Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(8), 864-870
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.98113

The Effects of Weakly NS^*-Permutable Subgroups on the Supersolvability of Finite Groups

Xianghua Wu

Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
Email: Wwuxianghua@hotmail.com

Received: Sep. 16th, 2019; accepted: Oct. 4th, 2019; published: Oct. 11th, 2019

Abstract

Let G be a finite group. A subgroup H of G is called nearly S-permutable subgroup in G if for every prime p with $(p,|H|)=1$ and for every subgroup K of G containing H the normalizer $N_K(H)$ contains some Sylow p-subgroup of K. A subgroup H of G is said to be weakly NS^*-permutable subgroup of G if there exists a subnormal T of G such that $G = HT$, and $H \cap T \le H_{nG}$, where H_{nG} is the subgroup of H generated by all those subgroups of H which are nearly S-permutable in G. In this article, we investigate the structure of G under the assumption that some subgroups are weakly NS^*-permutable subgroups of G.

Keywords

Nearly S-Permutable Subgroups, Weakly NS^*-Permutable Subgroups, Supersolvability

弱NS^*-置换子群对有限群超可解的影响

吴湘华

广西师范大学数学与统计学院，广西 桂林
Email: Wwuxianghua@hotmail.com

收稿日期：2019年9月16日；录用日期：2019年10月4日；发布日期：2019年10月11日

摘 要

设G是有限群，H是G的一个子群。称H是G的几乎S-置换子群，若 $H \le K \le G$ 且对于 $(p,|H|)=1$ 的任意素

文章引用: 吴湘华. 弱 NS^*-置换子群对有限群超可解的影响[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 864-870.
DOI: 10.12677/pm.2019.98113

数p，使得正规化子$N_K(H)$包含K的某些Sylow p-子群。称H是G的弱NS^*-置换子群，若存在G的一个次正规子群T，使得$HT=G$且$H\cap T\le H_{nG}$，其中H_{nG}由包含在H中的所有几乎S-置换子群生成。本文假设G的某些子群是弱NS^*-置换子群的前提下，得到G的相关结构定理。

关键词

几乎S-置换子群，弱NS^*-置换子群，超可解

1. 引言

本文使用通常的记号及术语，具体可参考文献[1] [2] [3]。G表示有限群，$|G|$表示G的阶，$\pi(G)$表示$|G|$的所有素因子集合，G_p表示G的一个Sylow p-子群，H_G表示H在G中的核。

设$\mathfrak{F}$是一类群，称$\mathfrak{F}$是一个群系，若(i) 当$G\in\mathfrak{F}$且$H\trianglerighteq G$，则$G/H\in\mathfrak{F}$；(ii) 对G的所有正规M和N，当G/M和G/N都在$\mathfrak{F}$中，则$G/(M\cap N)$在$\mathfrak{F}$中。群系$\mathfrak{F}$称为饱和的当且仅当$G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$。显然，超可解群系是饱和群系。

假设H是G的一个子群，称H在G中是S-置换的[4]，若对于G的任意Sylow子群P满足$HP=PH$。称H是G的弱S-置换子群[5]，若存在G的一个次正规子群T，使得$HT=G$且$T\cap T\le H_{sG}$，其中H_{sG}是包含在H中G的最大S-置换子群。2007年Skiba在文献[5]中研究了当G的一般性子群皆是弱S-置换子群时群G的相关结构，并给出了两个重要定理。最近文献[6]对此类子群继续做了进一步的研究。2012年Khaled. A. Al-Sharo在文献[7]指出：设H在G中是S-置换的，若$H\le K\le G$且对于$(p,|H|)=1$的任意素数p，则正规化子$N_K(H)$包含K的所有Sylow p-子群。因此，进一步提出了一类几乎S-置换子群。称H是G的几乎S-置换子群，若$H\le K\le G$且对于$(p,|H|)=1$的任意素数p，使得正规化子$N_K(H)$包含K的某些Sylow p-子群。

