Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(8), 980-988
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.98124

A Multiresolution Analysis Based on Sierpinski Fractal

Daiqi Li, Wanshe Li

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi
Email: liwanshe@126.com

Received: Oct. 4th, 2019; accepted: Oct. 24th, 2019; published: Oct. 31st, 2019

Abstract

According to the classic theory, the notion of multiresolution analysis based on σ-finite measure spaces built from dilations and translations on a fractal arising from an iterated affine function system. A multiresolution analysis based on Sierpinski gasket is discussed in this paper. By defining unitary dilation operator D and unitary operator T, and combining the measure knowledge in fractal geometry, the multiresolution analysis on the inflated fractal set based on Sierpinski gasket is proved.

Keywords

Sierpinski Gasket, Fractal, Multiresolution Analysis, Framework

基于Sierpinski分形上的多分辨分析

李岱琪，李万社

陕西师范大学，数学与信息科学学院，陕西 西安
Email: liwanshe@126.com

收稿日期：2019年10月4日；录用日期：2019年10月24日；发布日期：2019年10月31日

摘 要

根据经典的由迭代仿射函数系统产生的分形的扩张和平移所生成的σ有限测度空间上的多分辨分析的概念，本文讨论了基于Sierpinski垫上的多分辨分析，通过定义酉扩张算子D和酉算子T，并结合分形几何中的测度知识证明了基于Sierpinski垫的膨胀分形集上的多分辨分析。

文章引用: 李岱琪, 李万社. 基于 Sierpinski 分形上的多分辨分析[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 980-988.
DOI: 10.12677/pm.2019.98124

关键词

Sierpinski垫，分形，多分辨分析，框架

1. 引言

随着科学研究的推进，小波理论体系不仅可以定义在实数域上，还可以定义在其他域上，比如阿贝尔群、分层树、一些分形集等[1] [2] [3] [4]。

近年来，小波与分形的结合已经成为科学研究的热点问题。小波分析技术可以有效地揭示分形局域标度性质，小波分析还具有放大和移位的功能，它是从远处到近处观察形体，这与分形的本质是尺度变化相类似。Mallat 和 Meyer 建立的多分辨分析(Multi-Resolution Analysis, MRA)为小波分析奠定了基础，多分辨分析与分形之间也有一定的联系。多分辨分析是从远到近观察形体，先观察其轮廓，再观察其线条，进一步观察物体的细节纹理，这体现了从低分辨到高分辨的思想，对具有自相似性质的分形的观察也是这样，通过从大到小的不同尺度变换，在越来越小的尺度上观察越来越丰富的细节，这也是从低分辨到高分辨的观察过程。

多分辨分析是由 S. Mallat 引入的。他在空间概念上形象的说明了小波的多分辨特性。1989 年，Mallat 在探究小波变换多分辨分析理论与图像处理的应用时，受到塔式算法的启发，提出了信号的塔式多分辨分析分解与重构的快速算法，即著名的 Mallat 算法。MRA 形成了构造正交小波基的一个框架，比如常用的 Daubechies 紧支撑正交小波基可以看作是该框架下的产物[5]。

D. Dutkay 和 P. Jorgensen 介绍了由迭代仿射函数系统产生的分形的扩张和平移所生成的 σ 有限测度空间上的多分辨分析的概念[6]，但主要是基于一维分形集的情形，比如一维康托尔集上的多分辨分析。本文讨论了基于 Sierpinski 垫上的多分辨分析，证明了基于 Sierpinski 垫的膨胀分形集上的多分辨分析，丰富了多分辨分析的内涵。

2. 预备知识

在本文中，用 R 表示实数集合，Z 表示所有整数集合，$\mathbb{C}$ 表示复数空间。下面先讨论多分辨分析的定义。

定义 1 [6]空间 $L^2(R)$ 中一列闭子空间 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 称为 $L^2(R)$ 的一个依尺度函数 φ 的多分辨分析，如果该序列满足下列条件：

(1) 嵌套性：$V_j \subseteq V_{j+1}, \forall j \in Z$

(2) 逼近性：$\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$，$\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j} = L^2(R)$

