Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 1036-1042
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99129

Constructions of a New Infinite Class of Optimal Cyclic Packing and Their Related OOCs

Bichang Huang

College of Mathematics and statistics, Baise University, Baise Guangxi
Email: h_bichang@126.com

Received: Oct. 20th, 2019; accepted: Nov. 11th, 2019; published: Nov. 18th, 2019

Abstract

Cyclic packing is one of efficient approaches for constructing optical orthogonal code (OOC). In this paper, a new infinite class of optimal variable-weight with length 27p and weights $W=\{3,7\}$ are obtained via constructing cyclic packing with blocks 3 and 7, for any prime $p\equiv 3(\bmod 4)$ and $p\geq 7$.

Keywords

Constant-Weight Optical Orthogonal Codes, Variable-Weight Optical Orthogonal Codes, Cyclic Packing, Quadratic Residues

构造一系列新的最优循环填充及其相应的光正交码

黄必昌

百色学院数学与统计学院，广西 百色
Email: h_bichang@126.com

收稿日期：2019年10月20日；录用日期：2019年11月11日；发布日期：2019年11月18日

摘 要

循环填充是构造光正交码的有效方法之一。对于任何素数 $p\equiv 3(\bmod 4)$ 且 $p\geq 7$，本文通过构造一系列新

文章引用: 黄必昌. 构造一系列新的最优循环填充及其相应的光正交码[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1036-1042.
DOI: 10.12677/pm.2019.99129

的区组大小为3和7的循环填充从而得到相应的新的码长为27p码重是$W=\{3,7\}$的最优变重量光正交码。

关键词

常重量光正交码，变重量光正交码，循环填充，二次剩余

1. 引言

光正交码一般分为码重单一的常重量光正交码[1]和多种码重的变重量光正交码[2]。由于其在移动无线电通信、跳频扩频通信、雷达等光码分多址网络中有着广泛的应用[3]，因而对光正交码的构造近年来备受关注。1998 年，Yin 为了构造最优常重量光正交码引入了区组大小单一的循环填充，并证明循环填充存在性等价于常重量光正交码的存在性[4]。后来，为了能够构造最优变重量光正交码，2010 年，Wu 等人给出区组大小多样的循环填充相关定义并证明其存在性等价于变重量光正交码的存在性[5]。

目前，利用循环填充构造常重量光正交码已取得较多的结果[6]-[12]。同样地，利用循环填充构造双重量光正交码取得的结果主要是码重$W\in\{\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\}\}$时的情况[5] [13]-[18]。对于含有码重大于 7 的双重量光正交码一系列直接具体的构造结果甚少。

根据文献[2]知，码重大的光正交码抗其他干扰的性能较好。因此，本文直接具体构造出一系列新的区组大小为 3 和 7 的最优循环填充及其相应的光正交码。即

定理：对于任何素数$p\equiv 3 \pmod 4$且$p\ge 7$，存在最优的循环填充$2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$和最优的变重量光正交码$\left(27p,\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}\right)-\text{OOC}$。

注：根据文献[5]知，若$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_r\}$，$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_r\}$是一个r-元组的正有理数且$\sum_{i=1}^{r}q_i=1$，则符号$(n,W,1,Q)-\text{OOC}$表示相关系数为 1 码字长度为n码重为$w_i\in W$码字的个数占总码字个数的比例为$q_i\in Q$（其中$i=1,2,\cdots,r$）的变重量光正交码。循环填充的符号$2-CP(W,1,Q;n)$参见下文。

2. 预备知识

设G是一个交换群，$\mathcal{B}=\{B:B\subseteq G\}$。记符号$\Delta B=\{x-y:x,y\in B,x\ne y\},B\subseteq G$。更进一步，记符号$\Delta\mathcal{B}=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\Delta B$。其中$\Delta B$和$\Delta\mathcal{B}$都是多重集合。

设$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_r\}$是r个大于 1 的有序整数组，Z_n表示模n的剩余类环，$\mathcal{B}=\{B_j:B_j\subseteq Z_n,1\le j\le t\}$。称一个设计$(Z_n,\mathcal{B})$为循环填充$2-CP(W,1;n)$若以下条件满足：

1) $|B_j|\in W,1\le j\le t$；2) $\Delta\mathcal{B}$覆盖$Z_n\setminus\{0\}$中的每个元素至多一次。

称$B_j\in\mathcal{B},1\le j\le t$为循环填充的区组。若$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_r\}$是一个$r$-元组的正有理数且$\sum_{i=1}^{r}q_i=1$。则用$2-CP(W,1,Q;n)$表示区组大小等于$w_i$的区组个数为$q_i|\mathcal{B}|$的$2-CP(W,1;n)$，其中$q_i\in Q,1\le i\le r$。

特别的，Z_{gv} 中的一个 $2-CP(W,1;gv)$，若 $\Delta\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{t}\Delta B_j$ 覆盖 $Z_{gv}\setminus vZ_{gv}$ 每个元素恰好一次，而不覆盖 vZ_{gv} 的任何一个元素，则称为 g -规则的。

关于最优循环填充和最优变重量光正交码之间的等价关系可用以下两个引理描述[13]。

引理 1.1　一个最优 $2-CP(W,1,Q;n)$ 等价于一个最优 $(n,W,1,Q)-\mathrm{OOC}$。

引理 1.2　设 $w=\sum_{i=1}^{r}a_iw_i(w_i-1)$，其中 $w_i\in W$。若 $1\le g\le w$，则 g-规则的 $2-CP(W,1,Q;gv)$ 是最优的。