本文作为对弱S-置换子群和几乎S-置换子群的进一步深化和推广，介绍一类新的子群如下：

定义1.1 设G是有限群，H是G的一个子群。称H在G中是弱NS^*-置换的，若存在G的一个次正规子群T，使得$HT=G$且$H\cap T\le H_{nG}$，其中H_{nG}是包含在H中G的最大几乎S-置换子群。

可以知道S-置换子群，几乎S-置换子群以及弱S-置换子群都是弱NS^*-置换子群，但是反过来是不真的。

例1.1 置换群S_4的2阶子群$\langle(12)\rangle$是S_4的是弱NS^*-置换子群。但是对于S_4的一个包含$\langle(12)\rangle$的6阶子群K，其正规化子$N_K(\langle(12)\rangle)$不包含K的任何Sylow 3-子群，因此，$\langle(12)\rangle$不是几乎S-置换子群，也不是S-置换子群，从而也不是弱S-置换子群。

具体而言，本文得到了如下的一个主要定理：

定理1.1 设$\mathfrak{F}$是一个饱和群系，包含所有的超可解群。G是有限群，且存在G的一个正规子群E，使得$G/E\in\mathfrak{F}$。若E的每个非循环的Sylow子群P有一个子群D，满足$1<|D|<|P|$，且P的每个$|D|$阶子群及$2|D|$阶子群(当$|P:D|>2$，且P为非交换2-群)在G中若无超可解补则是G的弱NS^*-置换子群，则$G\in\mathfrak{F}$。

本文的结构如下，第 1 节是背景介绍，在第 2 节中，给出相关的预备定理，在第 3 节中给出主要定理的证明。

2. 预备定理

引理 2.1 [7] 设 H 在 G 中是几乎 S-置换的，N 是 G 的正规子群。

1) HN 在 G 中是几乎 S-置换的；

2) 若 H 是一个 p-群，则 $H\cap N$ 在 G 中是几乎 S-置换；

3) 若 H 是一个 p-群，则 HN/N 在 G/N 中是几乎 S-置换；

4) 假设对于某个素数 p，有 $|H|=p^n$，则 $H\le O_p(G)$。

设 p 是一个素数，称 G 是 p-闭的，若在 G 中有一个 Sylow p-子群是正规的。

引理 2.2 [5] 设 G 是有限群，p、q 是 $|G|$ 的不同的素因子。令 PQ 分别为 G 的 Sylow p-子群和 Sylow q-子群，若对于 P 的任意极大子群(P 非循环群)在 G 中都有是 q-闭的补，则 Q 是 G 的正规子群。

引理 2.3 [1] 设 G 是有限群，$H\le K\le G$，$M\le G$。

1) 若 H、M 都是 G 的次正规子群，则 $\langle H,M\rangle$ 是 G 的次正规子群；

2) 若 H 是 G 的正规子群，则 K/H 在 G/H 中次正规当且仅当则 K 在 G 中次正规；

3) 若 H 是 G 的正规子群，且 $|G:H|_p=1$，则 H 包含 G 所有的 Sylow p-子群(见文献[8])。

引理 2.4 设 G 是有限群，H、K 都是 G 的子群，且 $H\le K\le G$。

1) H_{nG} 是 G 的一个几乎 S-置换子群，且 $H_{sG}\le H_{nG}$；

2) $H_{nG}\le H_{nK}$；

3) 若 H 是 G 的正规子群，则 $(K/H)_{n(G/H)}=K_{nG}/H$。

证 1)~3)都是显然的。

引理 2.5 设 G 是有限群，H、K 都是 G 的子群，且 $H\le K\le G$。

1) 若 H 在 G 中是几乎 S-置换的，则 H 在 G 中是弱 NS^*-置换的；

2) 若 H 是 G 的正规子群，且 K 在 G 中是弱 NS^*-置换的，则 K/H 在 G/H 中是弱 NS^*-置换的；

3) 若 H 在 G 中是弱 NS^*-置换的，则 H 在 K 中是弱 NS^*-置换的；

4) 若 H 是 G 的正规子群，则 EH/H 在 G/H 中是弱 NS^*-置换的当且仅当 H 在 K 中是弱 NS^*-置换的，且 $(|E|,|H|)=1$；