(3) 伸缩性：$f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}, \forall j \in Z$

(4) 平移不变性：$f(x)\in V_0 \Leftrightarrow f(x-k)\in V_0, \forall k \in Z$

(5) Riesz 基存在性：

存在函数 $\varphi\in V_0$，使得 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$ 构成 V_0 的一个 Riesz 基，即函数序列 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$ 线性无关，且存在常数 A 和 B，满足 $0<A\le B<+\infty$，使得对任意的 $f(x)\in V_0$，总存在序列 $\{c_k\}_{k\in Z}\in l^2$ 使得

$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\varphi(x-k)$ 且 $A\|f\|_2^2\le\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2\le B\|f\|_2^2$，则称 φ 为尺度函数，并称 φ 生成 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in Z}$。

特别地，若 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$ 构成 V_0 的一个标准正交基，则称 φ 为正交尺度函数；相应地，称 φ 生成 $L^2(R)$ 的一个正交多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in Z}$。

由一维多分辨分析的张量积空间构造二维多分辨分析，我们给出如下定义：

定义 2 [7] [8]

1. 用 $L^2(R^2)$ 表示平面上的平方可积函数空间，即

$$f(x,y)\in L^2(R^2)\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

设 $\{V_j^1\}$ 和 $\{V_j^2\}$ 是由尺度函数 $\varphi^1(x)$ 和 $\varphi^2(y)$ 生成的两个多分辨分析，则可以得到 V_j^1 和 V_j^2 的张量积空间 $V_j=V_j^1\otimes V_j^2$。由于 V_j^1 的基底为 $\{2^{j/2}\varphi^1(2^jx-k)\}$，$V_j^2$ 的基底为 $\{2^{j/2}\varphi^2(2^jy-l)\}$，所以 V_j 的基底为 $\{2^j\varphi^1(2^jx-k)\varphi^2(2^jy-l)\}$。对于二元函数 $f(x,y)$，引入记号 $f_{j;k,l}(x,y)=2^jf(2^jx-k,2^jy-l)$，记 $\varphi(x,y)=\varphi^1(x)\varphi^2(y)$，则 $\{\varphi_{j;k,l}(x,y):k,l\in Z\}$ 是 V_j 的基底。

这样，$\{V_j\}$ 就形成 $L^2(R^2)$ 中的一个多分辨分析，$\varphi(x,y)$ 就是相应的尺度函数。

2. 在 $L^2(R^2)$ 函数空间的一串子空间序列集合 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 称为依尺度函数 $\varphi(x,y)$ 的多分辨分析：

(1) 嵌套性：$V_j(x,y)\subseteq V_{j+1}(x,y),\forall j\in Z$

(2) 逼近性：$\bigcap_{j\in Z}V_j(x,y)=\{0\}$，$\bigcup_{j\in Z}V_j(x,y)=L^2(R^2)$

(3) 伸缩性：$f(x,y)\in V_j(x,y)\Leftrightarrow f(2x,2y)\in V_{j+1}(x,y),\forall j\in Z$

(4) 平移不变性：$f(x,y)\in V_0(x,y)\Leftrightarrow f(x-k,y-l)\in V_0(x,y),\forall k,l\in Z$

(5) 规范正交基：$\varphi(x,y)=\varphi^1(x)\varphi^2(y)\in V_0(x,y)$，$\{\varphi(x-k,y-l)\}$ 是 $V_0(x,y)$ 的一组标准正交基。

令 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间，$\{\psi_{j;k,l}(x,y)=2^j\psi(2^jx-k,2^jy-l)\}$ 构成 W_j 的基底，则由多分辨分析可以得到两个结果：

