**Pure Mathematics** 理论数学, 2019, 9(6), 679-685
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.96090

Hans汉斯

# Using Integer Function to Solve the Problem of Replacing Beer Bottle for Beer

**Shujing Li, Nannan Liu**

School of Mathematics and Statistics, Qinghai University for Nationalities, Xining Qinghai
Email: 18297215352@163.com

Received: Jul. 9th, 2019; accepted: Jul. 19th, 2019; published: Aug. 5th, 2019

## Abstract

**The rounding function is a common function. Its form is simple, its nature is very unique, and it is widely used in the problems of seeking limits, seeking and integrating. Applying the nature of the rounding function, a mapping of the real number set of the beer bottle to the beer to a set of integers is established, and any real number is converted into an integer to solve how to optimize the beer. By transforming the problem of beer bottle change for beer in supermarket promotion into a mathematical model, some results are derived according to the nature of the rounding function; and the mathematical model is deeply explored and extended theoretically, and a general conclusion is obtained. Combined with the conclusions we have obtained, the conclusions are further applied to simplify the actual problems.**

## Keywords

**Beer Bottles for Beer, Rounding Function, Limit, Profit**

# 利用取整函数解决啤酒瓶换啤酒问题

**李树璟，刘南南**

青海民族大学数学与统计学院，青海 西宁
Email: 18297215352@163.com

收稿日期：2019年7月9日；录用日期：2019年7月19日；发布日期：2019年8月5日

## 摘 要

**取整函数是一种常见的函数，它的形式简单，性质非常独特，在求极限、求导、求积分等的问题上都有广泛应用。应用取整函数的性质，建立一个啤酒瓶换啤酒的实数集到整数集的一个映射，将任意实数转**

文章引用：李树璟，刘南南．利用取整函数解决啤酒瓶换啤酒问题[J]．理论数学，2019, 9(6): 679-685.
DOI: 10.12677/pm.2019.96090

化成整数，解决如何更加优化地买啤酒。通过把超市促销活动啤酒瓶换啤酒问题转化为数学模型，根据取整函数的性质，导出一些结果；并且对这个数学模型进行理论深入探讨与延伸，从而得到一般性的结论。结合我们得到的结论，进一步对结论进行应用，简化实际问题。

## 关键词

**啤酒瓶换啤酒，取整函数，极限，利润**



## 1. 引言

身为九零后的我们，小的时候最开心的一件事情就是提着许多啤酒瓶帮父亲去超市换啤酒。啤酒瓶换啤酒，不仅可以让父亲喝到爽口的啤酒，还能让小时候的我们开心地帮父亲做事情。那么，超市为什么会允许空瓶可以换啤酒呢？一个空瓶如果被收废品的收走，一个也就 0.4 元，超市一般会采取 4 个瓶子换一瓶啤酒，某品牌啤酒售价 4 元，如果可以允许空瓶换啤酒，那么相当于当作废品回收的 4 个空瓶 1.6 元就可以买一瓶 4 元的啤酒。是不是意味着消费者买的啤酒越多，商家就会赔钱呢？对此问题，我们就在本文进行研究，得到进一步的结论。

## 2. 预备知识

取整函数是一类常用的函数，取整函数分为上取整函数和下取整函数，下取整函数是一种常见的取整函数，又称为高斯函数，它表示不超过 $x$ 的最大整数，记为 $\lfloor x \rfloor$；它表示不少于 $x$ 的最小整数，记为 $\lceil x \rceil$. 取整函数具有若干性质可见于文献[1] [2] [3]，本文只选择部分简单性质。

性质 1 对于任意的实数，有

$\lfloor x \rfloor \le x$；$\lceil x \rceil \ge x$；$\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x$ 是一个整数 $\Leftrightarrow \lceil x \rceil = x$。

当 $x$ 不是整数时，

$$\begin{aligned}
&\lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil = 1; \\
&x-1 < \lfloor x \rfloor \le \lceil x \rceil < x+1; \\
&\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil; \\
&\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor
\end{aligned}$$

根据取整函数定义，证明以上结论。

性质 2 设 $n$ 为整数，则有

$$\begin{aligned}
&\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1; \\
&\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x-1 < n \le x; \\
&\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 < x \le n; \\
&\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x \le n < x+1; \\
&\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n; \\
&\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n
\end{aligned}$$

