

The Existence of Positive Periodic Solutions for the Non-Autonomous Time-Delayed Predator-Prey Model

Yang Lu¹, Lan Qian Wang², Bo Bi³

Department of Applied Mathematics, College of Mathematics and Statistics, Northeast Petroleum University, Daqing Heilongjiang

Email: moonyanglu@126.com

Received: Sep. 20th, 2019; accepted: Oct. 8th, 2019; published: Oct. 15th, 2019

Abstract

In this paper, a time-varying predator-prey model of Beddington-DeAngelis functional response with stage-structured is established. By defining two normal numbers R^* and R_s , we obtain sufficient conditions for the persistence or extinction of system solutions. If $R_s > 1$, the solution of the system is uniformly persistent; if $R^* < 1$, the predator will be extinct. In addition, according to the continuous theorem of degree theory, when the system solution is uniformly persistent, it is concluded that the system has at least one positive periodic solution. Numerical simulation verifies and complements the results of qualitative theoretical analysis, and concludes that the short maturity period of immature predators is beneficial to the persistent survival of prey and predator populations.

Keywords

Predator-Prey Model, Non-Autonomous, Time Delay, Uniform Persistence, Positive Periodic Solution

非自治时滞捕食 - 食饵模型正周期解的存在性

卢 旻, 王倩兰, 毕 波

东北石油大学数学与统计学院应用数学系, 黑龙江 大庆

Email: moonyanglu@126.com

收稿日期: 2019年9月20日; 录用日期: 2019年10月8日; 发布日期: 2019年10月15日

摘要

本文建立了一个捕食者具有阶段结构的Beddington-DeAngelis型功能反应的时变捕食-食饵模型,通过定义两个正常数 R^* 和 R_* 得到了系统解持久或灭绝的充分条件。若 $R_* > 1$,则系统的解是一致持久的,若 $R^* < 1$,则捕食者种群灭绝。此外根据度理论的连续性定理,当系统解一致持久时,得到了系统至少存在一个正周期解。数值模拟验证并补充了定性理论分析的结果,得出幼年捕食者较短的成熟期有利于食饵和捕食者种群的持久生存。

关键词

捕食-食饵模型, 非自治, 时滞, 一致持久性, 正周期解

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,具有阶段结构的捕食-食饵模型得到了生物学学者的广泛关注[1]-[6],一般来说,幼年捕食者从出生到成熟有一个时间差,如果幼年捕食者和成年捕食者用一个固定的年龄来区分,那么这个时间差称为成熟期,Liu和Yuan[7]在功能反应项里考虑了成熟期时滞 τ ;S.Liu和E.Beretta[8]在自己的模型中也考虑了成熟期时滞 τ 对模型动力学行为的影响,其模型如下:

$$\begin{cases} x'(t) = rx(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K} \right] - \frac{bx(t)y(t)}{1 + k_1x(t) + k_2y(t)} \\ y'(t) = \frac{nbx(t-\tau)y(t-\tau)e^{-d_1\tau}}{1 + k_1x(t-\tau) + k_2y(t-\tau)} - d_1y(t) \\ y'_j(t) = \frac{nbx(t)y(t)}{1 + k_1x(t) + k_2y(t)} \\ \quad - \frac{nbx(t-\tau)y(t-\tau)e^{-d_1\tau}}{1 + k_1x(t-\tau) + k_2y(t-\tau)} - d_jy_j(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 为食饵的密度, $y(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别表示成年捕食者和幼年捕食者的密度; n 为捕食者的出生率, k_2 为捕食者之间干扰效应; b 为捕食者对食饵的捕获率大小; k_1 为捕食者处理食物的时间;假设幼年捕食者的死亡率为 d_j , τ 为幼年捕食者的成熟期.S.Liu和E.Beretta[8]得出如果系统是持久的,那么捕食者之间足够大的干扰不仅能使系统更加稳定,还可以增加成年捕食者的出生率。

在现实世界中,恒定的自然环境是很少的,任何生物或环境都会受到季节周期变化的影响。正如Cushing[9]指出,有必要考虑例如,天气、食物供应、收获季节、交配习惯、狩猎等季节性因素的影响。Shi[10]的模型中的全部参数都假定为周期系数,利用度连续理论讨论了正周期解的存在性。在本文中我们就食饵具有Logistic增长率的情形同时针对系统参数为周期时变情形做了定性的分析。

2. 模型的建立

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)r(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right] - \frac{b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} \\ y'(t) = \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \\ y'_j(t) = \frac{n(t)b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} - d_j(t)y_j(t) - \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为 t 时刻食饵和成年捕食者的密度, $y_j(t)$ 为 t 时刻未成年捕食者的密度。模型(2)中函数 $r(t), K(t), b(t), k_1(t), k_2(t), n(t), d(t), d_j(t)$ 的意义与 S. Liu 和 E. Beretta [8] 的模型中的参数意义一致。

3. 准备工作

首先, 为叙述并证明主要结果, 在此给出系统(2)的一些假设和符号说明。系统(2)的基本假设为:

(A₁) $r(t), K(t), b(t), k_1(t), k_2(t), n(t), d(t), d_j(t)$ 为时间 t 的连续有界正周期函数。

(A₂) 若函数 $g(t)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的连续有界正周期函数, 则

$$\bar{g} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt, \quad g^L = \min_{t \in [0, T]} |g(t)|, \quad g^M = \max_{t \in [0, T]} |g(t)|$$

系统(2)的初值条件为:

$$\begin{cases} y_j(0) = b(t) \int_{-\tau}^0 \frac{n(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^0 d_j(u)du}}{1+k_1(t)x(s)+k_2(t)y(s)} ds, \\ x(\theta) = \phi_1(\theta), y(\theta) = \phi_2(\theta), y_j(\theta) = \phi_3(\theta), \\ -\tau \leq \theta \leq 0, \\ \phi_1(0), \phi_2(0), \phi_3(0) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中对所有的 $\theta \in [-\tau, 0]$, 有 $\phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \phi_3(\theta))^T$ 使得 $\phi_i(\theta) \geq 0 (i=1, 2, 3)$ 且 C 表示从 $[-\tau, 0]$ 到 R^3 上的连续映射的全体构成的 Banach 空间 $C([-\tau, \theta], R^3)$ 元素 ϕ 在 C 上的范数为:

$$\|\phi\| = \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{|\phi_1(\theta)|, |\phi_2(\theta)|, |\phi_3(\theta)|\}.$$

4. 持久性和灭绝性

4.1. 持久性

定义

$$R_* = \frac{n^L b^L k^M e^{-d_j^M \tau}}{d^M (1+k_1^M K^M)}, \quad R^* = \frac{n^M b^M k^L e^{-d_j^L \tau}}{d^L (1+k_1^L K^L)}$$

定理 1 假设具有初始条件(3)的系统(2)满足 $R_* > 1$, 那么系统(2)是持久的。更具体地说, 我们得到了如下的结果:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq m_1, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq m_2$$

其中

$$m_1 = \frac{K^L (r^L k_2^L - b^M)}{r^L k_2^L}, \quad m_2 = \varepsilon \exp(-d^M (\tau + T_\varepsilon))$$

证明：我们将给出以下几个命题来完成这个定理的证明，证明方法类似于文献[11]，[12]中的证明方法。

定义 1 如果存在正常数 δ, Δ ， $0 < \delta < \Delta$ ，使得对于所有初值为正的(2)的解满足：

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t), \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \right\} \geq \delta, \quad \max \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t), \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \right\} \leq \Delta$$