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$$

$$L^2(R^2)=V_0\oplus W_0\oplus W_1\oplus W_2\oplus\cdots$$

3. Sierpinski 垫上的多分辨分析

给定平面 R^2 上的一个单位正三角形 S_0，在每边上取中点，然后两两连结，构成四个边长为 1/2 的正三角形，把中间的三角形去掉(但是保留其三条边)，得到集合 S_1（见图 1)，然后在 S_1 的三个三角形的每边取中点，分别连结成边长为 $1/2^2$ 的小正三角形，又分别去掉中间一个(同样保留每个三角形的三边)，剩下一共有 3^2 个三角形。如此不断继续下去，得到一个平面集列：$S_0\supset S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$ 可见 S_k 是由 3^k 个边长为 $1/2^k$ 的正三角形组成。$\{S_k\}$ 的极限集 $S=\bigcap_{k=0}^{\infty}S_k$ 称为 Sierpinski (谢尔宾斯基)垫片，它是一个著名的分形集[9] [10]。

S_k 的总面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k$，所以当 $k\to\infty$ 时，S 的面积等于如下极限：$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k=0$。

我们将原三角形 S_0 视为 $L^2(R^2)$ 空间中的子空间 V_0，把每次去掉的部分子空间记为 W_k，将余下的部分记为 V_k（如图 2)。

容易看出任意两个不同区域的交集是空集，表示它们的特征函数(该区域的元素集合) $C_V(x)$ 与

$C_W(x)$ 彼此正交，简记为 $C_V(x):=V, C_W(x):=W$，则有 $V_1 \cap W_1=\{0\}$，$V_2 \cap W_2 \cap W_1=\{0\}$，$V_N \cap W_N \cap W_{N-1} \cap \cdots \cap W_1=0$。

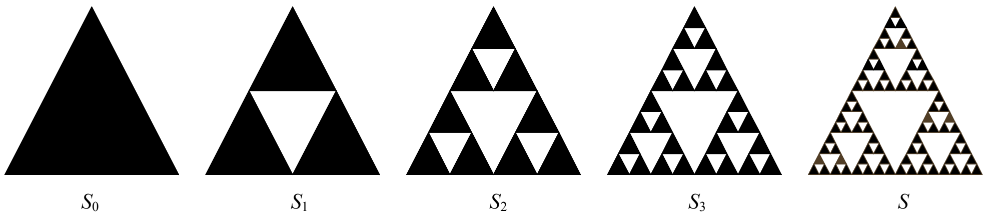

Figure 1. Establishment of Sierpinski gasket
图 1. Sierpinski 垫的形成过程

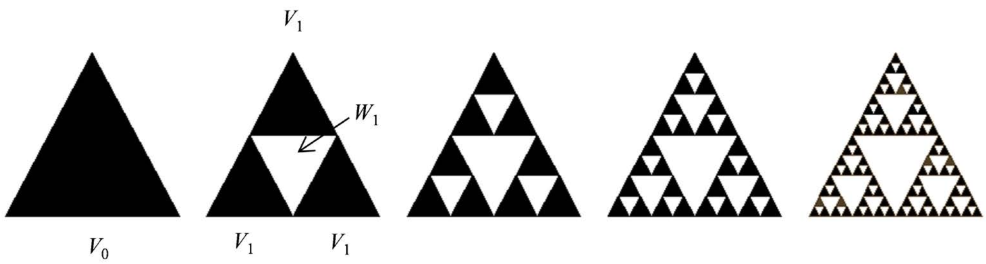

Figure 2. MRA of Sierpinski gasket
图 2. Sierpinski 垫上的多分辨分析

我们发现 V_k 与 W_k 互不相交，说明分别定义在 V_k 与 W_k 上面的特征函数彼此正交，对于不同的子空间 W_k 与 W_l，它们之间彼此正交，即定义在它们上面的特征函数彼此正交。然而对于不同的子空间 V_k 与 V_l，并不是正交的，我们有 $V_0=V_1 \oplus W_1$，W_1 是 V_1 在 V_0 中的正交补空间，依此类推，$V_1=V_2 \oplus W_2$，$V_2=V_3 \oplus W_3$，因此，$V_0=V_1 \oplus W_1=V_2 \oplus W_2 \oplus W_1=\cdots$