性质 3 设 $n$ 为整数，则有

$$x<n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n;$$
$$n<x \Leftrightarrow n<\lceil x \rceil;$$
$$x \le n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \le n;$$
$$n \le x \Leftrightarrow n \le \lfloor x \rfloor$$

性质 4 设 $f(x)$ 是任意的连续、严格单调递增函数，且具有性质：当函数值 $f(x)$ 为整数时，自变量 $x$ 也是整数，则有

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$
$$\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$

特别地，当 $x \ge 0$ 时，有

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor;$$
$$\sqrt{\lceil x \rceil} = \left\lceil \sqrt{x} \right\rceil$$

## 3. 问题的提出

身为九零后的我们，小的时候最开心的一件事情就是提着许多啤酒瓶帮父亲去超市换啤酒。啤酒瓶换啤酒，不仅可以让父亲喝到爽口的啤酒，还能让小时候的我们开心的帮父亲做事情。其实这正是一种超市的营销手段，不仅可以对资源进行回收，还可以刺激消费。本文中实例参考于文献[4]和[5]。啤酒瓶换啤酒问题：在销售某品牌啤酒时，规定：购买某品牌啤酒时，可以用此品牌的四个啤酒瓶换一瓶啤酒。结果此品牌啤酒的销售量直线上升，取得了很好的经济效益，从而占领了较大市场份额。这个问题大家在学习数学的道路上都遇到过，现在我对此问题进行深入思考、分析：

1) 易知，一次购买 10 瓶时，按“4 个啤酒瓶换 1 瓶”的规定，可换 3 瓶啤酒。如果一次购买 20 瓶时，可换多少瓶啤酒？会是 6 瓶吗？

2) 当一次购买的数量很多时，比如，1000 瓶、99,999 瓶，如何算出可换多少瓶啤酒？

3) 假设每瓶啤酒的价格是 $a$ 元，则花 10$a$ 元可得 12 瓶，平均每瓶合 10$a$/12 元，小于 $a$ 元/瓶。

4) 从理论上讲，当一次购买的数量为无穷大时，可换啤酒量占购买量的比会是一个常数吗？

5) 从理论上讲，当一次购买的数量为无穷大时，按照规定，商家会赔吗？平均每瓶啤酒的价格会降到 0 吗？如不是，会是多少？

6) 假设现有 900 人，每人只喝 3 瓶啤酒，按照规定，请问一次购买多少瓶即可满足每人 3 瓶？

## 4. 问题的探究

问题：某个超市开展优惠促销活动，规则是：某牌啤酒 4 个空瓶换 1 瓶，请问购买 $n$ 瓶($n \ge 4$)，可以换多少瓶啤酒？

1) 数学模型的建立

假设一次购买 $n$ 瓶($n \ge 4$， $n \in N$)啤酒。

首先 4 个空啤酒瓶换 1 瓶，然后在剩余的($n-4$)瓶中取 3 个空瓶，再加上前面的 1 个空瓶就是 4 个空瓶即可换 1 瓶啤酒，显然($n-3$)中共有 $\left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor$3 个，所以一次购买 $n$ 瓶啤酒的可换的啤酒数为 $\Delta N = \left\lfloor 1+\frac{n-4}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$。

应用例举：

例 1：设一次购买 100 瓶，则可增加 $\Delta N=\left\lfloor\frac{100-1}{3}\right\rfloor=33$ 瓶，现在共有 $100+33=133$ 瓶。

例 2：设一次购买 999 瓶，则可增加 $\Delta N=\left\lfloor\frac{999-1}{3}\right\rfloor\approx\lfloor 332.7\rfloor=332$ 瓶，现在共有 $999+332=1331$ 瓶。

2) 当购买很多啤酒时，换得的啤酒数量 $\Delta N$ 占购买量 $n$ 多少？

即 $n\to\infty$ 时，$\frac{\Delta N}{n}$ 是否有极限？若有，极限是多少？

由以上可知，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Delta N}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{3}-1\right)<\frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor\le\frac{1}{n}\frac{n-1}{3}$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n-4}{3}\right)<\frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor\le\frac{1}{n}\frac{n-1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n-4}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n-1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta N}{n}=\frac{1}{3}$$