则系统(2)的解是持久的。

命题 1 具有初始条件(3)的系统(2)的解，对所有的 $t \geq 0$ ，均为正。

证明：设 $(x(t), y(t))$ 为具有初始条件(3)的系统(2)的解，首先考虑 $y(t), t \in [0, t]$ 时解的正性。由系统(2)的第二个方程可知

$$y'(t) = \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \geq -d(t)y(t) \tag{4}$$

由于 $x(\theta), y(\theta) \geq 0$ 连续的依赖于 $-\tau \leq \theta \leq 0$ ，并且 $x(0), y(0) > 0$ 。从而，由比较原理可得对于 $t \in [0, t]$ ， $y(t) > 0$ 时

$$y(t) \geq y(0)e^{-\int_0^t d(s)ds} \tag{5}$$

由系统(2)的第一个方程，对于 $t \in [0, t]$ ，可得：

$$x(t) \geq x(0)e^{\int_0^t \left[\frac{r(s)x(s)}{K(s)} - \frac{b(s)y(s)}{1+k_1(t)x(s)+k_2(t)y(s)} \right] ds} > 0 \tag{6}$$

由初始条件(3)，对 $t \in (0, \tau)$ ，可以重新改写 $y_j(t)$ 如下：

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \int_{t-\tau}^t \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds \\ &= \int_{t-\tau}^0 \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds + \int_0^t \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds \\ &> 0 \end{aligned} \tag{7}$$

因此可得基于 $[-\tau, \tau]$ 区间上的 $x(t), y(t), y_j(t)$ 的正性，对于区间 $[\tau, 2\tau], \dots, [n\tau, (n+1)\tau], n \in N$ ，可以采取同样的方式证明。因此，具有初始条件(3)的系统(2)的解对于任何时刻 $t \geq 0$ 都是正的。

引理 1 [13] 考虑如下方程：

$$x'(t) = ax(t-\tau) - bx(t) - cx^2(t)$$

其中 a, b, c, τ 为正常数，对任意 $t \in [-\tau, 0]$ ， $x(t) > 0$ 。可得

(1) 如果 $a > b$ ，那么 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{a-c}{c}$ ；

(2) 如果 $a < b$ ，那么 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ 。

命题 2 具有初始条件(3)的系统(2)的解是一致有界的。

证明 设 $z(t) = (x(t), y(t))$ 是具有初始条件(3)的系统(2)的任意一个解, 由系统(2)的第一个方程, 可得

$$x'(t) \leq x(t)r(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right]$$

从而 $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq K^L$ 。

定义 $\eta(t) = x(t) + y(t) + y_j(t)$, 计算 $\eta(t)$ 沿着系统(2)的解轨线的导数, 可得:

$$\begin{aligned} \eta'(t) &= x(t)r(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right] - \frac{b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} \\ &\quad + \frac{n(t)b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} - d(t)y(t) - d_j(t)y_j(t) \\ &\leq \frac{r^L x^2}{K^M} + \left(r^M + \frac{n^M b^M}{k_2^L} \right) x(t) - d^L y(t) - d_j^L(t)y_j(t) \end{aligned} \tag{8}$$

对正常数 $\mu (\mu < \min \{d^L, d_j^L\})$, 由式(8)可得

$$\eta'(t) + \mu\eta(t) \leq \left(\mu + r^M + \frac{n^M b^M}{k_2^L} \right) x(t) - \frac{r^L x^2(t)}{K^M}$$

因此, 由 $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq K^L$, 可得对于任意时刻 t , 都存在正常数 B, T 使得:

$$\eta'(t) + \mu\eta(t) < B := \frac{K^M (\mu k_2^L + r^M k_2^L + n^M b^M)}{k_2^L r^L}$$

从而

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \eta(t) < \frac{B}{\mu} + \left(\eta(0) - \frac{B}{\mu} \right) e^{-\mu t} \tag{9}$$

因此, $x(t), y(t)$ 是一致有界的。结合(7)容易得到 $y_j(t)$ 也是一致有界的。

命题 3 系统(2)的任意解 $(x(t), y(t), y_j(t))$ 满足:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \frac{K^L (r^L k_2^L - b^M)}{k_2^L r^L} := m_1 > 0 \tag{10}$$

证明 由命题 2, 对于 $t > T_1 > 0$, 存在正常数 M , 使得 $y(t) \leq M$ 。因此, 当 $t > T_1 + \tau$ 时, 由系统(2)的第一个方程可得:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)r(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right] - \frac{b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} \\ &\geq x(t)r^L \left(1 - \frac{x(t)}{K^L} \right) - \frac{b^M M x(t)}{k_2^L M} \\ &= x(t) \left(r^L - \frac{b^M}{k_2^L} - \frac{r^M x(t)}{K^L} \right) \end{aligned}$$

从而, $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \frac{K^L (r^L k_2^L - b^M)}{k_2^L r^L}$ 。

命题 4 假设 $R_* = \frac{n^L b^L k^M e^{-d_j^M \tau}}{d^M (1+k_1^M K^M)} > 1$, 当 $0 < \varepsilon < \frac{(R_* - 1)(1+k_1^M K^M)}{k_2^M}$, $T_\varepsilon > 0$ 时, 对于具有初始条件

(3)的系统(2)的任意解 $(x(t), y(t), y_j(t))$, 可得:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \varepsilon \exp(-d^M (\tau + T_\varepsilon)) := m_2 \tag{11}$$

证明 已知 $R_* = \frac{n^L b^L k^M e^{-d_j^M \tau}}{d^M (1+k_1^M K^M)} > 1$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时

$$\left\{ \frac{r(t) - \frac{b^M \varepsilon}{1+k_2^L \varepsilon}}{\frac{r(t)}{K(t)}} \right\}^M \rightarrow K^M$$

定义

$$\left\{ \frac{r(t) - \frac{b^M \varepsilon}{1+k_2^L \varepsilon}}{\frac{r(t)}{K(t)}} \right\}^M - \varepsilon := x^\Delta$$

则 $\frac{b^L b^L x^\Delta e^{-d_j^M \tau}}{d^M (1+k_1^M x^\Delta + k_2^M \varepsilon)} > 1$ 。

考虑以下函数 $V(t)$

$$V(t) = y(t) + \int_{t-\tau}^t \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^{s+\tau} d_j(\theta)d\theta}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds \tag{12}$$

计算 $V(t)$ 沿系统(2)的解轨线的导数

$$\begin{aligned} V'(t) &= -d(t)y(t) + \frac{n(t)b(t)x(t)y(t)e^{-\int_t^{t+\tau} d_j(s)ds}}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} \\ &\geq \left\{ \frac{b^L b^L x(t)e^{-d_j^M \tau}}{1+k_1^M x(t)+k_2^M y(t)} - d^M \right\} y(t) \end{aligned} \tag{13}$$

可知对任意的 $t \geq t_1 (t_1 \geq 0)$, $y(t) \leq \varepsilon$ 是不可能成立的。假如 $y(t) > \varepsilon$, 可得当 $t \geq t_1 + \tau$ 时,

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)r(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right] - \frac{b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} \\ &\geq x(t) \left[r(t) - \frac{b^M \varepsilon}{1+k_2^L \varepsilon} - \frac{r(t)x(t)}{K(t)} \right] \end{aligned}$$