在 V 上定义尺度函数 $\varphi(x,y)$，W 上定义小波函数 $\psi(x,y)$。将 V_k 上的基函数 $\varphi_{m,n}(x,y)$ 和 W_k 上的基函数 $\psi_{m,n}(x,y)$ 结合起来展开 $L^2(R^2)$ 空间中的信号 $f(x,y)$，$L^2(R^2)$ 空间的正交分解为 $V_0=V_1 \oplus W_1=V_2 \oplus W_2 \oplus W_1=\cdots=V_N \oplus \left(\oplus_{k=1}^{N} W_k\right)$。相应的信号 $f(x,y)$ 的分解过程为

$$
\begin{aligned}
f^0(x,y) &= f^1(x,y)+d^1(x,y)=f^2(x,y)+d^2(x,y)+d^1(x,y) \\
&= f^3(x,y)+d^3(x,y)+d^2(x,y)+d^1(x,y)=\cdots \\
&= f^N(x,y)+\sum_{k=1}^{N} d^k(x,y)
\end{aligned}
$$

我们对 $L^2(R^2)$ 空间赋予多分辨分析的几何特征，将多分辨分析这一抽象的数学定义与实用信号结合起来。

4. 基于 Sierpinski 垫的膨胀分形集上的多分辨分析

4.1. 定义直角三角形 Sierpinski 垫

特别地，我们旨在于研究直角三角形 Sierpinski 垫。

在 R^2 上构建一个直角三角形 S_0，顶点分别是 $(0,0),(0,1),(1,0)$. 设对角扩张矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，令

$$S_1=\left[A^{-1}(S_0+\tau_0)\right] \cup \left[A^{-1}(S_0+\tau_1)\right] \cup \left[A^{-1}(S_0+\tau_2)\right]$$

其中，$\tau_0=(0,0),\tau_1=(1,0),\tau_2=(0,1)$，则

$$S_2=\left[A^{-1}(S_1+\tau_0)\right]\cup\left[A^{-1}(S_1+\tau_1)\right]\cup\left[A^{-1}(S_1+\tau_2)\right]$$

继续归纳下去，有

$$S_{n+1}=\left[A^{-1}(S_n+\tau_0)\right]\cup\left[A^{-1}(S_n+\tau_1)\right]\cup\left[A^{-1}(S_n+\tau_2)\right]$$

因此，我们可以得到 R^2 上的紧子集的一个嵌套序列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$。

然后，定义 Sierpinski 垫分形 $S=\bigcap_{n=0}^{\infty}S_n$ （见图 3），这个 Sierpinski 垫 S 满足自相似关系

$$A(S)=S\cup\left[S+(1,0)\right]\cup\left[S+(0,1)\right]$$

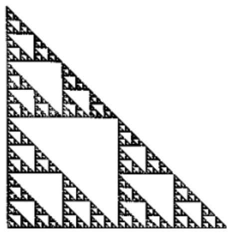

Figure 3. S
图 3. S

我们知道 S 的 Hausdorff 维数是 $s=\dfrac{\log 3}{\log 2}$，记 $\mathcal{H}^s(S)$ 表示在 S 上的 s 维 Hausdorff 测度，简记为 $\mathcal{H}$，则 $\mathcal{H}\left(A^{-1}(S)\right)=\frac{1}{3}\mathcal{H}(S)=\frac{1}{3}$。更一般地，如果 E 是 S 的一个 Borel 子集，则 $\mathcal{H}\left(A^{-1}(E)\right)=\frac{1}{3}\mathcal{H}(E)$。

4.2. 基于 Sierpinski 垫的膨胀分形集上的多分辨分析

定义一个与 Sierpinski 垫 S 有关的一个膨胀分形集

$$\mathcal{R}_s=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}\bigcup_{(m,n)\in Z^2}\left[A^j\left(S+(m,n)\right)\right]$$

