Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(6), 673-678
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.96089

Hans汉斯

Optimization of Solution Methods for Straight Lines and Conic Curves Passing Focus

Wenli Hu, Dexiang Sun

College of Mathematics and Computer Science, Aba Normal University, Wenchuan Sichuan
Email: 878835598@qq.com, 1450001708@qq.com

Received: Jul. 8th, 2019; accepted: Jul. 18th, 2019; published: Aug. 2nd, 2019

Abstract

The combination of straight line and conic is often used as the content of college entrance examination. The types of questions are varied and the calculation process is complicated. It is often a kind of questions difficult for students to master. Based on this, this paper introduces a simple calculation of the correlation between straight line and conic through focus.

Keywords

Straight Line, Conical Curve, Problem Solving Method, Optimization

过焦点的直线与圆锥曲线的解题方法的优化

胡文利，孙德祥

阿坝师范学院数学与计算机科学学院，四川 汶川
Email: 878835598@qq.com, 1450001708@qq.com

收稿日期：2019年7月8日；录用日期：2019年7月18日；发布日期：2019年8月2日

摘 要

直线与圆锥曲线相结合的题常作为高考内容，问题出题类型变化多，运算过程复杂，往往是学生较难掌握的一类题型。基于此，本文介绍了一种经过焦点的直线与圆锥曲线的相关计算的简便运算。

文章引用: 胡文利, 孙德祥. 过焦点的直线与圆锥曲线的解题方法的优化[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 673-678.
DOI: 10.12677/pm.2019.96089

关键词

直线，圆锥曲线，解题方法，优化

1. 引言

在直线与圆锥曲线的问题中，传统的基本思维都是在观察直线与圆锥曲线性质之后，运用联立方程组、合理设元、点差法、化繁为简数形结合法在其性质的基础之上求解[1]，求解过程复杂且没有针对性。在本文中，我们首先推出了关于直线与圆锥曲线相交的三条定理，接着，介绍了三条定理的运用。这些定理简便了圆锥曲线的运算过程，且针对直线与圆锥曲线相交的问题做了系统的解说与证明，使得学生在解题时能够更加轻松地解出正确的答案。

其中的三个定理为：

定理 1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中($a>b>0$)的离心率为 e，且斜率为 k 的直线过该椭圆的焦点 F，与椭圆相交于 A、B，若 $\boldsymbol{AF}=\lambda\boldsymbol{FB}$，则 $e=\sqrt{1+k^2}\left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|$。

定理 2 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 e，斜率为 k 的直线过该双曲线的焦点 F，与双曲线交于 A、B 两点，若 $\boldsymbol{AF}=\lambda\boldsymbol{FB}$，则 $e=\sqrt{1+k^2}\left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|$。

定理 3 已知抛物线 $x^2=2py$ （$y^2=2px$），$p\neq 0$，斜率为 k 的直线过抛物线的焦点 F，与抛物线相交于 A、B，若 $\boldsymbol{AF}=\lambda\boldsymbol{FB}$，则 $k=\pm\frac{|1-\lambda|}{2\sqrt{\lambda}}$ （$k=\pm\frac{2\sqrt{\lambda}}{|1-\lambda|}$）。

2. 主要结论的证明

定理 1 的证明

设 A、F、B 的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$F(\pm c,0)$，$B(x_2,y_2)$，

所以 $\boldsymbol{AF}=(\pm c-x_1,-y_1)$，$\boldsymbol{FB}=(x_2\mp c,y_2)$。又∵ $\boldsymbol{AF}=\lambda\boldsymbol{FB}\Rightarrow -y_1=\lambda y_2\Rightarrow y_1=-\lambda y_2$。

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，

则 $y=k(x\pm c)\Rightarrow x=\frac{y}{k}\pm c$，

把上式代入方程中有：$b^2\left(\frac{y}{k}\pm c\right)^2+a^2y^2=a^2b^2$，$b^2\left(\frac{y^2}{k^2}\pm 2\frac{cy}{k}+c^2\right)+a^2y^2=a^2b^2$，

$\left(\frac{b^2}{k^2}+a^2\right)y^2\pm\frac{2cb^2}{k}y+b^2c^2-a^2b^2=0$，则 $\left(\frac{b^2}{k^2}+a^2\right)y^2\pm\frac{2cb^2}{k}y+b^2\left(-b^2\right)=0$。

所以，$y_1+y_2=\pm\frac{2cb^2k}{b^2+a^2k^2}$，$y_1\cdot y_2=\frac{-b^4k^2}{b^2+a^2k^2}$，又∵ $y_1=-\lambda y_2$，

则：$(1-\lambda)y_2=\pm\dfrac{2cb^2k}{b^2+a^2k^2}\Rightarrow y_2=\pm\dfrac{2cb^2k}{b^2+a^2k^2}\cdot\dfrac{1}{1-\lambda}$，

