Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(8), 922-927
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.98119

Hans汉斯

A Note on L'Hospital Rule of Indeterminate Form $\frac{\infty}{\infty}$

Dan Liu, Liying Wang, Kai Mao

Naval Aviation University, Yantai Shandong
Email: ld0819@sohu.com

Received: Sep. 28th, 2019; accepted: Oct. 16th, 2019; published: Oct. 23rd, 2019

Abstract

L'Hospital rule is a classical and effective method to solve indeterminate form in limit problem. This paper studies a class of extended indeterminate form $\frac{*}{\infty}$ based on common indeterminate form $\frac{\infty}{\infty}$, generalizes L'Hospital rule under certain conditions and obtains generalized L'Hospital rule.

Keywords

Indeterminate Form $\frac{\infty}{\infty}$, L'Hospital Rule, Indeterminate Form $\frac{*}{\infty}$, Generalized L'Hospital Rule

关于$\frac{\infty}{\infty}$未定式L'Hospital法则的一个注记

刘　丹，王丽英，毛　凯

海军航空大学，山东　烟台
Email: ld0819@sohu.com

收稿日期：2019年9月28日；录用日期：2019年10月16日；发布日期：2019年10月23日

文章引用：刘丹，王丽英，毛凯．关于$\frac{\infty}{\infty}$未定式 L'Hospital 法则的一个注记[J]．理论数学, 2019, 9(8): 922-927.

DOI: 10.12677/pm.2019.98119

摘　要

L'Hospital法则是求解极限问题中未定式的一种经典而有效的方法。本文从未定式常见类型$\frac{\infty}{\infty}$出发，研究了一类拓展型未定式$\frac{*}{\infty}$，在一定条件下将L'Hospital法则进行了推广，给出了广义L'Hospital法则。

关键词

$\frac{\infty}{\infty}$未定式，L'Hospital法则，$\frac{*}{\infty}$未定式，广义L'Hospital法则

1. 引言

函数之比求极限是一类典型且常见的极限问题，通常利用商的极限运算法则可以计算一般情形下的极限。而对于分子、分母不趋于有限值的情形，该法则不适用。如对于$\frac{\infty}{\infty}$未定式，便不能直接用“商的极限等于极限的商”这一简单法则来计算。此类未定式的一种简便有效的计算方法是 L'Hospital 法则。例如，极限过程$x \to a$下的$\frac{\infty}{\infty}$未定式的 L'Hospital 法则为

引理(L'Hospital 法则) 设

(1) 当$x \to a$时，函数$f(x)$与$g(x)$均趋于无穷大；

(2) 在点a的某去心邻域内，$f'(x)$与$g'(x)$都存在且$g'(x) \neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大)，

则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

该法则对其它极限过程$x \to a^-, x \to a^+, x \to \infty, x \to -\infty, x \to +\infty$均适用。

这种在一定条件下通过分子、分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法，称为 L'Hospital 法则。引理的一个关键性条件是要求分子、分母均趋于无穷大，这使得 L'Hospital 法则在使用时具有一定的局限性。考察以下引例：

引例　已知函数$f(x)$在$[0, +\infty)$内连续且$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$，求$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x e^t f(t) \mathrm{d}t}{e^x}$。

这是一个典型的$\frac{\infty}{\infty}$未定式求极限的问题，求解的主要思路是利用 L'Hospital 法则。

解法一 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ 知，存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，有 $f(x)>\frac{1}{2}$，故

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{X_0} \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_{X_0}^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t \ge \int_0^{X_0} \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_{X_0}^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_0}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{X_0} \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_0}(x-X_0)\end{aligned},$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t=+\infty$。由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty} f(x)=1。$$

上述求解过程较为繁琐，原因在于为使用 L'Hospital 法则，应先明确所求极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式，即证明分子趋于无穷大。该事实看似显然，但其论证方法并不直接，往往不容易想到。

事实上，若仅分母趋于无穷大，不考虑分子的变化趋势(此时将 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 记作 $\frac{*}{\infty}$ 未定式)，在一定条件下仍可通过分子、分母分别求导以求极限，即 L'Hospital 法则可进一步推广，得到 $\frac{*}{\infty}$ 未定式的广义 L'Hospital 法则[1]。