5) 假设 H 是一个 p-群，且 H 在 G 中不是几乎 S-置换的。若 H 在 G 中是弱 NS^*-置换的，那么存在 G 的一个正规子群 M，使得 $|G:M|=p$ 且 $G=HM$。

证 1) 显然；

2) 根据假设可知，存在 G 的一个次正规子群 T，使得 $KT=G$ 且 $K\cap T\le K_{nG}$。由引理 2.3 (1)可知，HT 是 G 的次正规子群。再由引理 2.3 (2)，HT/H 是 G/H 的次正规子群。另一方面，$(HT/H)(K/H)=G/H$，且依引理 2.4 (3)，$(HT/H)\cap(K/H)=(HT\cap K)/H=H(T\cap K)/H\le HK_{nG}/H=K_{nG}/H=(K/H)_{n(G/H)}$，因此 K/H 在 G/H 中是弱 NS^*-置换的；

3) 不妨假设 T 是 G 的一个次正规子，满足 $HT=G$ 且 $H\cap T\le H_{nG}$，从而有 $K=K\cap TH=H(K\cap T)$。由引理 2.4 (2)，$(K\cap T)\cap H\le H_{nG}\le H_{nK}$，故 H 是 K 的弱 NS^*-置换子群；

4) 由假设，存在 G 的一个次正规子群 T，使得 $ET=G$ 且 $E\cap T\le E_{nG}$。显然，$H\le T$，因此 $T\cap HE=H(T\cap E)\le H(E_{nG})\le(HE)_{nG}$，故 HE 是 G 的弱 NS^*-置换子群。再由(2)知 EH/H 在 G/H 中是弱 NS^*-置换的。反过来则是显然的；

5) 根据假设，存在 G 的一个次正规子群 T，使得 $HT=G$ 且 $H\cap T\le H_{nG}\ne H$。因此，存在 G 的一

个非平凡的正规子群 G，使得 $T \le K$。由于 G/K 是一个 p-群，故存在 G 的一个正规子群 M，使得 $|G:M| = p$ 且 $G = HM$。

引理 2.6 设 N 是有限群 G 的一个初等交换正规子群。假设 N 有一个子群 D，满足 $1 < D < N$，若 N 的每个 $|D|$ 阶子群在 GK 中皆是弱 NS^*-置换的，则存在 N 的某些极大子群在 G 中是正规的。

证 假设引理不真，令 H 是 N 的一个 $|D|$ 阶子群。不妨先设 H 在 G 中不是几乎 S-置换的。根据假设，H 是 G 的弱 NS^*-置换子群。再由引理 2.5 (5)知，存在 G 的一个正规子群 T，使得 $|G:T|$ 为素数，且 $G = HT$。由此得 $G = NT$，从而 $T \cap N$ 是 N 的极大子群且在 G 中正规，矛盾。因此对 N 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中都是几乎 S-置换的。设 M 为 N 的一个极大子群，则 M 在 G 中是几乎 S-置换的。假设 N 是一个 p-群，从而 M 也是 p-群，即有 $|G:N_G(M)| = p^a$ 对某个自然数 a。令 $\{M_1, M_2, \cdots, M_t\}$ 是 N 的所有极大子群的集合，则有 p 整除 t，这与文献[9] (III, 8.5 (d))矛盾。

引理 2.7 设 $\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系，包含所有的幂零群。G 是有限群，记 G 的可解 $\mathfrak{F}$-上根 $P = G^{\mathfrak{F}}$。假设 G 的每个不包含 P 的极大子群皆属于 $\mathfrak{F}$，则 P 为 p-群。此外，若 P 的每个素数阶循环子群或 4 阶循环群(若 $p = 2$，且 P 非交换)在 G 中若无超可解补则是 G 的弱 NS^*-置换的，那么 $|P/\Phi(P)| = p$。