则

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \left\{ \frac{r(t) - \frac{b^M \varepsilon}{1+k_2^L \varepsilon}}{\frac{r(t)}{K(t)}} \right\}^M$$

若 $\frac{n^L b^L (K^M - \varepsilon) e^{-d_j^M \tau}}{d^M (1 + k_1^M (K^M - \varepsilon))}$ 中的 ε 为足够小的正常数, 且满足 $0 < \varepsilon < \frac{(R_* - 1)(1 + k_1^M K^M)}{k_2^M}$, 则必存在一个

$T_\varepsilon > 0$, 使得对于所有的 $t > T_\varepsilon$, $x(t) > x^\Delta$ 成立。因此当 $t \geq t_1 + \tau + T_\varepsilon := t_2$ 时, 对于任意的 $t \geq t_2$,

$$x(t) \geq \left\{ \frac{r(t) - \frac{b^M \varepsilon}{1 + k_2^L \varepsilon}}{\frac{r(t)}{K(t)}} \right\}^M - \varepsilon := x^\Delta \tag{14}$$

成立。

由上述不等式, 可得:

$$V'(t) \geq \left\{ d^M \frac{n^L b^L x^\Delta e^{-d_j^M \tau}}{d^M (1 + k_1^M x^\Delta + k_2^M \varepsilon)} - 1 \right\} y(t).$$

令

$$y_* = \min_{\theta \in [-\tau, 0]} y(t_2 + \tau + \theta).$$

接下来将证明对于任意的 $t \geq t_2$, $y(t) \geq y_*$ 成立。如果假设不成立, 则存在 $T > 0$ 使得对于任意的 $t_2 \leq t \leq t_2 + \tau + T$, 有:

$$y(t) \geq y_*, \quad y(t_2 + \tau + T) = y_*, \quad y'(t_2 + \tau + T) \leq 0$$

成立。另一方面, 由系统(2)的第二个方程, 当 $t = t_2 + \tau + T$ 时,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \\ &\geq \left(\frac{n^L b^L x^\Delta e^{-d_j^M \tau}}{1+k_1^M x^\Delta + k_2^M \varepsilon} - d^M \right) y_* > 0 \end{aligned}$$

显然是矛盾的。从而对于任意的 $t \geq t_2$, $y(t) \geq y_*$ 成立。因此对于任意的 $t \geq t_2$, 可得

$$V'(t) \geq \left\{ d^M \frac{n^L b^L x^\Delta e^{-d_j^M \tau}}{d^M (1 + k_1^M x^\Delta + k_2^M \varepsilon)} - 1 \right\} y_* > 0$$

即当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V(t) \rightarrow +\infty$ 。由命题 2, $V(t)$ 是有界的, 这显然是矛盾的。接下来, 我们将从下面两种情形分别进行讨论:

- (1) 对于任意充分大的时间 t , $y(t) \geq \varepsilon$;
- (2) 对于任意充分大的时间 t , $y(t)$ 是震荡的。

最终, 将得到当 t 充分大时, $y(t) \geq \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon))$ 成立。显然, 我们只需要考虑情形(2), 令 t_1 和 t_2 为充分大的时间, 且满足当 $t \in (t_1, t_2)$ 时:

$$y(t_1) = y(t_2) = \varepsilon, \quad y(t) < \varepsilon$$

若 $t_2 - t_1 \leq \tau + T_\varepsilon$, 因为 $y'(t) \geq -d(t)y(t)$, 并且 $y(t_1) = \varepsilon$ 表明对于 $t \in [t_1, t_2]$, 有 $y(t) \geq \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon))$ 成立。若 $t_2 - t_1 > \tau + T_\varepsilon$, 则对于 $t \in [t_1, t_1 + \tau + T_\varepsilon]$ 有 $y(t) \geq \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon))$ 成立。由(14), 可知, 对任意

的 $t \in [t_1 + \tau + T_\varepsilon, t_2]$, 有 $x(t) \geq x^\Delta$ 成立。因此, 对任意的 $t \in [t_1 + \tau + T_\varepsilon, t_2]$, 有 $y(t) \geq \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon))$ 成立。

如果对任意时间 $t \in [t_1, t_1 + \tau + T_\varepsilon + T^*]$, 存在 T_0^* 使得

$$\begin{aligned} y(t) &\geq \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon)) \\ y(t_1 + \tau + T_\varepsilon + T^*) &= \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon)) \\ y'(t_1 + \tau + T_\varepsilon + T^*) &\leq 0 \end{aligned}$$

由系统(2)的第二个方程, 当 $t = t_1 + \tau + T_\varepsilon + T^*$ 时, 可得:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \\ &\geq \left(\frac{n^L b^L x^\Delta e^{-d_j^M \tau}}{1+k_1^M x^\Delta + k_2^M \varepsilon} - d^M \right) \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon)) > 0 \end{aligned}$$

矛盾, 因此对所有的 $t \in [t_1, t_2]$, $y(t) \geq \varepsilon \exp(-d^M(\tau + T_\varepsilon))$ 成立。

由系统(2)的第三个方程及命题 1, 可得:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \int_{t-\tau}^t \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds \\ &\geq \frac{n^L b^L e^{-d_j^M \tau} m_1 m_2}{1+k_1^M m_1 + k_2^M m_2} := m_3 > 0 \end{aligned}$$

从而, 结合命题 2~4, 系统(2)是持久的。

4.2. 灭绝性

定理 2 若 $R^* < 1$, 则对具有初始条件(3)的系统(2)的任意正解 $(y(t), y_j(t))$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_j(t) = 0$ 。

证明 由 $R^* < 1$, 存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\frac{n^M b^M e^{-d_j^L \tau}}{d^L (1+k_1^L (K^L + \varepsilon))} < 1,$$

由 $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq K^L$, 存在时间 $T > 0$, 使得当 $t > T$ 时,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \\ &\leq \frac{n^M b^M (K^L + \varepsilon) e^{-d_j^M \tau} (t-\tau)}{1+k_1^L (K^L + \varepsilon)} - d^L(t)y(t) \end{aligned}$$

利用 $R^* < 1$, 可得 $y'(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = 0$ 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0,$$

从而，容易得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_j(t) = 0$ 。

注 1 当系统(2)的系数 $r(t), k(t), b(t), n(t), d(t), d_j(t), k_0(t), k_1(t)$ 和 $k_2(t)$ 均为常数时，则系统(2)就退化为以下的自治系统：

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)r \left[1 - \frac{x(t)}{K} \right] - \frac{bx(t)y(t)}{1+k_1x(t)+k_2y(t)} \\ y'(t) = \frac{nbx(t-\tau)y(t-\tau)e^{-d_j(\tau)}}{1+k_1x(t-\tau)+k_2y(t-\tau)} - dy(t) \\ y'_j(t) = \frac{nbx(t)y(t)}{1+k_1x(t)+k_2y(t)} - d_j y_j(t) - \frac{nbx(t-\tau)y(t-\tau)e^{-d_j(\tau)}}{1+k_1x(t-\tau)+k_2y(t-\tau)} \end{cases} \quad (15)$$

