Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 799-803
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97104

The Norm of $\mathcal{H}$-Subgroups

Hongfang Gu, Lü Gong*

School of Sciences, Nantong University, Nantong Jiangsu
Email: 1449098752@qq.com, *gonglv@ntu.edu.cn

Received: Aug. 2nd, 2019; accepted: Aug. 28th, 2019; published: Sep. 4th, 2019

Abstract

In order to investigate the structure of finite nilpotent group, a new equivalent characterization of finite meta-nilipotent group is obtained by the norm of $\mathcal{H}$-subgroups.

Keywords

Norm, Soluble Group, Subnormal Subgroup, $\mathcal{H}$-Subgroup

$\mathcal{H}$-子群的norm

顾红芳，龚　律*

南通大学理学院，江苏　南通
Email: 1449098752@qq.com, *gonglv@ntu.edu.cn

收稿日期：2019年8月2日；录用日期：2019年8月28日；发布日期：2019年9月4日

摘　要

为进一步探索有限幂零群的结构， 利用 $\mathcal{H}$ - 子群的 norm ，给出了有限亚幂零群的一个新的等价

* 通讯作者。

文章引用: 顾红芳, 龚律. $\mathcal{H}$-子群的norm [J]. 理论数学, 2019, 9(7): 799-803.
DOI: 10.12677/pm.2019.97104

刻画。

关键词

Norm，可解群，次正规子群，$\mathcal{H}$-子群

1. 序言

本文研究的群都是有限群。本文的主要目的是利用群的$\mathcal{H}$-子群给出群的超中心的新特征。

$\mathcal{H}$-子群首先在文 [1]中提出，群G 中子群H 满足对每个元$g \in G$ 都有$N_G(H) \cap H^g \leq H$，则称H 是G 的$\mathcal{H}$-子群。令$\mathcal{H}(G)$ 表示群G 的所有$\mathcal{H}$-子群的集合，即

$$\mathcal{H}(G) = \{H \leq G | N_G(H) \cap H^g \leq H, \forall g \in G\}.$$

利用$\mathcal{H}$-子群，文 [1] 给出了每个次正规子群都正规的有限可解群的特征，并刻画了每个子群或正规或自正规的有限群结构。关于$\mathcal{H}$-子群的进一步研究可以参看文 [2–5]。

群G 的norm $N(G)$ 是指群G 中所有子群的正规化子的交，这一概念首先由Baer 在文 [6]中提出。另一个与之相关的子群是Wielandt 子群，这是由Wielandt 在文 [7]中介绍的群中所有次正规子群的正规化子的交。Wielandt 的思想主要关注次正规子群,而不是所有的子群。本文我们延续这样的思路，考虑群中$\mathcal{H}$-子群与导群下的norm，即导群中所有$\mathcal{H}$-子群的正规化子的交。

我们的符号和术语都是标准的，P 表示群G 的Sylow p-子群，G' 表示群G 的导群，$Z_\infty(G)$ 表示群G 的超中心，其他符号可参看文 [8–12]。

首先我们给出如下定义

定义1.1. 令 G 是一群。则 $A^{\mathcal{A}}(G)$ 表示 $\mathcal{H}(G)$ 与 G' 中每个子群的正规化子的交，即

$$A^{\mathcal{A}}(G) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}(G), H \leq G'} N_G(H),$$

显然，$A^{\mathcal{A}}(G) \trianglelefteq G$。若 G' 幂零，则 G' 中的每个子群 H 在 G 中都次正规，于是由 $H \in \mathcal{H}(G)$ 知 H 在 G 中正规，因此 $G = A^{\mathcal{A}}(G)$。因此我们自然想知道其逆命题是否正确？下文我们将给出

肯定的答案。

对于这个定义，我们做如下几个说明：

(1) $\bigcap_{H\in\mathcal{H}(G),H\leq G'} N_G(H)$ 与 $\bigcap_{H\in\mathcal{H}(G')} N_G(H)$ 是不同子群。

由群 G 中 $\mathcal{H}(G)$ 相关的性质知：若 $H\in\mathcal{H}(G), H\leq G'$，则 $H\in\mathcal{H}(G')$。但这个性质反过来并不正确，因此上述定义不同。