证 根据文献[10] (VI，定理 24.2)，$P = G^{\mathfrak{F}}$ 为 p-群，且有以下两个性质：(i) $P/\Phi(P)$ 是 P 的一个 G-主因子；(ii) P 的方次数等于 p 或 4 (若 $p = 2$，且 P 不交换)。假设 P 的每个素数阶循环子群或 4 阶循环群(若 $p = 2$ 且 P 不交换)在 G 中若无超可解补则是 G 的弱 NS^*-置换的。首先记 $\Phi = \Phi(P)$，$L = \langle x \rangle$，令 X/Φ 是 P/Φ 的素数阶子群，其中 $x \in X \setminus \Phi$。于是可知 $|L| = p$ 或 $|L| = 4$。根据假设，要么 L 在 G 中有一个超可解补子群 T，要么 L 是 G 的弱 NS^*-置换子群。不妨先考虑前者，假设 $T \ne G$，那么由 $\Phi \le \Phi(G)$，可知 $T\Phi \ne G$。另一方面，由于 $LT = G$，即 $(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi$，因 $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$。又因为 $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$，从而 $|P/\Phi(P)| = p$。再考虑后者，假设 L 在 G 中是弱 NS^*-置换的，如果 L 在 G 中不是几乎 S-置换的，那么由引理 2.5 (5)，存在 G 的一个正规子群 T，使得 $|G:T| = p$，且 $G = LT$。显然，$L \subsetneq T$。另一方面，由于 G/T 是 p-群，从而由子群 P 的定义，我们有 $L \le P \le T$，这是一个矛盾。因此 L 在 G 中是几乎 S-置换的，再由引理 2.1，$L\Phi/\Phi = X/\Phi$ 在 G/Φ 中是几乎 S-置换的，从而由(i)及引理 2.6，即可得 $|P/\Phi(P)| = p$。

引理 2.8 [5] 设 $\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系，包含所有的超可解群，G 是有限群，且存在 G 的一个正规子群 E，使得 $G/E \in \mathfrak{F}$。若 E 循环，则 $G \in \mathfrak{F}$。

引理 2.9 [10] 设 p 是一个素数，则包含所有 p-闭群的群系是饱和的。

3. 主要定理的证明

证 假设引理不真，并设 (G, E) 为极小阶反例，我们分以下步骤导出矛盾。

步骤 1 若 X 是 E 的霍尔子群，则 (X, X) 满足定理假设。若 X 还是 G 的正规子群，则 $(G/X, E/X)$ 也满足定理假设。

先设 X 是 E 的霍尔子群，P 是 E 的非循环 Sylow 子群。那么根据假设，P 有一个子群 D，满足 $1 < |D| < |P|$，且 P 的每个 $|D|$ 阶子群及 $2|D|$ 阶子群(若 P 是非交换 2-群，且 $|P:D| > 2$)在 G 中要么有超可解补，要么是弱 NS^*-置换的。令 H 是 P 的一个子群，使得 $|H| = |D|$。不妨先考虑前者，首先设 T 是 H 在 G 中的一个超可解补，从而有 $HT = G$，因此 $X = X \cap HT = H(X \cap T)$，继而 $X \cap T$ 是 H 在 X 中的超可解补。再假设 H 在 G 中是弱 NS^*-置换的，那么由引理 2.5 (3)易知，H 在 X 中也是弱 NS^*-置换的。于是由此，(X, X) 满足定理假设。

现在设 X 既是 E 的霍尔子群，也是 G 的正规子群，显然，$(G/X)/(E/X) \cong G/X \in \mathfrak{F}$。我们令 M/X 是 E/X 的非循环 Sylow p-子群，其 p 是 $|E/X|$ 的一个素因子。再设 $PX = M$，其中 P 为 M 的 Sylow p-子群。

于是 P 是 E 的非循环 Sylow 子群。根据定理假设，P 有一个子群 D，满足 $1<|D|<|P|$，且 P 的每个 $|D|$ 阶子群及 $2|D|$ 阶子群(若 P 是非交换 2-群，且 $|P:D|>2$)在 G 中要么有一个超可解补子群 T，要么是弱 NS^*-置换的。不妨令 K/X 是 M/X 的一个子群，使得 $|K/X|=|D|$，从而有 $K=[X]H$，且 H 为 K 的 Sylow p-子群。显然，$|H|=|D|$。因此，由引理 2.5 (4)，$K/X=HX/X$ 在 G/X 中要么有超可解补子群 $TX/X\cong T/T\cap X$，要么是弱 NS^*-置换的，从而 $(G/X,E/X)$ 满足定理假设。