则：

$$R_* = R^* = R_0 = \frac{nbKe^{-d_j(\tau)}}{d(1+k_1K)}$$

由定理 1 不难发现，当 $R_0 < 1$ 时，本文对 Liu 和 Beretta [14] 中的主要结果进行了改进和推广。

5. 周期解的存在性

为了获得系统(2)的正周期解的存在性，引入连续性引理如下：

首先，取实巴拿赫空间及线性变换 $DomL \subset X \rightarrow Y$ ，取连续映射 $N: X \rightarrow Y$ 。如果 $\dim KerL = \text{codim Im } L < +\infty$ 且 $\text{Im } L$ 在 Y 上是闭的，则这个映射 L 称为指标为零的 Fredholm 映射，如果 L 为指标为零的 Fredholm 映射且存在连续投影 $P: X \rightarrow X$ 和 $Q: Y \rightarrow Y$ 使得 $\text{Im } P = KerL, \text{Im } L = KerQ = \text{Im}(I-Q)$ ，则 $L_{DomL \cap KerP}: (I-P)X \rightarrow \text{Im } L$ 可逆，设 L_p 的逆映射为 K_p 。设 Ω 为 X 中的有界开集，如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界且 $k_p(I-Q)N: \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧的，则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是紧的。由于 $\text{Im } Q$ 与 $KerL$ 同构，所以存在一个同构 $J: \text{Im } Q \rightarrow KerL$ 。

引理 2 [15] 设 $\Omega \in X$ 是一个有界开集， L 是指标为零的 Fredholm 映射， N 在 $\bar{\Omega}$ 上是紧的，假设

- (a) 对任意的 $\lambda \in (0,1)$ ， $x \in \partial\Omega \cap DomL$ ， $Lx \neq \lambda Nx$ ；
- (b) 对任意的 $x \in \partial\Omega \cap KerL$ ， $QXN \neq 0$ ；
- (c) $\text{deg}(JQN, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$ 。

则 $Lx = Nx$ 在 $DomL \cap \bar{\Omega}$ 内至少有一个解。

接下来证明系统(2)的正周期解的存在性，方法类似于文献[10]和[16]的方法。

定理 3 假设：

- (H₁) 引理 2 成立；
- (H₂) $r(t), k(t), b(t), n(t), d(t), d_j(t), k_0(t), k_1(t)$ 和 $k_2(t)$ 均为周期为 $\omega > 0$ 的连续正周期函数；
- (H₃) $\hat{r} - \left(\frac{\hat{b}}{k_2} \right) > \exp(2\hat{r}\omega)$ ；
- (H₄) $R_* > 1, K^M + 2d^M k_2^M K^M \omega < 1$ 。

则具有初始条件(3)的系统(2)至少存在一个正周期解。

证明：首先考虑具有初始条件：

$$\begin{cases} y_j(0) = b(t) \int_{-\tau}^0 \frac{n(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^0 d_j(u)du}}{1+k_1(t)x(s)+k_2(t)y(s)} ds \\ x(\theta), y(\theta) \geq 0, \text{在 } -\tau \leq \theta \leq 0 \text{ 连续} \\ x(0), y(0), y_j(0) > 0 \end{cases} \quad (16)$$

的子系统

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)r(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right] - \frac{b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} \\ y'(t) = \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \end{cases} \quad (17)$$

令

$$u_1(t) = \ln[x(t)], u_2(t) = \ln[y(t)] \quad (18)$$

将(18)代入(17)可得:

$$\begin{cases} u_1'(t) = r(t) \left[1 - \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right] - \frac{b(t)e^{u_2(t)}}{1+k_1(t)e^{u_1(t)}+k_2(t)e^{u_2(t)}} \\ u_2'(t) = \frac{n(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds} b(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)-u_2(t)+u_2(t-\tau)}}{1+k_1(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)}+k_2(t-\tau)e^{u_2(t-\tau)}} - d(t) \end{cases} \quad (19)$$

从而, 系统(19)有一个 ω 周期解。

接下来首先证明系统(19)至少有一个 ω 周期解。为了将引理 2 应用于(19), 首先定义

$$X = Y = \left\{ (u_1(t), u_2(t))^T \in C(R, R^2) : u_i(t+\omega) = u_i(t), i=1,2 \right\}$$

和

$$\| (u_1(t), u_2(t))^T \| = \max_{t \in [0, \omega]} |u_1(t)| + \max_{t \in [0, \omega]} |u_2(t)|$$

其中 $|\cdot|$ 表示欧几里德范数, 则容易得到 X 和 Y 是范数为 $\|\cdot\|$ 的巴拿赫空间。

令 $L: DomL \cap X \rightarrow X$, $L(u_1(t), u_2(t))^T = (u_1'(t), u_2'(t))^T$ 。其中 $DomL = \left\{ (u_1(t), u_2(t))^T \in C^1(R, R^2) \right\}$ 且 $N: X \rightarrow X$ 。

$$\begin{bmatrix} N(u_1(t)) \\ N(u_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1'(t) = r(t) \left[1 - \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right] - \frac{b(t)e^{u_2(t)}}{1+k_1(t)e^{u_1(t)}+k_2(t)e^{u_2(t)}} \\ u_2'(t) = \frac{n(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds} b(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)-u_2(t)+u_2(t-\tau)}}{1+k_1(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)}+k_2(t-\tau)e^{u_2(t-\tau)}} - d(t) \end{bmatrix}$$

定义

$$\begin{bmatrix} P(u_1) \\ P(u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(u_1) \\ Q(u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \int_{\omega}^1 u_1(t) dt \\ \frac{1}{\omega} \int_{\omega}^1 u_2(t) dt \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in X = Y$$

易知

$$KerL = \{(u_1, u_2) \in X \mid (u_1, u_2) = (h_1, h_2) \in R^2\}$$

且

$$ImL = \{(u_1, u_2) \in Y \mid \int_{\omega}^1 u_1(t) dt = 0, \int_{\omega}^1 u_2(t) dt = 0\}$$

是 Y 中的闭集, $\dim KerL = \text{codim Im}L = 2$, 且 P 和 Q 为连续投影

$$ImP = KerL, \quad KerQ = ImL = Im(I - Q),$$

由此可知, L 是指标为零的 Fredholm 映射。同时 L_p 的逆映射为 k_p , 则 $k_p: ImL \rightarrow DomL \cap KerP$, 且

$$\begin{bmatrix} k_p(u_1) \\ k_p(u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t u_1(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \int_{\omega}^1 u_1(s) ds dt \\ \int_0^t u_2(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \int_{\omega}^1 u_2(s) ds dt \end{bmatrix}$$

则由 $QN: X \rightarrow Y$ 及 $k_p(I - Q)N: X \rightarrow Y$ 可得

$$QNx = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \left[r(t) \left(1 - \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right) - \frac{b(t)e^{u_2(t)}}{1 + k_1(t)e^{u_1(t)} + k_2(t)e^{u_2(t)}} \right] dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \left[\frac{n(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s) ds} b(t-\tau) e^{u_1(t-\tau) - u_2(t) + u_2(t-\tau)}}{1 + k_1(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)} + k_2(t-\tau)e^{u_2(t-\tau)}} - d(t) \right] dt \end{bmatrix}$$

$$k_p(I - Q)Nx = \int_0^t Nx(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \int_0^t Nx(s) ds dt - \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \int_0^{\omega} Nx(s) ds$$

