Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(6), 699-701
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.96093

Hans汉斯

A Judgment of Integer Coefficient Polynomials without Integer Root

Mianmian Zhang

The Mathematics of Hangzhou Normal University, Hangzhou Zhejiang
Email: zhmm1216@163.com

Received: Jul. 11th, 2019; accepted: Jul. 21st, 2019; published: Aug. 7th, 2019

Abstract

The article starts from an exercise in *Higher Algebra Learning Guidelines* (2nd Edition, Volume II) complied by Qiu Weisheng. This paper gives a judgment of integer coefficient polynomials without integer roots, and applies it to relevant examples and exercises.

Keywords

Integral Coefficient Polynomial, Integral Root

整系数多项式无整数根的一个判定

张棉棉

杭州师范大学数学系，浙江 杭州
Email: zhmm1216@163.com

收稿日期：2019年7月11日；录用日期：2019年7月21日；发布日期：2019年8月7日

摘 要

本文从丘维声编著的《高等代数学习指导书(第二版，下册)》的一道习题出发，给出整系数多项式无整数根的一个判定，并把它应用到相关例题及习题中。

关键词

整系数多项式，整数根

文章引用: 张棉棉. 整系数多项式无整数根的一个判定[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 699-701.
DOI: 10.12677/pm.2019.96093

1. 引言

具体整系数多项式整数根的有无可以通过有理根进行判定。抽象整系数多项式整数根的有无没有特别适用的方法。我们从文献[1]的一道习题出发，给出整系数多项式证明无整数根的新方法，将此方法一般化，并把它应用到文献[1]的其他例题及习题中。由此，我们发现这个判定法是很有效的，且适用面是比较广的。更重要的是，此判定法既直接又简洁。它不同于反证法，反证法很多时候是需要技巧的，而技巧对学生，特别是刚从高中毕业的大一新生而言，是非常困难的。它又不同于直接证明的方法，需要用到很多新的知识，它最终只需要简单的计算几个函数值，再进行简单的判断即可。这样简单有效的方法，一方面在多项式各种证明中备受困扰的学生里无疑是受欢迎的，另一个方面也是对学生一种知识探索的示范。

2. 主要结果及应用

例 1. 设次数为 n 的整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，满足 3 不整除 $f(0)=a_0$，$f(1)=a_n+\cdots+a_1+a_0$，$f(-1)=(-1)^n a_n+\cdots-a_1+a_0$。证明：$f(x)$ 没有整数根。

证明：反证法：假设 $f(x)$ 有整数根 c，即 $f(c)=0$。另一方面，由带余除法得 $c=3k+d$，$d=0,1,2$，$f(c)=f(3k+d)=a_n(3k+d)^n+\cdots+a_1(3k+d)+a_0=3m+f(d)$，$f(d)=f(c)-3m$ 能被 3 整除。但事实上，由已知知，3 不整除 $f(0)=a_0$，3 不整除 $f(1)=a_n+\cdots+a_1+a_0$，3 不整除 $f(-1)=(-1)^n a_n+\cdots-a_1+a_0$，又由于 $f(2)=f(3+(-1))=3l+f(-1)$ 知 3 不整除 $f(2)$，与前面 3 整除 $f(d),d=0,1,2$ 矛盾。故 $f(x)$ 没有整数根。

定理 1 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个次数为 n 的整系数多项式。证明：如果存在正整除 m，使得 $f(0),f(1),\cdots f(m-1)$ 都不能被 m 整除，那么 $f(x)$ 没有整数根。

证明：反证法：假设 $f(x)$ 有整数根 c，即 $f(c)=0$。另一方面，由带余除法得 $c=mk+l$，$l=0,1,\cdots,m-1$，$f(c)=f(mk+l)=a_n(mk+l)^n+\cdots+a_1(mk+l)+a_0=hm+f(l)$，$f(l)=f(c)-hm$ 能被 m 整除，与已知矛盾。故 $f(x)$ 没有整数根。