步骤 2 若 X 是 E 的正规霍尔子群，则 $X=E$。

显然 X 是 E 的特征子群，从而 X 是 G 的正规子群。由步骤 1 可知，$(G/X,E/X)$ 满足定理假设。但由于 G 的极小性选取，即有 $G/X\in\mathfrak{F}$，这表明 (G,X) 满足定理假设，再由 (G,E) 的极小性，得 $X=E$。

步骤 3 若 p 是 $|E|$ 的最小素因子，则存在 E 的 Sylow p-子群 P 是非循环的。

假设 P 是循环的，那么根据文献[9] (IV, 2.8)，得到 E 是 p-幂零的，这意味着 $G\in\mathfrak{F}$，矛盾。从而由步骤 2，有 $P=E$。由假设 $G/E\in\mathfrak{F}$，再根据引理 2.8，有 $G\in\mathfrak{F}$，亦矛盾，因此步骤 3 成立。

现在不妨讨论 E 的非循环的 Sylow p-子群 P。根据假设，P 有一个子 D，满足 $1<|D|<|P|$，且 P 的每个 $|D|$ 阶子群及 $2|D|$ 阶子群(若 P 是非交换 2-群，且 $|P:D|>2$)要么在 G 中有超可解补，要么是 G 的弱 NS^*-置换的。

步骤 4 若 $|P:D|>p$，那么 P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是 G 的几乎 S-置换子群；若 P 是一个非交换 2-群，并且 $|P:D|>2$，那么 P 的每个 $2|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是 G 的几乎 S-置换子群。

不妨先假设 P 的 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中无超可解补，亦非 G 的几乎 S-置换子群。那么根据引理 2.5 (5)，存在 G 的一个正规子群 M，使 $|G:M|=p$ 且 $G=HM$，从而有 $G/E\cap M\in\mathfrak{F}$。因此，由引理 2.5，$(G,E\cap M)$ 满足定理假设。另一方面，$|G||E\cap M|<|G||E|$，这与 (G,E) 的极小性矛盾。从而 P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是几乎 S-置换的。

同理可得，若 P 是非交换 2-群，且 $|P:D|>2$，则 P 的每个 $2|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是几乎 S-置换的。

步骤 5 对于 G 的任意含于 P 中的极小正规子群 N，满足 $|N|\le|D|$。

如若不然，那么 $|D|<|N|$。若 N 的 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中有超可解补子群 T，那么显然有 $TN=G$ 且 $T\ne G$。由此 $N\cap T$ 为 N 的真子群，且 $N=N\cap HT=H(N\cap T)$。显然这时候有 $N\cap T\trianglerighteq G$，这与 N 的极小性矛盾。因此，N 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中是弱 NS^*-置换的。从而据引理 2.6 可知存在 N 的极大子群在 G 中是正规的，这是一个矛盾，因此步骤 5 成立。

步骤 6 若 $E=G$ 或者 $E=P$，则 $|D|>p$。

首先，若 $E=G$，则由步骤 2 可知，G 不是 p-幂零的。因此根据文献[9] (V, 5.4)，G 有一个 p-闭的 Schmidt 子群。从而由引理 2.7，我们有 $|D|>p$。再若 $E=P$，考虑 G 的一个不包含 E 的极大子群 M，则 $G/E\cong M/M\cap E\in\mathcal{F}$。假设 $|D|=p$，且令 $L=G^{\mathfrak{F}}$，则 $L\le E$，又由引理 2.7，$|L/\Phi(L)|=p$。根据引理 2.8，$G/\Phi(L)\in\mathfrak{F}$，这使得 $L\le\Phi(L)$，故 $L=\Phi(L)$，矛盾，因此 $|D|>p$。