即购买足够多时，增加量占购买量 $\frac{1}{3}$。

例 3：当 $n=8888888$ 时，$\Delta N=\left\lfloor\frac{8888888-1}{3}\right\rfloor=\lfloor 2962962.33\rfloor=2962962$

$$\frac{\Delta N}{n}=0.333333296$$

例 4：当 $n=10000000000$ 时，

$$\Delta N=\left\lfloor\frac{10000000000-1}{3}\right\rfloor=\lfloor 3333333333\rfloor=3333333333$$

$$\frac{\Delta N}{n}=0.333333333$$

由以上两个例题分析得，当购买的数量越多时，$\frac{\Delta N}{n}$ 越接近 $\frac{1}{3}$。

3) 由简单到复杂

问题普遍化：设 $k$ 个空瓶换 1 瓶($k>4$，$k\in N$ 常数)。

首先 $k$ 个空啤酒瓶换 1 瓶，然后在剩余的$(n-k)$瓶中取$(k-1)$个空瓶，再加上前面的 1 个空瓶共 $k$ 个空瓶即可又换 1 瓶。

显然，$(n-k)$中有 $\left\lfloor\frac{n-k}{k-1}\right\rfloor$ 个$(k-1)$。

所以一次购买 $n$ 瓶啤酒的增加量 $\Delta N=1+\left\lfloor\frac{n-k}{k-1}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-1}{k-1}\right\rfloor$

因为 $\frac{1}{n}\frac{n-k}{k-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{k-1}-1\right)<\frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n-1}{k-1}-1\right\rfloor\le\frac{1}{n}\frac{n-1}{k-1}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n-k}{k-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n-1}{k-1}=\frac{1}{k-1}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Delta N}{n}=\frac{1}{k-1}$

即 $k$ 个空瓶换 1 袋。如果购买的足够多时，则可换啤酒量就是购买量的 $\frac{1}{k-1}$。

4) 设 $k$ 个空瓶换 $m$ 瓶($k>m$，$k>3$，$k\in N$，$m\in N$ 常数)。

首先有 $k$ 个空啤酒瓶换 $m$ 瓶，然后在剩余的首先有 $k$ 个空啤酒瓶换 $m$ 瓶，然后在剩余的($n-k$)瓶中取($k-m$)个空瓶，再加上前面的 $m$ 个空瓶共 $k$ 个空瓶即可又换 $m$ 瓶。

显然($n-k$)中共有 $\left\lfloor\frac{n-k}{k-m}\right\rfloor$ 个 $k-m$。

所以一次购买 $n$ 瓶啤酒的增加量为 $\Delta N=m+m\left\lfloor\frac{n-k}{k-m}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{mn-m^2}{k-m}\right\rfloor$。

因为

$$\frac{1}{n}\frac{mn-mm-k+m}{k-m}=\frac{1}{n}\left(\frac{mn-mm}{k-m}-1\right)<\frac{1}{n}\cdot\left\lfloor\frac{mn-mm}{k-m}\right\rfloor\le\frac{1}{n}\cdot\frac{mn-mm}{k-m}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{mn-mm}{k-m}=\frac{m}{k-m}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Delta N}{n}=\frac{m}{k-m}$，即 $k$ 个空瓶换 $m$ 瓶啤酒，如果购买足够多时，则增加量占购买量的 $\frac{m}{k-m}$。

对于消费者：设每瓶啤酒售价是 $a$ 元($a>0$)，则显然 $k$ 个空瓶换 $m$ 瓶时，实际售价为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+\Delta N}=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+\left\lfloor\frac{mn-mm}{k-m}\right\rfloor}=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{\frac{nk-mm}{k-m}}=\frac{k-m}{k}a$$

可见对于消费者来说 $k$ 个空瓶换 $m$ 瓶啤酒时，$m$ 越接近于 $k$，越省钱。

例 5：设每瓶啤酒单价是 $a$ 元，则“8 个空瓶换 2 瓶”时，即 $k=8$，$m=2$ 时，实际售价等于 $\frac{3}{4}a$ 元。

对于超市：设每瓶啤酒的进价是 $b$ 元($a>b>0$)，则显然 $k$ 个空瓶换 $m$ 瓶啤酒时，超市利润为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(a-b)}{n+\Delta N}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a-b)}{n+\left\lfloor\frac{mn-mm}{k-m}\right\rfloor}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a-b)}{\frac{nk-mm}{k-m}}=\frac{k-m}{k}(a-b)$$

即只要 $m<k$，超市就不会赔钱，而且 $m$ 越小，超市利润越高。

例 6：设每瓶啤酒售价 $a$ 元，进价 $b$ 元，则“8 个空瓶换 2 瓶”时，即 $k=8$，$m=2$ 时利润等于 3/4 ($a-b$)。

## 5. 几类应用

应用一：

如果啤酒 4 个空瓶换 1 瓶的游戏规则不变，每瓶啤酒进价 2 元，售价 4 元。假设现有 900 人，问一次购买多少瓶可使每人 3 瓶？超市利润是多少？对于消费者，可以省多少？