(2) $\bigcap_{H\in\mathcal{H}(G),H\leq G'} N_G(H)$ 与 $\bigcap_{H\in\mathcal{H}(G)} N_G(H')$ 是不同子群。

尽管两者都是研究的群 G 中 $\mathcal{H}(G)$ 的子群，但正规化子的对象是 H 与 H'，自然不一样。

2. 主要引理

首先我们介绍一些关于群中$\mathcal{H}$-子群的基本引理和性质。

引理2.1. 令G 是一个群。

(1) [1] Lemma 2(1) 若$N\leq H$ 且$N\trianglelefteq G$，则$H\in\mathcal{H}(G)$ 当且仅当$H/N\in\mathcal{H}(G/N)$。

(2) [1] Theorem 6(2) 若$H\in\mathcal{H}(G)$ 且$H\trianglelefteq\trianglelefteq K\leq G$，则$H\trianglelefteq K$。

(3) [1] Theorem 6(3) 若$H\in\mathcal{H}(G)$，$N\trianglelefteq G$ 且$N\leq N_G(H)$，则$N_G(HN)=N_G(H)$ 且$HN\in\mathcal{H}(G)$。

(4) [1] Proposition 3(2) 若$N,K\trianglelefteq G$ 且$K\leq N$，则N/K 的Sylow 子群S/K 在G 的逆象S 属于$\mathcal{H}(G)$。特别地，G 的正规子群的Sylow 子群都属于$\mathcal{H}(G)$。

引理2.2. [13] Theorem 6.3 令G 是一个群，p 是一个素数。若P 是G 中使$G/C_G(P)$ 是p 的方幂的正规p-子群，则$P\leq Z_\infty(G)$。

接下来，我们给出群G 的$A^{\mathcal{A}}(G)$ 的一些有用的性质。

性质2.3. 令 G 是一群。若 $N\trianglelefteq G$ 且 $N\leq A^{\mathcal{A}}(G)\cap G'$，则 $A^{\mathcal{A}}(G/N)=A^{\mathcal{A}}(G)/N$。

证明. 令 $N\trianglelefteq G$ 且 $N\leq A^{\mathcal{A}}(G)\cap G'$。我们考虑 G/N 的子群 H/N。

$$\begin{aligned}A^{\mathcal{A}}(G/N) &= \bigcap\nolimits_{H/N\in\mathcal{H}(G/N),H/N\leq(G/N)'} N_{G/N}(H/N)\\ &= \bigcap\nolimits_{H\in\mathcal{H}(G),N\leq H\leq G'} N_{G/N}(H/N), \text{由[引理2.1(1)]}, N\leq G'\\ &= \bigcap\nolimits_{H\in\mathcal{H}(G),N\leq H\leq G'} N_G(H)/N\end{aligned}$$

由引理2.1(3) 和 $N\leq A^{\mathcal{A}}(G)$ 知：

$$\begin{aligned}A^{\mathcal{A}}(G) &= \bigcap\nolimits_{H\in\mathcal{H}(G),H\leq G'} N_G(H)\\ &= \bigcap\nolimits_{H\in\mathcal{H}(G),H\leq G'} N_G(HN)\\ &= \bigcap\nolimits_{H\in\mathcal{H}(G),N\leq H\leq G'} N_G(H)\end{aligned}$$

因此，我们有 $A^{\mathcal{A}}(G)/N=A^{\mathcal{A}}(G/N)$。

3. 主要定理

文 [14]中证明了对于任意的群G 都有$N(G) = 1$ 当且仅当$Z(G) = 1$。自然地，我们想要知道如下的论断是否也正确：

对于任意的群G 都有$A^{\mathcal{A}}(G) = 1$ 当且仅当$C_G(G') = 1$?