步骤 7 若 $E=G$ 或者 $E=P$，N 是包含在 E 中的 G 的极小交换正规子群，则 $(G/N,E/N)$ 也满足定理假设且 $G/N\in\mathfrak{F}$。

当 $|N|<|D|$ 或者 $|P:D|=p$ 时，这是显然的。因此我们令 $|N|=|D|$ 且 $|P:D|>p$。

由步骤 4 我们知道，P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是几乎 S-置换的；若 P 是非交换 2-群，且 $|P:D|>2$，则 P 的每个 $2|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是几乎 S-置换的。

由步骤 6 可知，N 非循环，因此 G 的每个包含 N 的子群也是非循环的。设 $N\le K\le P$ 且 $|K:N|=p$，于是 K 非循环，从而存在 K 的一个极大子群 M 使得 $M\ne N$。若 M 在 G 中有超可解补，那么 K 在 G 中

也有超可解补。反之，若 M 在 G 中没有超可解补，那么 M 在 G 中是几乎 S-置换的，显然 $K=MN$ 在 G 中也是几乎 S-置换的。因此，若 P/N 交换，则由引理 2.5 (2)和(4)，G/N 满足定理假设。

现在假设 P/N 是非交换 2-子群，从而 P 是非交换 2-子群，因此 P 的每个 $2|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是几乎 S-置换的。设 $N\le L\le P$ 且 $|L:N|=4$，则如上同理，$(G/N,E/N)$ 满足定理假设。

由上，步骤 7 成立。

步骤 8 若 $E=G$，则至少存在 P 的一个极大子群在 G 中没有超可解补。

这由步骤 2 和引理 2.2 可直接得到。

步骤 9 E 是可解的。

根据步骤 1 以及 G 的极小性选取，我们只需考虑 $E=G$。再根据步骤 7，要证 E 是可解的，只需证 $P_G\ne 1$。

首先假设 $|P:D|=p$，则由步骤 8，至少存在 P 的一个极大子群 M 在 G 中没有超可解补。若 $M_{nG}=1$，则由定理假设，M 在 G 中有一个次正规补子群 T。显然，据引理 2.5 (3)，(T,T) 满足定理假设(事实上，T 的 Sylow p-子群都是素数阶循环群)，因此 T 是超可解的，这与 M 的选取相矛盾。所以 $M_{nG}\ne 1$，由引理 2.1 (4)，有 $M_{nG}\le O_p(G)$，故 $P_G\ne 1$。

最后假设 $|P:D|>p$，则由步骤 4，P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是几乎 S-置换的。因此根据引理 2.1 (4)，我们不妨假设 P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中都有超可解补，这使得 P 的每个极大子群 在 G 中都有超可解补，与步骤 8 矛盾，从而步骤 9 成立。

步骤 10 设 q 为 $|E|$ 的最大的素因子，那么 E 是 q-闭的。

根据步骤 1，只需要讨论 $E=G$。由步骤 9，E 是可解的，以及步骤 1 中对于 G 的任意霍尔子群 X，(X,X) 满足定理假设。因此，不妨假设 $|G|=p^aq^b$，其中 a，b 为任意的自然数。

假设 G 不是 q-闭的，那么由步骤 7 及 G 的极小性选取，使得 G 的每个含于 P 中的极小正规子群 N，都有 G/N 是超可解的。因此，根据引理 2.9，$N\subsetneq\Phi(G)$，并且 N 是含于 P 中的 G 的唯一的极小正规子群。我们接下来要说明 $N=O_p(G)$。

事实上，令 M 为 G 中一个极大子群，使得 $G=[N]M$，从而有 $O_p(G)=O_p(G)\cap NM=N(O_p(G)\cap M)$。由于 $O_p(G)\le F(G)\le C_G(N)$，这使得 $O_p(G)\cap M$ 是 G 的一个正规子群，从而推得 $O_p(G)\cap M=1$，即有 $N=O_p(G)$。