对于 $\mathcal{R}_s$ 的每一个 Borel 子集 E，测度满足

$$\mathcal{H}\left(A^{-1}(E)\right)=\frac{1}{3}\mathcal{H}(E)$$

$$\mathcal{H}\left(E+(m,n)\right)=\mathcal{H}(E),\ \forall(m,n)\in Z^2 .$$

在 Hilbert 空间 $L^2(\mathcal{R}_s,\mathcal{H})$ 上，构建酉扩张算子 D 和酉算子 T，定义如下：

$$D(f)(s,t)=\sqrt{3}f(2s,2t) \tag{1}$$

$$T_{(m,n)}f(s,t)=f(s-m,t-n) . \tag{2}$$

这些算子满足一个标准的交换关系：

定理 1

设 D 和 $\left\{T_{(m,n)}:(m,n)\in Z^2\right\}$ 是上述定义的酉算子，则

$$T_{(m,n)}D=DT_{(2m,2n)},\ \ \forall(m,n)\in Z^2$$

证明：由(1)式和(2)式可得：

$$T_{(m,n)}D(f)(s,t)=\sqrt{3}T_{(m,n)}f(2s,2t)=\sqrt{3}f(2s-2m,2t-2n)$$
$$=\sqrt{3}T_{(2m,2n)}f(2s,2t)=DT_{(2m,2n)}f(s,t)$$

所以 $T_{(m,n)}D=DT_{(2m,2n)},\forall(m,n)\in Z^2$

现在构建一个 $L^2(\mathcal{R}_s,\mathcal{H})$ 上的多分辨分析。定义一个闭子空间 $V_0\subset L^2(\mathcal{R}_s,\mathcal{H})$，

$$V_0=\overline{span}\left\{T_{(m,n)}(\mathcal{X}_S)\square(m,n)\in Z^2\right\},$$

其中 $\mathcal{X}_S$ 是 Sierpinski 垫三角形上的特征函数(对应标准多分辨分析中的尺度函数)。Sierpinski 垫 S 满足自相似关系

$$A(S)=S\cup\left[S+(1,0)\right]\cup\left[S+(0,1)\right]$$

在测度为 0 的集合上，上述的并集是互相非交的并集，且它的特征函数 $\mathcal{X}_S$ 满足扩张方程

$$\mathcal{X}_S\left(A^{-1}(s,t)\right)=\mathcal{X}_S(s,t)+\mathcal{X}_S(s-1,t)+\mathcal{X}_S(s,t-1)$$

通过构造，V_0 在算子 $\left\{T_{(m,n)}\square(m,n)\in Z^2\right\}$ 下是不变量。对于每个 $j\in Z$，定义

$$V_j=D^j(V_0)$$

可以看出

$$V_1=DV_0=D\left(\overline{span}\left\{T_{(m,n)}(\mathcal{X}_S)\square(m,n)\in Z^2\right\}\right)$$
$$=\overline{span}\left\{DT_{(m,n)}(\mathcal{X}_S)\square(m,n)\in Z^2\right\}$$
$$=\overline{span}\left\{T_{(m/2,n/2)}D(\mathcal{X}_S)\square(m,n)\in Z^2\right\}$$

因此，$V_0\subseteq D(V_0)=V_1$。由此看出，闭子空间 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 形成了 $L^2(\mathcal{R}_s,\mathcal{H})$ 的闭空间的一个递增的嵌套序列。

下面证明子空间 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 形成一个多分辨分析

定理 2

设 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 是上述构造的 $L^2(\mathcal{R}_s,\mathcal{H})$ 的子空间，设 D，$\left\{T_{(m,n)}:(m,n)\in Z^2\right\}$ 是定理 1 中的酉算子，则有

(1) $D^{-1}(\mathcal{X}_S)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathcal{X}_S+T_{(1,0)}(\mathcal{X}_S)+T_{(0,1)}(\mathcal{X}_S)\right]$

(2) $\left\langle T_{(m,n)}(\mathcal{X}_S),\mathcal{X}_S\right\rangle=\delta_{(m,n),(0,0)},(m,n)\in Z^2$

(3) $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}V_j}=L^2(\mathcal{R}_s,\mathcal{H})$