2. $\frac{*}{\infty}$ 未定式的广义 L'Hospital 法则

以下定理仅以极限过程 $x\to a^+$ 为例，其它过程结论类似。

定理 1 (广义 L'Hospital 法则) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 上均可导(其中 $-\infty\le a<b\le+\infty$)且满足：(1) $g'(x)\ne 0, x\in(a,b)$；(2) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty$；(3) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为有限数或 $-\infty$，$+\infty$)，则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

证明 (i) 当 A 为有限数时。

(证法一) 由 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon,$$

即 $A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon$。

现任取 $x_0,x\in(a,a+\delta)$ 且 $x_0<x$，由 Cauchy 中值定理，$\exists\xi\in(x_0,x)\subset(a,a+\delta)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{1}$$

进一步地，由条件(1)、(2)，不妨设 $g'(x)>0, x\in(a,b)$，则必有 $g(x)$ 在 (a,b) 内恒大于零，此时由(1)式得[2]

$$A-\varepsilon<\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\varepsilon,$$

从而

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)} \tag{2}$$

又由 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$，(2)式两边同时取上下极限得

$$A-\varepsilon\le\varliminf_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\le\varlimsup_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\le A+\varepsilon,$$

再令 $\varepsilon\to0^+$，得

$$A\le\varliminf_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\le\varlimsup_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\le A,$$

故 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，即

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

(证法二) 由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon,$$

即 $A-\varepsilon<\dfrac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon$。

现任取 $x_0,x\in(a,a+\delta)$ 且 $x_0<x$，则由 Cauchy 中值定理，$\exists\xi\in(x_0,x)\subset(a,a+\delta)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

从而

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}<A+\varepsilon。$$

又

$$\frac{f(x)}{g(x)}-A=\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\cdot\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right)+\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)},$$

故

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\le\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|+\left|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，从而 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

(ii) 当 A 为 $+\infty$ 时。

由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则对 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}>3M$，进一步地，对 $\forall x_0,x\in(a,a+\delta)$ 且 $x_0<x$，由 Cauchy 中值定理，$\exists\xi\in(x_0,x)\subset(a,a+\delta)$ 使得[3]

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>3M。$$

此外，由 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$ 易知 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{g(x_0)}{g(x)}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x_0)}{g(x)}=0$。从而由极限定义得

$$\frac{g(x_0)}{g(x)}<\frac{1}{2},\quad \frac{f(x_0)}{g(x)}>-\frac{1}{2}M,\quad x\in(a,a+\delta)。$$

故

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}>\frac{1}{2}\cdot 3M-\frac{1}{2}M=M,$$

即 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

(iii) 当 A 为 $-\infty$ 时。

令 $f_1(x)=-f(x)$。由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$ 知 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f_1'(x)}{g'(x)}=+\infty$。进一步地，由(ii)之结论可得 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f_1(x)}{g(x)}=+\infty$，即 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{-f(x)}{g(x)}=+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$。从而 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

综合(i) (ii) (iii)，定理得证。

3. 结论

利用 $\dfrac{*}{\infty}$ 未定式的广义 L'Hospital 法则，引例的解法可进行改进：

解法二 由 $\dfrac{*}{\infty}$ 未定式的广义 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=1。$$

显然，解法二比解法一简便得多。因本例满足 $\dfrac{*}{\infty}$ 未定式广义 L'Hospital 法则的条件，从而不必论证分子的变化趋势，只要分母趋于无穷大即可。这就省去了解法一中繁杂且不易实现的分子趋于无穷大的证明环节。

本文给出的广义 L'Hospital 法则并不要求分子趋于无穷大，而只要分母趋于无穷大即可。这在一定程度上拓宽了原有 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 未定式 L'Hospital 法则的适用范围，使得通过分子、分母求导以求极限这一简便方法能够应用于更多看似复杂而又难以入手的极限问题。

参考文献

[1] 杜其奎, 陈金如, 谢四清, 徐晓立. 数学分析精读讲义(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 2012: 162-163.

[2] 刘三阳, 李广民. 数学分析十讲[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 20-23.

[3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 228-230.