现在继续考虑 $|P:D|$。

若 $|P:D|=p$，则对于 P 的每个包含 N 的极大子群 A，满足 $AM=G$，从而 $M\cong G/N$ 是 A 在 G 中的一个超可解补。根据步骤 8 可知，存在 P 的一个极大子群 B 在 G 中既无超可解补也不包含 N，于是由假设，B 是 G 的一个弱 NS^*-置换子群。令 $L=B_{nG}$，并且设 T 是 G 的一个次正规子群，使得 $BT=G$ 且 $B\cap T\le L$。若 $L=1$，那么 $|T|=pq^b$，由引理 2.5，显然 (T,T) 满足定理假设，从而 T 是超可解的，这与 B 的选取相矛盾。故我们有 $L\ne 1$，且根据引理 2.1 (4)，$L\le O_p(G)$，继而 $L\le N\cap B$。

若 $N\le T$，那么 $T\cap B\le N\cap B\le T\cap B$，即 $T\cap B=N\cap B$。又因为 $T\cap B\le L\le N\cap B$，从而 $T\cap B=L=N\cap B$，显然 $N\cap B$ 在 G 中正规。另一方面，由于 $L=N\cap B$ 是个 p-群且在 G 中正是几乎 S-置换的，因此对于某个自然数 m，我们有 $|G:N_G(L)|=p^m$，故 $G=PN_G(L)$。从而我们有 $L^G=L^{PN_G(L)}=L^P=L$，这说明 L 在 G 中正规，这使得 $N\le L\le B$，相矛盾，所以我们有 $N\subsetneq T$。由于 T 是 G 的一个次正规子群，据引理 2.3 (3)，T 包含 G 的所有 Sylow q-子群，这使得 G/T_G 是个 p-群，从而 $G\cong G/N\cap T_G$，是 q-闭，与假设矛盾。

若 $|P:D|>p$，那么由步骤 4，P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中若无超可解补则是几乎 S-置换的。再据引理 2.1 (4)，P 的每个 $|D|$ 阶几乎 S-置换子群 H 都含于 $N=O_p(G)$ 中。于是由假设，对于 P 的所有不含于 N 中的 $|D|$ 阶子群 H 在 G 中都有超可解补，从而 P 的每个极大子群在 G 中也有超可解补，这与步骤 8

相矛盾。

由此，步骤 10 成立。

步骤 11 $E=P$。

事实上，不妨令 q 为 $|E|$ 的最大素因子，并且设 Q 为 E 的一个 Sylow q-子群。那么由步骤 10，Q 在 E 中正规，从而再由步骤 2，有 $Q=E=P$。

步骤 12 最后的矛盾。

设 N 是 G 的一个极小正规子群且 N 包含于 P 中，则由步骤 7，N 是含于 P 中的 G 的唯一极小正规子群，再根据步骤 11，有 $N=\mathrm{O}_p(G)=P$。显然，这与引理 2.6 相悖，最后的矛盾。

参考文献

[1] Doerk, K. and Hawkes, T. (1992) Finite Soluble Gro. Walter de Gruyter, New York. https://doi.org/10.1515/9783110870138

[2] Gorenstein, D. (1968) Finite Groups. Harper and Row, New York.

[3] 徐明曜. 有限群初步[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[4] Kegel, O. (1962) Sylow-Gruppen and Subnormalteiler Endlicher. *Mathematische Zeitschrift*, **78**, 205-221. https://doi.org/10.1007/BF01195169

[5] Skiba, A.N. (2007) On Weakly s-Permutable Subgroups of Finite Groups. *Journal of Algebra*, **315**, 192-209. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.04.025

[6] 苏宁, 李祥明, 王燕鸣. 关于有限群的弱 *S*-可补性[J]. 数学年刊, 2015, 36A(1): 91-102.

[7] Al-Sharo, K.A. (2012) On Nearly s-Permutable Subgroups of Finite Groups. *Communications in Algebra*, **40**, 315-326. https://doi.org/10.1080/00927872.2010.530329

[8] Wielandt, H. (1971) Subnormal Subgroups and Permutation Groups. Lectures Given at the Ohio State University, Columbus.

[9] Huppert, B. (1967) Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-64981-3

[10] Shemetkov, L.A. (1978) Formations of Finite Groups. Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, Moscow.