例 2. 设 $f(x)$ 是一个首一整系数多项式，证明：如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数，那么 $f(x)$ 没有有理根。

备注 1：首一整系数多项式的有理根就是整数根。

证明：因为 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数，取 $m=2$，由定理 1 知，$f(x)$ 没有整数根，即没有有理根。

现在把例 2 进行推广，得到如下例 3。

例 3. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，证明：如果存在一个偶数 a 及一个奇数 b，使得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都是奇数，则 $f(x)$ 不能有整数根。

证明：设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x],n>0$，则奇数 $=f(a)=a_na^n+\cdots+a_1a+a_0=(a_na^n+\cdots+a_1a)+a_0=$ 偶数 $+f(0)$，得 $f(0)$ 为奇数。又奇数 $=f(b)=f((b-1)+1)=(b-1)k+f(1)=$ 偶数 $+f(1)$，得 $f(1)$ 为奇数。取 $m=2$，由定理 1 知，$f(x)$ 没有整数根。

例 4. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是整系数多项式，证明：如果 $(a+b)c$ 是奇数，那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

证明：由 $(a+b)c$ 是奇数，知 $a+b,c$ 均是奇数，即 $f(0)=c,f(1)=1+a+b+c$ 均是奇数。则直接由例

2，或取 $m=2$，由定理 1 知 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

例 5. 判断下列整系数多项式在有理数域上是否不可约：

$$(1)\ f(x)=x^3+x+1$$
$$(2)\ g(x)=x^3+x^2-3x+2$$
$$(3)\ h(x)=x^2+x+2$$

备注 1：3 次整系数多项式在有理数域是否可约等同于是否有有理根，当多项式是首一时，等同于是否有整数根。

备注 2：对具体整系数多项式 $f(x)$，我们通常直接采用爱森斯坦判别法，或间接采用它的变型 $g(y)=f(x+a),a\in Q$ 来进行判定。虽然爱森斯坦判别法本身已经足够简单，但是艾森斯坦判别法的变形并不是那么容易，很多时候 a 的取值并非像我们上课时候碰到的一些例子直接在 ±1 中去寻找那么简单，例如(3)，对 $h(x)=x^2+x+2$，如果我们采用爱森斯坦判别法的变形，$l(y)=h(y+3)=y^2+7y+14$，这里 a 取成了 3。

解：1) $f(0)=1,f(1)=3$，有例 2 结论，或取 $m=2$，由定理 1 知，$f(x)$ 没有整数根，即 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

2) $g(0)=2,g(1)=1,g(2)=8$，取 $m=3$，由定理 1 知，$g(x)$ 没有整数根，即 $g(x)$ 在有理数域上不可约。

3) $h(0)=2,h(1)=4,h(2)=8$，取 $m=3$，由定理 1 知，$h(x)$ 没有整数根，即 $h(x)$ 在有理数域上不可约。

例 6 求 $f(x)=3x^5+4x^4-6x^2-5x-3$ 的有理根

解：已知 $f(0)=-3,f(1)=-7$ 均为奇数，故 $f(x)$ 无整数根。因此在 $f(x)$ 所有可能的有理根 $\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{3}$ 中，我们只需要对 $\pm\frac{1}{3}$ 进行综合除法得 $f\left(\frac{1}{3}\right)\neq0,f\left(-\frac{1}{3}\right)\neq0$，故 $f(x)$ 无有理根。

最后，我们通过上面的例题可以明显看出，解决同样的问题，定理 1 要优于其他例如反证法、爱森斯坦判别法及其变形等方法。定理 1 的引入又是非常自然的，因为，例 2 是我们必须掌握的内容，它总是以习题等形式存在于各课本之中。我们在讲解时候，适当进行引导，就可以得出定理 1 的判定。多一种方法，多一种选择。

参考文献

[1] 丘维声. 高等代数学习指导书(第二版, 下册) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org