学研究面上项目(16KJB110020)的支持。

## 参考文献

[1] Burton, G.R. (1987) Rearrangements of Functions, Maximization of Convex Functionals and Vortex Rings. *Mathematische Annalen*, **276**, 225-253. https://doi.org/10.1007/BF01450739

[2] Burton, G.R. (1989) Variational Problems on Classes of Rearrangements and Multiple Configurations for Steady Vortices. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **6**, 295-319. https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30320-1

[3] Cuccu, F., Emamizadeh, B. and Porru, G. (2006) Nonlinear Elastic Membrane Involving the p-Laplacian Operator. *Electronic Journal of Differential Equations*, **49**, 1-10.

[4] Cuccu, F., Emamizadeh, B. and Porru, G. (2009) Optimization of the First Eigenvalue in Problems Involving the p-Laplacian. *Proceedings of the AMS*, **137**, 1677-1687. https://doi.org/10.7153/dea-01-12

[5] Cuccu, F., Porru, G. and Sakaguchi, S. (2011) Optimization Problems on General Classes of Rearrangements. *Nonlinear Analysis*, **74**, 5554-5565. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.05.039

[6] Emamizadeh, B. and Zivari-Rezapour, M. (2007) Rearrangement Optimization for Some Elliptic Equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **135**, 367-379. https://doi.org/10.1007/s10957-007-9269-y

[7] Emamizadeh, B. and Prajapat, J.V. (2009) Symmetry in Rearrangemet Optimization Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **149**, 1-10.

[8] Marras, M. (2010) Optimization in Problems Involving the p-Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2**, 1-10.

[9] Qiu, C., Huang, Y.S. and Zhou, Y.Y. (2015) A Class of Rearrangement Optimization Problems Involving the p-Laplacian. *Nonlinear Analysis*, **112**, 30-42. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.09.008

[10] Qiu, C., Huang, Y.S. and Zhou, Y.Y. (2016) Optimization Problems Involving the Fractional Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2016**, 1-15.

[11] Pezzo, L.D., Bonder, J.F. and Rios, L.L. (2018) An Optimization Problem for the First Eigenvalue of the p-Fractional Laplacian. *Mathematische Nachrichten*, **291**, 632-651.

[12] Dalibard, A.L. and Gerard-Varet, D. (2013) On Shape Optimization Problems Involving the Fractional Laplacian. *ESAIM*: *Control*, *Optimisation and Calculus of Variations*, **19**, 976-1013. https://doi.org/10.1051/cocv/2012041

[13] Servadei, R. and Valdinoci, E. (2012) Mountain Pass Solutions for Non-Local Elliptic Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **389**, 887-898. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.12.032

[14] 邱崇. 几类与非线性椭圆型方程相关的重排优化问题研究[D]: [博士学位论文]. 苏州: 苏州大学数学科学学院, 2015.