(4) $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}V_j=\{0\}$

证明：

(1) 由 Sierpinski 垫 S 的自相似关系和对应的扩张方程可知，因为

$$\mathcal{X}_S\left(A^{-1}(s,t)\right)=\mathcal{X}_S(s,t)+\mathcal{X}_S(s-1,t)+\mathcal{X}_S(s,t-1)$$
$$=\mathcal{X}_S(s,t)+T_{(1,0)}\left(\mathcal{X}_S(s,t)\right)+T_{(0,1)}\left(\mathcal{X}_S(s,t)\right)$$

又因为

$$D(f)(s,t)=\sqrt{3}f(2s,2t)$$

$$D^{-1}\left(\sqrt{3}f(2s,2t)\right)=f(s,t)$$

则

$$D^{-1}\left(\sqrt{3}\mathcal{X}_S(2s,2t)\right)=\mathcal{X}_S(s,t)$$

$$D^{-1}\left(\sqrt{3}\mathcal{X}_S(s,t)\right)=\mathcal{X}_S\left(2^{-1}s,2^{-1}t\right)$$

所以

$$D^{-1}(\mathcal{X}_S)=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{X}_S\left(2^{-1}s,2^{-1}t\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{X}_S\left(A^{-1}(s,t)\right)$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{X}_S)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathcal{X}_S+T_{(1,0)}(\mathcal{X}_S)+T_{(0,1)}(\mathcal{X}_S)\right]$$

(2) 因为

$$T_{(m,n)}\left(\mathcal{X}_S(s,t)\right)=\mathcal{X}_S(s-m,t-n)$$

所以

$$\left\langle T_{(m,n)}(\mathcal{X}_S),\mathcal{X}_S\right\rangle=\left\langle \mathcal{X}_S(s-m,t-n),\mathcal{X}_S\right\rangle=\delta_{(m,n),(0,0)}$$

(3) 我们将证明对于任意 Hausdorff 可测子集 $E\subset\mathcal{R}_s$，其中 $\mathcal{H}(E)<\infty$，则 $\mathcal{X}_E$ 含于 $\operatorname{span}\left\{D^jT_{(m,n)}(\mathcal{X}_S)\mid j,m,n\in Z\right\}$ 的闭包中。

因为 $\mathcal{R}_s=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}\bigcup_{(m,n)\in Z^2}\left[A^j\left(S+(m,n)\right)\right]$，我们可以写一个集合 $E=\bigcup E_{(j,m,n)}$，其中 $E_{(j,m,n)}=E\bigcap\left[A^j\left(S+(m,n)\right)\right]$。

容易证明，每个集合 $E_{(j,m,n)}$ 的特征函数含于 $\operatorname{span}\left\{D^jT_{(m,n)}(\mathcal{X}_S)\mid j,m,n\in Z\right\}$ 的闭包。因此，通过扩张和平移，不失一般性，我们可以假定任意可测集 $E\subset S$。

设 $\mathcal{V}$ 是 S 中所有子三角形的左下顶点的集合，对于每一个 $\{\vec{v}\}\in\mathcal{V}$，有一个递减的交集：$\{\vec{v}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}T_n$，其中 T_n 是 S 的一个平移的 n 次扩张。我们可以得到 $\mathcal{H}(\{\vec{v}\})=\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}(T_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$。由测度的次可数可加性得，$\mathcal{H}(\mathcal{V})=0$。

令 $S'=S\sim\mathcal{V}$，则 $\mathcal{H}(S')=\mathcal{H}(S)=1$。因为 S 是一个度量空间，所以 S' 也是，尽管 S' 不再是闭的。

因此，不失一般性，我们假定 $E\subset S'$，令

$$\mathcal{T}=\left\{A^{-k}\left(S+(i,j)\right)\bigcap S' □ k\in N,(i,j)\in\{(0,0),(1,0),(0,1)\}\right\}$$