如下的定理给出了上述问题的积极的答案。

定理3.1. 令 G 是群。则

(1) $C_G(G') \leq A^{\mathcal{A}}(G)$。

(2) $A^{\mathcal{A}}(G) = G$ 当且仅当 G' 幂零。

(3) $C_G(G') = 1$ 当且仅当 $A^{\mathcal{A}}(G) = 1$。

证明. (1) 显然，我们有

$$\begin{aligned} C_G(G') &= \cap_{H \leq G'} C_G(H) \\ &\leq \cap_{H \leq G', H \in \mathcal{H}(G)} C_G(H) \\ &\leq \cap_{H \leq G', H \in \mathcal{H}(G)} N_G(H) = A^{\mathcal{A}}(G) \end{aligned}$$

(2) 若 $G^{\mathcal{F}}$ 幂零，则 G' 中的每个子群 H 在 G 中次正规。由引理2.1(2) 知若 $H \in \mathcal{H}(G)$，则 H 在 G 中正规，即 $G = A^{\mathcal{A}}(G)$。

反过来，假设 $G = A^{\mathcal{A}}(G)$。令 $T \leq G'$ 是 G 的合成因子且 L 是 T 的一个 Sylow 子群。于是由引理2.1(2)知 $L \in \mathcal{H}(G)$，故 L 在 G 中正规。因此 $L = T$，于是 T 可解，即 $A^{\mathcal{A}}(G)$ 可解。

令 H 是 G' 的一个 Sylow 子群。由引理2.1(2)知 H 包含在 $\mathcal{H}(G)$ 中。于是由 $G = A^{\mathcal{A}}(G)$ 知 H 在 G 中正规。因此 H 在 G' 中正规且 G' 幂零。

(3) 显然，由性质3.3(1) 知：若 $A^{\mathcal{A}}(G) = 1$，则 $C_G(G') = 1$。

反过来，若 $C_G(G') = 1$，则 $Z(G') = 1$。令 $M = A^{\mathcal{A}}(G) \cap G'$。我们首先假设 $M \neq 1$。因为 G 是可解群，所以在 M 中存在 G 的极小正规子群 N，不妨设 N 是初等交换 p-子群。

令 Q 是 G' 的 Sylow q-子群，其中 $p \neq q$。于是 $Q \leq C_{G'}(N)$ 且 $G'/C_{G'}(N)$ 是 p 的方幂。因此由引理2.2 知 $N \leq Z_\infty(G') = Z(G) = 1$，矛盾。这就表明 $M = 1$，且 $[A^{\mathcal{A}}(G), G'] \leq M = 1$，故有 $C_G(G') = A^{\mathcal{A}}(G)$。

从而 $C_G(G') = A^{\mathcal{A}}(G) = 1$。即，$A^{\mathcal{A}}(G) = 1$ 当且仅当 $C_G(G') = 1$。

参考文献

[1] Bianchi, M., Mauri, A.G.B., Herzog, M., *et al.* (2000) On Finite Solvable Groups in Which Normality Is a Transitive Relation. *Journal of Group Theory*, **3**, 147-156.

https://doi.org/10.1515/jgth.2000.012

[2] Guo, X. and Wei, X. (2010) The Influence of H-Subgroups on the Structure of Finite Groups. *Journal of Group Theory*, **13**, 267-276. https://doi.org/10.1515/jgt.2009.050

[3] Li, S. (1994) On Minimal Subgroups of Finite Groups. *Communications in Algebra*, **22**, 1913-1918. https://doi.org/10.1080/00927879408824946

[4] Li, S. (1998) On Minimal Non-PE-Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **132**, 149-158. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(97)00106-0

[5] Li, Y. (2006) Finite Groups with NE-Subgroups. *Journal of Group Theory*, **9**, 49-58. https://doi.org/10.1515/JGT.2006.003

[6] Baer, R. (1934) Der Kern eine charakteristische Untergruppe. *Compositio Mathematica*, **1**, 254-283.

[7] Wielandt, H. (1958) Über den normalisator der subnormalen untergruppen. *Mathematische Zeitschrift*, **69**, 463-465. https://doi.org/10.1007/BF01187422

[8] Huppert, B. (1979) Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[9] Huppert, B. and Blackburn, N. (1982) Finite Groups III. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-67997-1

[10] Doerk, H. and Hawkes, T. (1992) Finite Soluble Groups. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[11] Isaacs, I.M. (2008) Finite Group Theory. AMS, Providence, Rhode Island.

[12] Robinson, D.J.S. (1982) A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York.

[13] Weinstein, M., Ed. (1982) Between Nilpotent and Solvable. Polygonal Publishing House, Passaic, New York.

[14] Baer, R. (1956) Norm and Hypernorm. *Publicationes Mathematicae, Debrecen*, **4**, 347-356.