显然 QN 和 $k_p(I - Q)N$ 是连续的。

为应用引理 2, 需要寻找适当的开的有界 Ω 子集。相应的算子方程为 $Lx = \lambda Nx, \lambda \in (0, 1)$, 则:

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \left(r(t) \left[1 - \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right] - \frac{b(t)e^{u_2(t)}}{1 + k_1(t)e^{u_1(t)} + k_2(t)e^{u_2(t)}} \right) \\ \lambda \left(\frac{n(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s) ds} b(t-\tau) e^{u_1(t-\tau) - u_2(t) + u_2(t-\tau)}}{1 + k_1(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)} + k_2(t-\tau)e^{u_2(t-\tau)}} - d(t) \right) \end{bmatrix} \quad (20)$$

假设 $(u_1(t), u_2(t))^T \in X$ 是(20)当常数 $\lambda \in (0, 1)$ 时的解, 则沿着区间 $[0, \omega]$ 积分可得:

$$\begin{bmatrix} \int_0^{\omega} r(t) dt \\ \int_0^{\omega} d(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{\omega} \left(\frac{r(t)e^{u_1(t)}}{K(t)} - \frac{b(t)e^{u_2(t)}}{1 + k_1(t)e^{u_1(t)} + k_2(t)e^{u_2(t)}} \right) dt \\ \int_0^{\omega} \left(\frac{n(t-\tau) e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s) ds} b(t-\tau) e^{u_1(t-\tau) - u_2(t) + u_2(t-\tau)}}{1 + k_1(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)} + k_2(t-\tau)e^{u_2(t-\tau)}} \right) dt \end{bmatrix} \quad (21)$$

由 $(u_1(t), u_2(t))^T \in X$, 则存在 $\xi_i, \eta_i \in [0, \omega]$, 使得

$$u_i(\xi_i) = \min_{t \in [0, \omega]} u_i(t), \quad u_i(\eta_i) = \max_{t \in [0, \omega]} u_i(t), \quad i = 1, 2$$

由(21)的第一个方程, 可得

$$\hat{r}\omega = \int_0^\omega \left(\frac{r(t)e^{u_1(t)}}{K(t)} - \frac{b(t)e^{u_2(t)}}{1+k_1(t)e^{u_1(t)}+k_2(t)e^{u_2(t)}} \right) dt$$

此外

$$\hat{r}\omega > \int_0^\omega \left(\frac{r(t)e^{u_1(\xi_1)}}{K(t)} \right) dt = \omega e^{u_1(\xi_1)} \left(\frac{\hat{r}}{k} \right)$$

可得

$$\int_0^\omega |u'(t)| dt \leq 2\hat{r}\omega, \tag{22}$$

$$u_1(\xi_1) \leq \ln \left[\frac{\hat{r}}{\left(\frac{\hat{r}}{k} \right)} \right] := l_1, \tag{23}$$

由式(22)和(23)可得

$$u_1(t) \leq u_1(\xi_1) + \int_0^\omega |u_1'(t)| dt \leq l_1 + 2\hat{r}\omega := H_1, \tag{24}$$

由式(21)及式(H₃)的第一个方程可得

$$\hat{r}\omega \leq \int_0^\omega \left(\frac{r(t)e^{u_1(\eta_1)}}{K(t)} + \frac{b(t)}{k_2(t)} \right) dt = \left(\frac{\hat{b}}{k_2} \right) \omega + \omega e^{u_1(\eta_1)} \left(\frac{\hat{r}}{K} \right),$$

从而

$$u_1(\eta_1) \geq \ln \left[\frac{\hat{r} - \left(\frac{\hat{b}}{k_2} \right)}{\left(\frac{\hat{r}}{K} \right)} \right] := L_1. \tag{25}$$

由式(22), (25)以及(H₃)可得

$$u_1(t) \geq u_1(\eta_1) - \int_0^\omega |u_1'(t)| dt \geq \ln \left[\frac{\hat{r} - \left(\frac{\hat{b}}{k_2} \right)}{\left(\frac{\hat{r}}{K} \right)} \right] - 2\hat{r}\omega := H_2, \tag{26}$$

从而, 结合式(24)可得

$$\max_{t \in [0, \omega]} |u_1(t)| \leq \max \{ |H_1|, |H_2| \} := B_1.$$

由(21)的第二个式子, 可得

$$\int_0^\omega \left(\frac{n(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds} b(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)-u_2(t)+u_2(t-\tau)}}{1+k_1(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)}+k_2(t-\tau)e^{u_2(t-\tau)}} \right) dt = \int_0^\omega d(t)e^{u_2(t)}, \tag{27}$$

和

$$\int_0^\omega d(t)e^{u_2(t)} dt \leq \int_0^\omega \left(\frac{n(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds} b(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)-u_2(t)+u_2(t-\tau)}}{1+k_1(t-\tau)e^{u_1(t-\tau)}+k_2(t-\tau)e^{u_2(t-\tau)}} \right) dt,$$

从而

$$d^L \int_0^\omega e^{u_2(t)} dt \leq \frac{n^M b^M e^{-d_j^L \tau}}{k_2^L} \int_0^\omega e^{u_1(t)} dt .$$

结合式(24)可得:

$$u_2(\xi_2) \leq \ln \frac{n^M b^M e^{H_1 - d_j^L \tau}}{k_2 d^L} := l'_1, \tag{28}$$

再由式(20)可得

$$\int_0^\omega |u'_1(t)| dt \leq 2d^M \omega, \tag{29}$$

从而, 由式(28)和(29)可得

$$u_2(t) \leq u_2(\xi_2) \int_0^\omega |u'_1(t)| dt \leq \ln \frac{n^M b^M e^{H_1 - d_j^L \tau}}{k_2 d^L} + 2d^M \omega := H'_1. \tag{30}$$

由(27), 可得

$$\int_0^\omega d(t) e^{u_2(t)} dt \geq \int_0^\omega \left(\frac{n^L b^L e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s) ds} e^{u_1(t-\tau) + u_2(t-\tau) + u_2(t) + u_1(\xi_1) - d_j^M \tau}}{1 + k_1^M e^{u_1(\xi_1)} + k_2^M e^{u_2(\eta_2)}} \right) dt ,$$

连同式(26)和(H₄), 可得

$$u_2(\eta_2) \geq \ln \left(\left(\frac{n^L b^L e^{-d_j^M \tau} - d^M k_1^M}{d^M k_2^M} \right) e^{H_2} - \frac{1}{k_2^M} \right) := L'_1. \tag{31}$$

由式(29), (31)和(H₄)可推得

$$u_2(t) \geq u_2(\eta_1) - \int_0^\omega |u'_2(t)| dt \geq L'_1 - 2d^M \omega := H'_2, \tag{32}$$

结合(30), 可得

$$\max_{t \in [0, \omega]} |u_2(t)| \leq \max \{ |H_1|, |H_2| \} := B_2. \tag{33}$$

显然 B_1 、 B_2 与 λ 无关, 定义 $B = B_0 + B_1 + B_2$, 这里 B_0 足够大使得代数方程组的唯一解 $(u^*, v^*)^T$

$$\begin{cases} \bar{r} - \left(\frac{\hat{r}}{K} \right) e^u - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{\bar{b} e^u}{1 + k_1 e^u + k_2 e^v} \right) dt = 0 \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{n \bar{b} e^{u - \int_{t-\tau}^t d_j(s) ds}}{1 + k_1 e^u + k_2 e^v} \right) dt = \bar{d} \end{cases} \tag{34}$$