$\mathcal{T}$ 是由 S' 的子 Sierpinski 垫组成的，它是 S' 的子集的一个半代数，也就是说，$\mathcal{T}$ 中元素的有限非交的并形成了 S' 子集的一个代数。我们用 $\mathcal{A}$ 表示这个代数，在 $\mathcal{A}$ 上作用一个 Hausdorff 测度，得到一个 $\mathcal{A}$ 上的集值函数，记为 u^*，它满足 Caratheodory 扩张定理的条件。因此，u^* 可以延伸为 S' 的所有子集的一个外测度，u^* 与代数 $\mathcal{A}$ 上的 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}$ 一致。因此，u^* 决定了可测集上的一个 σ 代数 $\mathcal{M}$，这个可测集含有包含 $\mathcal{A}$ 的最小的 σ 代数 $\mathcal{B}$。如果将外测度 u^* 限制到 $\mathcal{M}$ 上，则变成测度，记为 u，显然 $(X,\mathcal{M},u)$ 是一个完备的测度空间。而且，因为 $u^*(S')=\mathcal{H}(S')$ 是有限的，由 Caratheodory 扩张定理可知，将 $\mathcal{A}$ 上的 $\mathcal{H}$ 延伸成含有 $\mathcal{A}$ 的最小的 σ 代数是唯一的。因此，不论在 $\mathcal{B}$ 上还是 $\mathcal{M}$ 上，都有 $u=\mathcal{H}$。剩下的问题

是，当构造 S' 子集上的外 Hausdorff 测度时所产生的 σ 代数是否大于利用 Caradiodory 扩张定理产生的 Hausdorff 测度 $u=\mathcal{H}$ 的 σ 代数 $\mathcal{M}$？

注意，集合 $\mathcal{T}$ 族除了是 S' 子集的半代数外，也是 S' 的任意子集的一个 Vitali 覆盖，也就是说，对于每一个 $x\in E$ 和每个 $\delta>0$，都有一个子集 $T\in\mathcal{T}$，其中 $x\in T, 0<\mathcal{H}(T)\le\delta$。利用 Vitali 覆盖上的 Caratheodory 扩张定理构造的外测度是度量外测度，因此,对于任意子集 A 和 B，其中 $d(A,B)>0$，满足 $u^*(A\cup B)=u^*(A)+u^*(B)$。此外，如果 v^* 是度量空间 X 上的度量外测度，则该外测度下的可测集的 σ 代数包含 X 的 Borel 集的 σ 代数。我们将这个结果应用于 $(S',\mathcal{M},u)$ 可以推导出 u^* 是度量外测度，且 $\mathcal{M}$ 包含 S' 的 Borel 集。因此，由 u^* 构造的 S' 可测集的 σ 代数包含 S' 的 Borel 集以及 S' 的开集和闭集。因此，在 S 的 Borel 子集上，$\mathcal{H}$ 与 u 是一致的[11]。

最后，如果利用 Caratheodory 扩张定理在集合 X 上用代数 $\mathcal{A}$ 构造有限测度 u，则给定任意可测集 $G\subset X$，存在 $\mathcal{A}$ 的一个元 R，使得 $u(G\Delta R)<\varepsilon$。

由上述结果以及 S' 的可测子集 E 可知，存在一个 F_σ 集 $F\subset E$，其中 $\mathcal{H}(E\Delta F)=\mathcal{H}(E\sim F)=0$。因为在 S' 的 Borel 集的 σ 代数上，$u=\mathcal{H}$，$\mathcal{H}\left(F\Delta\bigcup_{i=1}^{n}T_i\right)<\epsilon$，则可推导出存在一个有限集 Sierpinski 子三角形 T_i，其中 $u\left(F\Delta\bigcup_{i=1}^{n}T_i\right)<\epsilon$。但是，因为 $\mathcal{H}(E\Delta F)=0$，所以 $\mathcal{H}\left(E\Delta\bigcup_{i=1}^{n}T_i\right)<\epsilon$。因此，$\mathcal{X}_E$ 含于 $\operatorname{span}\left\{D^jT_{(m,n)}(\mathcal{X}_S)\mid j,m,n\in Z\right\}$ 的闭包[12] [13] [14]。

(4) 对于 $f\in\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}V_j$，如果 $(x,y)\in\operatorname{support}(f)$，则对于每一个 $j\in Z$，存在一些 $(u_j,v_j)\in Z^2$，使得 $(x,y)\in A^j\left(S+(u_j,v_j)\right)$。