设一次购买 $n$ 瓶可使每人 3 瓶，利润为 $y$，消费者实际花费 $z$ 元，则有

$$2700 \le \left\lfloor \frac{4n-1}{3} \right\rfloor$$

$$n \ge [2025.25] = 2026$$

$$y = n \cdot (4-2) = 2026 \times 2 = 4052$$

$$z = n \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right) \cdot 4 = 6078$$

消费者可以省$(900 \times 3 - 2026) \times 4 = 2696$元，可见这是一笔不小的数目。

一般地，假设现有$M$人，问一次购买多少瓶可使每人3瓶？超市利润是多少？对于消费者，可以省多少？

设一次购买$n$袋，利润为$y$，消费者实际花费$z$元，显然有

$$3M \le [n + \Delta N] = n + \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4n-1}{3} \right\rfloor$$

$$3M \le \frac{4n-1}{3}$$

得$n \ge \frac{9M+1}{4}$

$$y = n \cdot (4-2) \ge \left(\frac{9M+1}{2}\right)(4-2) = \frac{9M+1}{2}$$

$$z = n \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right) \cdot 4 \ge \frac{9M+1}{4} \times 3 = \frac{27M+3}{4}$$

消费者可以省$\left\lfloor 3M - \frac{9M+1}{4} \right\rfloor \times 4 = \lfloor 3M - 1 \rfloor$。

显而易见当人数越多时，越省钱，当然买的越多，对于超市来说，利润越大。

应用二：假设游戏规则改为：每瓶啤酒进价2元，售价4元，$k$个空瓶换1瓶，那么，现有$A$人，问一次购买多少瓶可使每人3瓶？超市利润是多少？对于消费者，可以省多少？设一次购买$n$瓶，利润为$y$，消费者实际花费$z$元，显然有

$$3A \le n + \Delta N = n + \left\lfloor \frac{mn - mm}{k-m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nk - mm}{k-m} \right\rfloor$$

$3A \le \frac{nk - mm}{k-m}$ 从而

$$n \ge \frac{3A(k-1)}{k}$$

$$y = n \cdot (4-2) \ge \frac{3A(k-1)}{k} \cdot 2 = \frac{6A(k-1)}{k}$$

$$z = n \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right) \cdot 4 \ge \frac{3A(k-1)}{k} \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{12A(k-1)^2}{k^2}$$

消费者可以省$\left(3A - \frac{3A(k-1)}{k}\right) \cdot 4 = \frac{12A}{k}$。

应用三：假设游戏规则改为：每瓶啤酒进价 2 元，售价 4 元，$k$ 个空瓶换 $m$ 瓶，那么，现有 $B$ 人，问一次购买多少瓶可使每人 3 瓶？设超市利润是多少？对于消费者，可以省多少？

设一次购买 $n$ 瓶，利润为 $y$，消费者实际花费 $z$ 元，显然有

$$3B \le n + \Delta N = n + \left\lfloor \frac{mn - m^2}{k - m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nk - m^2}{k - m} \right\rfloor$$

$B \le \dfrac{nk - m^2}{k - m}$，从而

$$n \ge \frac{B(k-m) + m^2}{k}$$

$$y = n \cdot (4 - 2) = \frac{2B(k-m) + 2m^2}{k}$$

$$z = 4n \cdot \frac{k-m}{k} \ge \frac{4B(k-m)^2 + 4(k-m)k^2}{k^2}$$

消费者可以省 $\left(3B - \dfrac{B(k-m)+m^2}{k}\right) \cdot 4 = \dfrac{4\left(2Bk + Bm - m^2\right)}{k}$。

## 参考文献


[1] 郑克明. 数论基础[M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 1991.

[2] 陈思禄, 延伟, 李智明. 一类上取整函数的极小值问题[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(20): 299-304.

[3] 王玉霞. 关于函数 y = [x]及其应用[J]. 高等数学研究, 2005, 8(4): 46-49.

[4] 詹玉. 极限在商业活动中的应用[J]. 荆楚理工学院学报(自然科学版), 2007, 22(6): 81-83.

[5] 詹玉. 取整函数在促销中的应用[J]. 宁波职业技术学院学报, 2008, 12(2): 15-17.