满足

$$\| (u^*, v^*)^T \| = |u^*| + |v^*| < M$$

令 $\Omega = \left\{ (u_1(t), u_2(t))^T \in X : \left\| (u_1, u_2)^T \right\| < M \right\}$ 满足定理 1 条件(H₁)。当 $(u_1(t), u_2(t))^T \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L = \partial\Omega \cap R^2$, 则 $(u_1, u_2)^T$ 是满足 $|u_1| + |u_2| < M$ 的 R^2 中的一个常数向量, 则

$$\begin{bmatrix} QN(u_1) \\ QN(u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r} - \left(\frac{\hat{r}}{K}\right)e^{u_1} - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{\bar{b}e^{u_1}}{1+k_1e^{u_1}+k_2e^{u_2}}\right) dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{\bar{n}be^{u_1 - \int_{t-\tau}^t d_j(s) ds}}{1+k_1e^{u_1}+k_2e^{u_2}}\right) dt - \bar{d} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则定理 3 的条件(H₂)是满足的。

最后, 将证明定理 3 的条件(H₃)是满足的, 定义 $\psi : domL \times [0,1] \rightarrow X$ 如下

$$\psi(u_1, u_2, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{r} - \left(\frac{\hat{r}}{K}\right)e^{u_1} \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{\bar{n}be^{u_1 - \int_{t-\tau}^t d_j(s) ds}}{1+k_1e^{u_1}+k_2e^{u_2}}\right) dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \left(-\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{\bar{n}be^{u_1 - \int_{t-\tau}^t d_j(s) ds}}{1+k_1e^{u_1}+k_2e^{u_2}}\right) dt \right) \\ \mu(\bar{d}) \end{pmatrix}$$

这里 $\mu \in [0,1]$, $(u_1(t), u_2(t))^T \in \partial\Omega \cap R^2$, $(u_1, u_2)^T$ 是 R^2 中的一个常向量, 满足

$$\|(u_1(t), u_2(t))^T\| = B.$$

接下来证明 $(u_1(t), u_2(t))^T \in \partial\Omega \cap KerL$, $\psi(u_1, u_2, \mu) \neq 0$ 。假设结论不真, 具有范数 $\|(u_1(t), u_2(t))^T\| = B$ 的常向量 $(u_1, u_2)^T$ 满足 $\psi(u_1, u_2, \mu) = 0$,

$$\begin{cases} \bar{r} - \left(\frac{\hat{r}}{K}\right)e^u - \mu \int_0^\omega \left(\frac{\bar{b}e^u}{1+k_1e^u+k_2e^v}\right) dt = 0, \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{\bar{n}be^{u - \int_{t-\tau}^t d_j(s) ds}}{1+k_1e^u+k_2e^v}\right) dt - \mu\bar{d} = 0. \end{cases}$$

结合(23)~(26)以及(28), (30), (31)~(32), 可得

$$\|(u_1(t), u_2(t))^T\| < B,$$

这与 $\|(u_1(t), u_2(t))^T\| = B$ 相矛盾, 利用拓扑度理论, 取

$$J = I : \text{Im}Q \rightarrow KerL, (u_1, u_2)^T \rightarrow (u_1, u_2)^T,$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} & \text{deg}(JQN, \Omega \cap KerL, (0,0)^T) \\ &= \text{deg}(\psi(u_1, u_2, 1), \Omega \cap KerL, (0,0)^T) \\ &= \text{deg}(\psi(u_1, u_2, 0), \Omega \cap KerL, (0,0)^T) \\ &= \text{deg}\left(\left(\bar{r} - \left(\frac{\hat{r}}{K}\right)e^{u_1}, \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\frac{\bar{n}be^{u_1 - \int_{t-\tau}^t d_j(s) ds}}{1+k_1e^{u_1}+k_2e^{u_2}}\right) dt\right), \Omega \cap KerL, (0,0)^T\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

即, 定理 3 中的条件(H₃)是满足的, 其中 $(u^*, v^*)^T$ 是(34)的唯一解。

最后, 容易证明集合 $\{k_p(I-Q)Nx | x \in \bar{\Omega}\}$ 是等度连续且一致有界的, 通过使用 Arzela-Ascoli 定理, 可得, $\{k_p(I-Q)Nx | x \in \bar{\Omega}\}$ 是紧的。因此, N 是 L -紧的。

现已证明 Ω 满足定理 3 所有的条件, 从而, (19) 至少有一个 ω 周期解。系统(16)至少有一个正的 ω 周期解。

令 $(x^*(t), y^*(t))^T$ 是系统(16)的一个正 ω 周期解, 可以证明

$$y_j^*(t) = \int_{-\tau}^0 \left(\frac{n(s)b(s)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds} x^*(s)y^*(s)}{1+k_1(s)x^*(s)+k_2(s)y^*(s)} \right) ds$$

也是 ω 周期解。从而 $(x^*(t), y^*(t))^T$ 为具有初始条件(3)的系统(2)的一个正 ω 周期解。

6. 数值模拟

6.1. 当 $R_* > 1$ 时, 系统(2)的解的持久性以及正周期解的存在性

影响种群持久性的因素很多, 其中一个重要因素就是种群成熟期的长短, 接下来将针对幼年捕食者的不同成熟期进行数值模拟:

(1) 选择第一组参数 $r(t) = 2 + \sin(2\pi t)$, $K(t) = 2$, $b(t) = 10$, $k_1(t) = 1$, $k_2(t) = 1$, $n(t) = 3 + 2\sin(2\pi t)$, $d(t) = 3 + 2\sin(2\pi t)$, $d_j(t) = 0.1$ 。当 $\tau = 2$, $R_* = 9.8248 > 1$; $\tau = 6$, $R_* = 5.3383 > 1$ 时, 由定理 1, 系统(2)的解是持久的; 由定理 1, 系统(2)至少存在一个正周期解(见图 1 和图 2)。

(2) 选择第二组参数 $r(t) = 2 + \sin(2\pi t)$, $K(t) = 1000$, $b(t) = 2 + \sin(2\pi t)$, $k_1(t) = 1$, $k_2(t) = 1$, $n(t) = 3 + 2\sin(2\pi t)$, $d(t) = 3 + 2\sin(2\pi t)$, $d_j(t) = 0.1$ 。当 $\tau = 6$, $R_* > 1$ 时, 由定理 1, 系统(2)的解是持久的; 由定理 1, 系统(2)至少存在一个正周期解(见图 3)。

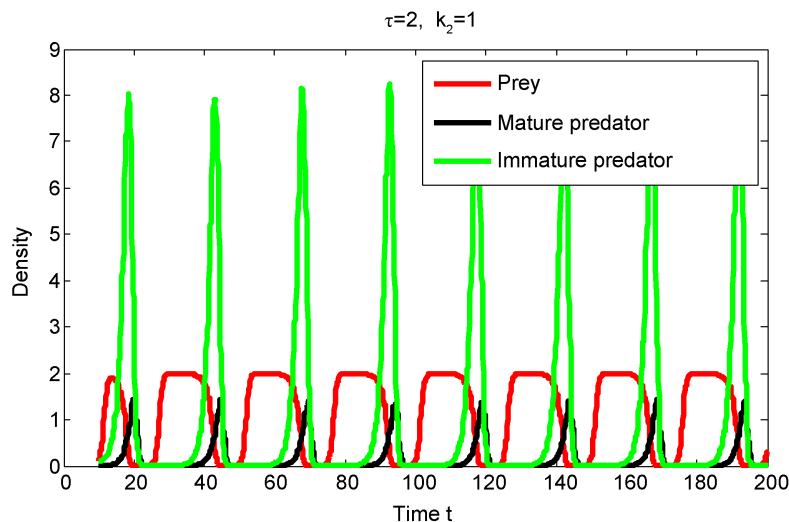


Figure 1. Basic behavior of solutions of system (3) with $\tau = 2$, $R_* = 9.8248 > 1$