对于使 $x^2+y^2<2^{2j-1}$ 成立的足够大的 j，有 $(u_j,v_j)\in\{(0,0),(0,-1),(-1,0)\}$，且对于这些 j，(u_j,v_j) 是常量。因此，(x,y) 一定是 $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}A^jS$，$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}A^j\left(S+(0,1)\right)$，$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}A^j\left(S+(-1,0)\right)$ 之一。因为 $f\in V_{-j}$ 一定是 $A^j\left(S+(u,v)\right)$ 上的常量，所以每个并是嵌套的意味着 f 在这些并上都是常量.因为每个并的测度是无限的，所以这些常量必须都是 0 [15]。

因此，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 构成了 $L^2(\mathcal{R}_s,\mathcal{H})$ 上的一个多分辨分析，$\left\{T_{(m,n)}(\mathcal{X}_S)\right\}$ 构成了 V_0 的标准正交基。

5. 结束语

由于小波分析可以同时在时域和频域内进行局部化信号，并对信号在不同尺度上进行分解和重构，所以研究分形集上的多分辨分析具有重要的现实意义，为分形集上的小波变换奠定基础。本文首先讨论了基于 Sierpinski 垫上的多分辨分析，然后通过构建酉扩张算子 D 和酉算子 T，结合分形几何中的测度知识证明了基于 Sierpinski 垫的膨胀分形集上的多分辨分析。

参考文献

[1] Yang, S.Z. and Cheng, Z.X. (2002) Orthonormal Multi-Wavelets on the Interval [0,1] with Multiplicity. *Acta Mathematica Sinica*, **45**, 789-796.

[2] Nakahira, K. and Miyamoto, A. (2018) Parseval Wavelets on Hierarchical Graphs. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **44**, 414-445. https://doi.org/10.1016/j.acha.2016.05.004

[3] 师东利, 李万社. 基于二维康托尔二元群的小波变换[J]. 纺织高校基础科学学报, 2017, 30(3): 311-317.

[4] 聂伟平, 师东利, 李万社. 二维康托尔集上的多分辨分析[J]. 西安文理学院学报, 2016, 19(5): 26-29.

[5] 成礼智. 小波的理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 75-77.

[6] Dutkay, D. and Jorgensen, P.E.T. (2006) Wavelets on Fractals. *Revista Matematica Iberoamericana*, **22**, 131-180. https://doi.org/10.4171/RMI/452

[7] 方清城. MATLAB R2016a 小波分析 22 个算法实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2018: 338-342.

[8] 沙震, 阮火军. 分形与拟合[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2005: 16-18.

[9] Christensen, O. (2005) Wavelet Frames and Multiresolution Analysis. *Pure and Applied Mathematics Series*, **272**, 73-103. https://doi.org/10.1201/9781420026511.pt2

[10] Bohnstengel, J. and Kessebohmer, M. (2010) Wavelets for Iterated Function Systems. *Functional Analysis*, **259**, 583-601. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.04.014

[11] David, G. and Semmes, S. (1997) Fractured Fractals and Broken Dreams. Clarendon Press, Oxford.

[12] D'Andrea, J., Merrill, K.D. and Packer (2008) Fractal Wavelets of Dutkay-Jorgensen Type for the Sierpinski Gasket Spaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, **451**, 69-88. https://doi.org/10.1090/conm/451/08758

[13] Baggett, L.W., Medina, H.A. and Merrill, K.D. (1999) Generalized Multi-Resolution Analyses and a Construction Procedure for All Wavelet Sets in $\mathbb{R}^n$. *Fourier Analysis Applications*, **5**, 563-573. https://doi.org/10.1007/BF01257191

[14] Strichartz, R.S. (1997) Piecewise Linear Wavelets on Sierpinski Gasket Type Fractals. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, **3**, 387-415. https://doi.org/10.1007/BF02649103

[15] Cao, S.P. and Qiu, H. (2017) Some Properties of the Derivatives on Sierpinski Gasket Type Fractals. *Constructive Approximation*, **46**, 319-347. https://doi.org/10.1007/s00365-017-9385-3