$-\lambda y_2^2=-\dfrac{b^4k^2}{b^2+a^2k^2}\Rightarrow \lambda y_2^2=\dfrac{b^4k^2}{b^2+a^2k^2}$，

$\lambda\left(\dfrac{2cb^2k}{b^2+a^2k^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)^2=\dfrac{b^4k^2}{b^2+a^2k^2}$，$\dfrac{\left(4c^2b^4k^2\right)\cdot\lambda}{\left(b^2+a^2k^2\right)(1-\lambda)^2}=b^4k^2$。

则 $4c^2\lambda=\left(b^2+a^2k^2\right)(1-\lambda)^2$。

又 $a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2$，$4c^2\lambda=\left(a^2-c^2+a^2k^2\right)(1-\lambda)^2$

$\dfrac{4c^2\lambda}{a^2}=\dfrac{\left(a^2-c^2+a^2k^2\right)(1-\lambda)^2}{a^2}$，化简得：$4e^2\lambda=\left(1-e^2+k^2\right)(1-\lambda)^2$，

移项得：$4e^2\lambda+e^2(1-\lambda)^2=\left(1+k^2\right)(1-\lambda)^2$

$e^2\left(4\lambda+1-2\lambda+\lambda^2\right)=\left(1+k^2\right)(1-\lambda)^2$

解得：$e=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|$

定理 2 的证明

证明方法同定理 1。

定理 3 的证明

1) 设 A，B，F 的坐标分别为：$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，

有 $\boldsymbol{AF}=\left(-x_1,\dfrac{p}{2}-y_1\right)$，$\boldsymbol{FB}=\left(x_2,y_2-\dfrac{p}{2}\right)$。

则 $\boldsymbol{AF}=\lambda\boldsymbol{FB}\Rightarrow -x_1=\lambda x_2\Rightarrow x_1=-\lambda x_2$，

$y-\dfrac{p}{2}=kx\Rightarrow y=kx+\dfrac{p}{2}$，$x^2=2p\left(kx+\dfrac{p}{2}\right)$，$x^2-2pkx-p^2=0$，

则 $x_1+x_2=2pk$，$x_1\cdot x_2=-p^2$

又 $\because$ $x_1=-\lambda x_2$，$\therefore$ $(1-\lambda)x_2=2pk\Rightarrow x_2=\dfrac{2pk}{1-\lambda}$，

化简得 $-\lambda x_2^2=-p^2\Rightarrow \lambda x_2^2=p^2$，$\dfrac{\lambda 4p^2k^2}{(1-\lambda)^2}=p^2$，$4\lambda k^2=(1-\lambda)^2$，

则 $k^2=\dfrac{(1-\lambda)^2}{4\lambda}$，解得：$k=\pm\dfrac{|1-\lambda|}{2\sqrt{\lambda}}$。

2) 设 $A(x_1y_2)$，$B(x_2,y_2)$，$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，

有向量 $\boldsymbol{AF}=\left(\pm\dfrac{p}{2}-x_1,-y_1\right)$，$\boldsymbol{FB}=\left(x_2-\dfrac{p}{2},y_2\right)$。

则 $\boldsymbol{AF}=\lambda\boldsymbol{FB}\Rightarrow -y_1=\lambda y_2\Rightarrow y_1=-\lambda y_2$。

又 $\because$ $y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)\Rightarrow x=\dfrac{2y+pk}{2k}$，$y^2=2p\dfrac{2y+pk}{2k}$，$y^2-\dfrac{2p}{k}y-p^2=0$，则

$$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{2p}{k} \\ y_1\cdot y_2=-p^2 \end{cases}$$

又∵ $y_1=-\lambda y_2$，$(1-\lambda)y_2=\dfrac{2p}{k}\Rightarrow y_2=\dfrac{2p}{k}\dfrac{1}{(1-\lambda)}$，

代入方程 $-\lambda y_2^2=\pm p^2\Rightarrow -\lambda\dfrac{4p^2}{k^2\left(1-k^2\right)}=-p^2\Rightarrow k^2\left(1-k^2\right)=4\lambda\Rightarrow k^2=\dfrac{4\lambda}{(1-\lambda)^2}$

解得：$k=\pm\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{|1-\lambda|}$

3. 定理的应用

例 1 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b>0$，离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，斜率为 $k\ (k>0)$圆的右焦点 F 与椭圆相交于 A、B，且 $\boldsymbol{AF}=3\boldsymbol{BF}$ 求斜率 k 的值。

传统方法[2]：设方程的一般形式，再利用韦达定理求解，非常麻烦，且运算量也特别大。

优化方法：由公式代入 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\lambda=3$ 可得，$e=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|$，则

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{1-3}{1+3}\right|$，故 $\sqrt{3}=\sqrt{1+k^2}\Rightarrow k=\pm 2$。

又∵ $k>0$，∴ $k=2$。

例 2 双曲线右焦点为 F,F 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交双曲线于 A、B，求双曲线离心率。