图 1. 系统(2)在 $\tau = 2$, $R_* = 9.8248 > 1$ 时的解的基本性态

6.2. 当 $R^* < 1$ 时, 系统(2)中捕食者的灭绝性

选择参数 $\tau = 2$, $r(t) = 3 + \sin(t)$, $K(t) = 2$, $b(t) = 1$, $k_1(t) = 1$, $k_2(t) = 0.5$, $n(t) = 1 + \sin(t)$, $d(t) = 4 + \sin(t)$, 时 $d_j(t) = 1$, $R^* = 0.0601 < 1$, 捕食者种群灭绝(见图 4)。

6.3. R_* 与 R^* 对幼年捕食者成熟期时滞 τ 的敏感度分析

除时滞 τ 外, 当其它参数取值同图 1 情形时, R_* 与 R^* 对幼年捕食者成熟期时滞 τ 的敏感度分析如图 5。

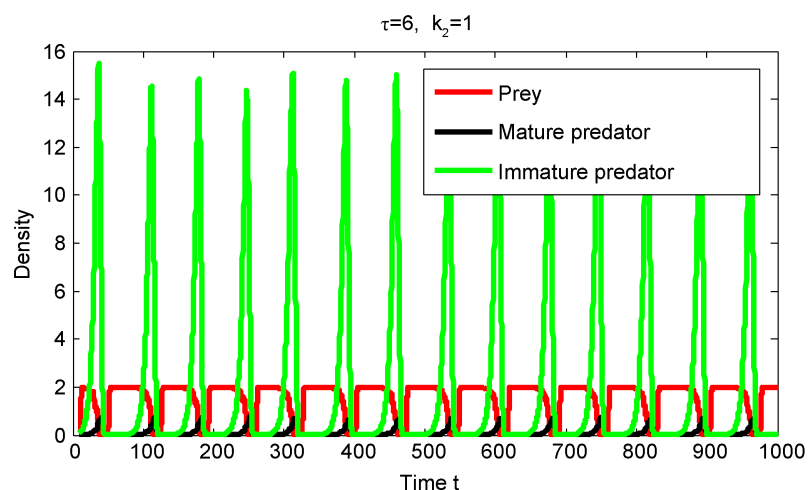


Figure 2. Basic behavior of solutions of system (2) with $\tau = 6$, $R_* = 5.3383 > 1$
图 2. 系统(2)在 $\tau = 6$, $R_* = 5.3383 > 1$ 时的解的基本性态

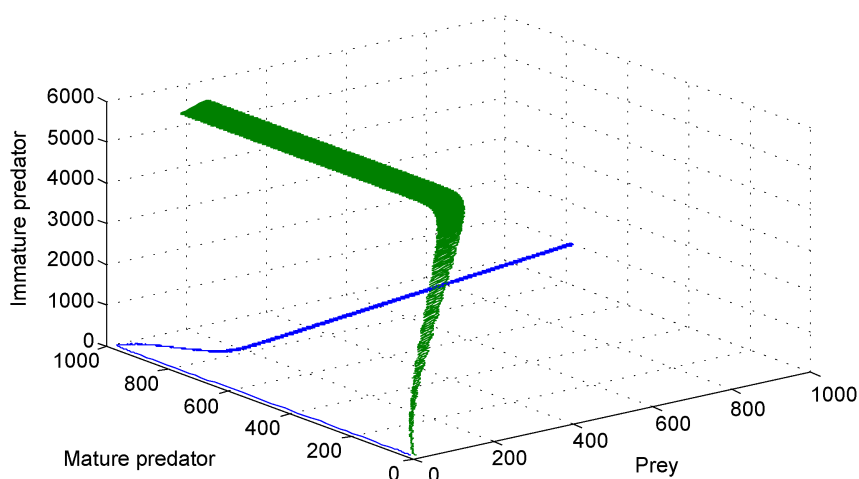
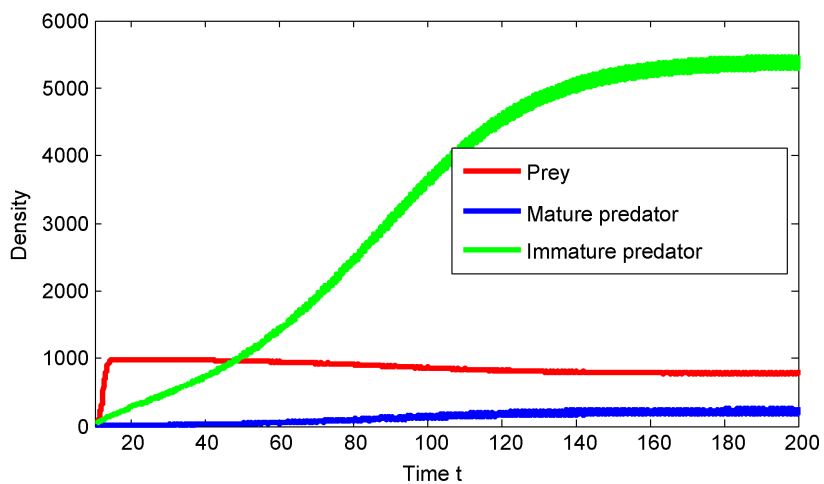


Figure 3. Basic behavior of solutions of system (2) with $\tau = 6$, $R_* > 1$
图 3. 系统(2)在 $\tau = 6$, $R_* > 1$ 时的解的基本性态

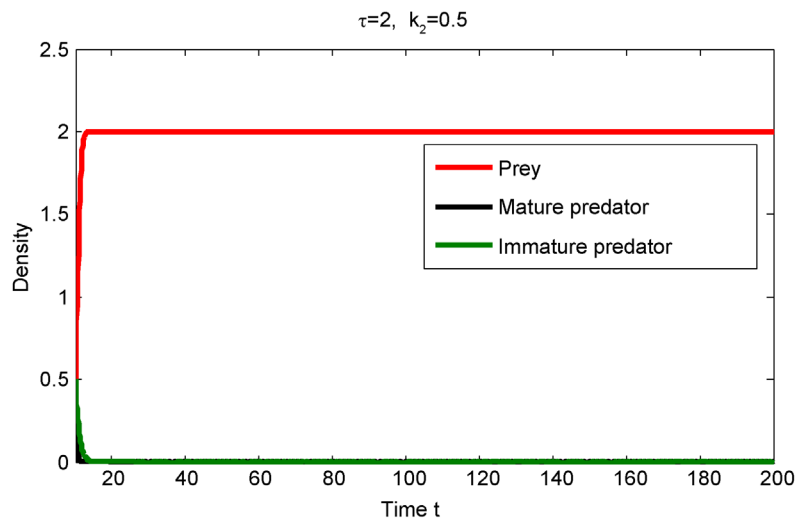


Figure 4. Basic behavior of solutions of system (2) with $\tau = 2$, $R^* = 0.0601 < 1$
图 4. 系统(2)在 $\tau = 2$, $R^* = 0.0601 < 1$ 时的解的基本性态