传统方法：如图 1，过点 A、B、F 分别做垂线交准线与 P、Q、R

直线 AB 斜率为 $\sqrt{3}$，即 $k=\tan\alpha=\sqrt{3}$，

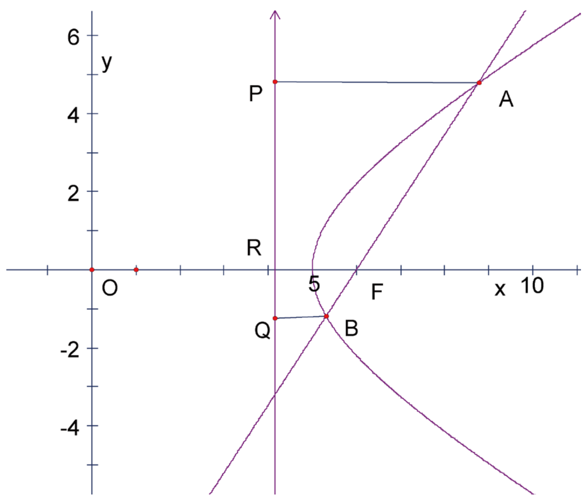

Figure 1. The relation diagram of straight line and directrix passing through hyper-bolic focal point

图 1. 过双曲线焦点的直线与准线关系图

∴ 直线倾角 $\lambda=60^\circ$。由离心率定义有：$e=\dfrac{AF}{AP}=\dfrac{BF}{BQ}$。

设 $BQ=x$，$\alpha=60^\circ$，已知 $\boldsymbol{AF}=4\boldsymbol{BF}$，由图中几何关系可知，有：

$BF=ex$，$AF=4ex$，$AP=\dfrac{x+ex}{2+2ex}$

$\therefore\quad e=\dfrac{AF}{AP}=\dfrac{4ex}{\dfrac{x+ex}{2+2ex}}$，即 $1=\dfrac{4}{\dfrac{1+e}{2+2e}}$，化简，解得 $e=\dfrac{6}{5}$。

$\therefore$ 双曲线的离心率为 $\dfrac{6}{5}$。

优化方法：由公式代入 $k=\sqrt{3}$，$\lambda=4$，则 $e=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|$，于是，$e=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}\left|\dfrac{1-4}{1+4}\right|$，因此 $e=\dfrac{6}{5}$。

例 3 抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 F，见图 2。直线交抛物线于 F，且 $\boldsymbol{AF}=3\boldsymbol{BF}$，则该直线的倾斜角为多少？

传统方法：当点 A 在第一象限、点 B 第四象限时，过 A、B 分别作准线的垂线，垂足分别为 M、N，作 $BC\perp AM$，垂足为 C，设 $|FB|=m$，$|AF|=3m$，则由抛物线得 $|AM|=3$，$|BN|=m$。

$\therefore\quad |AB|=4m$，$|AC|=2m$。

$\therefore\quad \angle BAC=60^\circ$，于是直线 l 的倾斜角为 60°，斜率 $k=\sqrt{3}$，故该直线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$。

当点 A 第四象限、点 B 第一象限时，同理可以求得直线的斜率 $k=-\sqrt{3}$，该直线的倾斜角为 $-\dfrac{2\pi}{3}$。

故答案为 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $-\dfrac{2\pi}{3}$。

优化方法：由公式代入 $\lambda=3$，$k=\pm\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{|1-\lambda|}$，则 $k=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{|1-3|}$，于是 $k=\pm\sqrt{3}$，

则该直线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $-\dfrac{2\pi}{3}$。

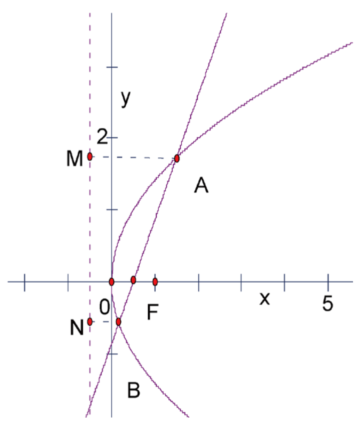

Figure 2. The relation diagram between the straight line passing through the focus of parabola and the directrix

图 2. 过抛物线焦点的直线与准线的关系图

4. 结语

圆锥曲线问题的求解方法远远不止这些，上述结论中只优化了圆锥曲线中过焦点直线这类问题，简便了运算，节省了运算时间。

致　谢

作者衷心感谢阿坝师范学院数学与计算机科学学院杨仕椿教授的悉心指导！

基金项目

阿坝师范学院教学改革研究项目(20170203, 20171510, 20171515)。

参考文献

[1] 林丽平. 常用直线与圆锥曲线解题方法简介[J]. 教育教学论坛, 2014(47): 258-259.
[2] 张家辉. 圆锥曲线在高考试题中的总结与解题策略[J]. 科技经济导刊, 2018, 26(27): 131-132.