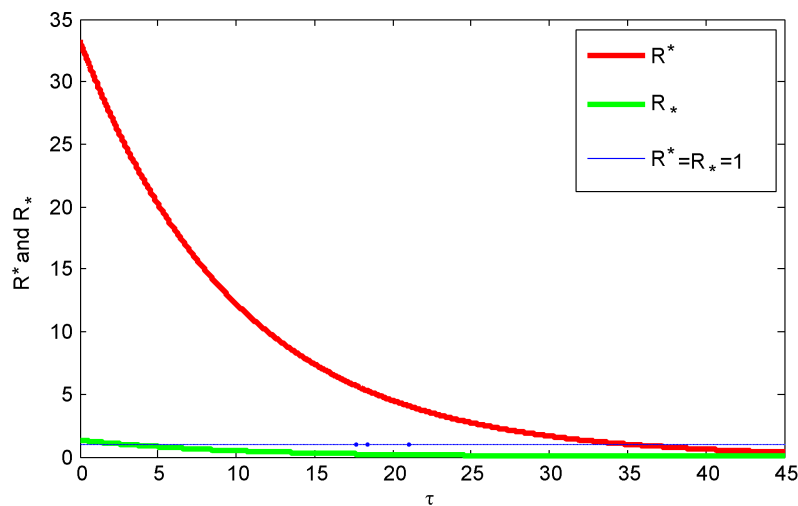


Figure 5. The relationships between R_*, R^* and parameter τ , respectively
图 5. R_*, R^* 与 τ 的关系

7. 结论

本文提出了一个基于时变系数和阶段结构的 Beddington-DeAngelis 型的时滞捕食 - 食饵模型。通过应用微分方程比较原理和度理论的连续性定理, 对模型进行了定性的理论分析。

在定性理论分析的同时, 通过定义两个正常数 R^* 和 R_* , 得到当 $R_* > 1$ 时, 系统(2)是持久的(见定理 1 和图 1~3); 当 $R^* < 1$ 时, 捕食者是灭绝的(见定理 2 和图 4)。

当 $R_* > 1$ 时, 系统是持久的, 本文证明了食饵和成年捕食者存在正的下界(见定理 1)。同时, 基于食饵和成年捕食者的正的下界, 得到了时变参数下食饵和成年捕食者的种群数量随 R^* 和 R_* 的变化关系。本文中系统(2)持久性的充分条件弱于文献[17]中相应定理的条件。当系统(2)所有的参数都为常数时, R^* 和 R_* 就还原为相应自治系统的基本再生数(见注 1)。当系统(2)的解持久时, 利用度理论中的连续性定理, 得到了系统(2)至少存在一个正 ω 周期解(见图 1~3)。

数值模拟中的敏感度分析显示了较短的幼年捕食者成熟期对系统解的持久性是有益的, 反之较长的成熟期会导致捕食者种群的灭绝(见图 5)。

值得注意的是系统(2)的动力学行为对于 $R_* < 1 < R^*$ 的情形仍然是不清楚的, 本文就此情形并未给出定性的理论分析证明以及数值模拟。关于模型(2)中成年捕食者方程中含有密度制约项, 以及模型(2)存在多少个正周期解的问题都将留给未来去研究解决。

致 谢

在此特别感谢哈工大的刘胜强教授对本文前期工作的建设性意见, 以及东北石油大学校引导性基金(项目代码: 15011030604)的支持。

参考文献

- [1] Aiello, W. and Freeman, H.I. (1990) A Time-Delay Model of Single-Species Growth with Stage-Structure. *Mathematical BioSciences*, **101**, 139-153. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(90\)90019-U](https://doi.org/10.1016/0025-5564(90)90019-U)
- [2] Al-omari, J. and Gourley, S. (2003) Stability and Traveling Fronts in Lotka-Volterra Competition Models with Stage Structure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **63**, 2063-2086. <https://www.jstor.org/stable/4096076>
<https://doi.org/10.1137/S0036139902416500>
- [3] Liu, S., Chen, L., Luo, G. and Jiang, J. (2002) Asymptotic Behavior of Competitive Lotka-Volterra System with Stage Structure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **271**, 124-138.
[https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00103-8](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00103-8)
- [4] Liu, S., Chen, L. and Agarwal, R. (2002) Recent Progress on Stage-Structured Population Dynamics. *Mathematical and Computer Modelling*, **36**, 1319-1360. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(02\)00279-0](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(02)00279-0)
- [5] Liu, S., Chen, L. and Luo, G. (2002) Extinction and Permanence in Competitive Stage Structure System with Time Delays. *Nonlinear Analysis*, **51**, 1317-1361. [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(01\)00901-4](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00901-4)
- [6] Ou, L., Lou, Y., Jiang, Y. and Li, Y. (2003) The Asymptotic Behaviors of a Stage Structured Autonomous Predator-Prey System with Time Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **283**, 534-548.
[https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(03\)00283-X](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00283-X)
- [7] Liu, Z. and Yuan, R. (2004) Stability and Bifurcation in a Delayed Predator-Prey System with Beddington-DeAngelis Functional Response. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **296**, 521-537.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.04.051>
- [8] Liu, S. and Edoardo, B. (2010) Predator-Prey Model of Beddington-DeAngelis Type with Maturation and Gestation Delays. *Nonlinear Analysis*, **11**, 4072-4091. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.03.013>
- [9] Cushing, J.M. (1997) Periodic Time-Dependent Predator-Prey System. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **32**, 82-95. <https://doi.org/10.1137/0132006>
- [10] Yang, S.J. and Shi, B. (2008) Periodic Solution for a Three-Stage-Structured Predator-Prey System with Time Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 287-294. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.10.025>
- [11] Zhang, T. and Teng, Z. (2009) Permanence and Extinction for a Nonautonomous SIRS Epidemic Model with Time Delay. *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1058-1071. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.12.020>
- [12] Wang, X., Liu, S. and Song, X. (2013) Dynamic of a Nonautonomous HIV-1 Infection Model with Delays. *International of Biomathematics*, **6**, Article ID: 1350030. <https://doi.org/10.1142/S1793524513500307>
- [13] Song, X. and Chen, L. (2001) Optimal Harvesting and Stability for a Two-Species Competitive System with Stage-Structure. *Mathematical Biosciences*, **170**, 173-186. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(00\)00068-7](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(00)00068-7)
- [14] Liu, S. and Edoardo, B. (2006) A Stage-Structured Predator-Prey Model of Beddington-DeAngelis Type. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **4**, 1001-1129. <https://doi.org/10.1137/050630003>
- [15] Gaines, R.E. and Mawhin, J.L. (1977) Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/BFb0089537>
- [16] Zhang, Z. and Luo, J. (2010) Multiple Periodic Solutions of a Delayed Predator-Prey System with Stage Structure for the Predator. *Nonlinear Analysis*, **11**, 4109-4120. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.03.015>
- [17] Xu, R., Chaplain, M.A.J. and Davidson, F.A. (2005) Permanence and Periodicity of a Delayed Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Stage Structure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **303**, 602-621.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.08.062>