设 f 是正整数，$p=2f+1$ 是奇素数，元素 θ 是 $Z_p^*=Z_p\setminus\{0\}$ 的一个生成元。则称 $C_0^2=\left\{\theta^{2i}:0\le i\le\frac{p-1}{2}\right\}$ 为二次剩余，称 $C_1^2=\theta C_0^2$ 为二次非剩余。

设 $A=\{(a_1,j_1),(a_2,j_2),\cdots,(a_k,j_k)\}$ 是 $Z_p\times Z_m$ 的一个 k 元子集。再设 K 是一些正整数的集合，且每个元素都大于 1。

若 $\mathcal{F}=\{A:A=\{(a_1,j_1),(a_2,j_2),\cdots,(a_k,j_k)\}\subset Z_p\times Z_m,k\in K\}$。定义

1) $x\cdot A=\{(xa_1,j_1),(xa_2,j_2),\cdots,(xa_k,j_k)\},x\in Z_p$；

2) $B\cdot A=\{b\bullet A\mid b\in B\},B\subseteq Z_p$。

记符号 $L_i=\{a_l-a_s:\{(a_l,j_l),(a_s,j_s)\}\subset A\in\mathcal{F},i\equiv j_l-j_s\pmod m,1\le l,s\le k,k\in K\}$，$i=0,\cdots,m-1$。

由文献[16]的构造(Construction I)知，当 $p\equiv 3\pmod 4$，$p\nmid m$ 时，若 $\left|L_i\cap C_k^2\right|=1$，$0\le i\le m-1$，$k=0,1$ 且 $\mathcal{A}=\{C_0^2\bullet A:A\in\mathcal{F}\}$。则 $\mathcal{A}$ 形成一个 m-规则的 $2-CP(W,1,Q;mp)$。

为了方便，现将素数与二次剩余(二次非剩余)之间关系用以下引理[19]表示。

引理 1.3　若 $p\equiv 3\pmod 4$ 是素数。则

1) $2\in C_0^2,3\in C_0^2,5\in C_0^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 71,191,239,359,431,599\pmod{840}$；

2) $2\in C_0^2,3\in C_0^2,5\in C_0^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 311,479,551,671,719,839\pmod{840}$；

3) $2\in C_1^2,3\in C_1^2,5\in C_1^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 43,67,163,403,547,667\pmod{840}$；

4) $2\in C_1^2,3\in C_1^2,5\in C_1^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 187,283,307,523,643,787\pmod{840}$；

5) $2\in C_0^2,3\in C_0^2,5\in C_1^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 23,263,407,527,743,767\pmod{840}$；

6) $2\in C_0^2,3\in C_0^2,5\in C_1^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 47,143,167,383,503,647\pmod{840}$；

7) $2\in C_1^2,3\in C_1^2,5\in C_0^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 211,331,379,499,571,739\pmod{840}$；

8) $2\in C_1^2,3\in C_1^2,5\in C_0^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 19,139,451,619,691,811\pmod{840}$；

9) $2\in C_0^2,3\in C_1^2,5\in C_0^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 79,151,319,631,751,799\pmod{840}$；

10) $2\in C_0^2,3\in C_1^2,5\in C_0^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 31,199,271,391,439,559\pmod{840}$；

11) $2\in C_1^2,3\in C_0^2,5\in C_1^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 107,323,347,443,683,827\pmod{840}$；

12) $2\in C_1^2,3\in C_0^2,5\in C_1^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 83,227,467,563,587,803\pmod{840}$；

13) $2\in C_1^2,3\in C_0^2,5\in C_0^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 11,179,491,611,659,779\pmod{840}$；

14) $2\in C_1^2,3\in C_0^2,5\in C_0^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 59,131,251,299,419,731\pmod{840}$；

15) $2\in C_0^2,3\in C_1^2,5\in C_1^2,7\in C_0^2\Leftrightarrow p\equiv 127,247,463,487,583,823\pmod{840}$；

16) $2\in C_0^2,3\in C_1^2,5\in C_1^2,7\in C_1^2\Leftrightarrow p\equiv 103,223,367,607,703,727\pmod{840}$。

3. 定理的证明

对于每一个素数 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$，且 $p>7$，由于 $\gcd(27,p)=1$，因此根据中国剩余定理知 Z_{27p} 同构于 $Z_p\times Z_{27}$。下面我们对 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ 分 13 种情形以引理的形式进行讨论。

引理 2.1 若 $p\equiv 71,191,239,359,431,599,311,479,551,671,719,839(\mathrm{mod}\,840)$ 是素数，$\xi=\min\{x\mid x\in C_1\}$，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{1,j}:j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{1,1}=\{(0,0),(5,0),(1,1),(\xi,3),(3,5),(2,11),(4,18)\},$$

$$A_{1,2}=\{(0,0),(-5,4),(-1,12)\},\quad A_{1,3}=\{(0,0),(1,6),(-1,13)\}.$$

证明：根据 $A_{1,1},A_{1,2},A_{1,3}$ 计算 $L_i,0\le i\le 26$。

易见 $L_s=-L_{27-s},14\le s\le 26$。因此，只需计算 $L_i,0\le i\le 13$。

$L_0=\{5,-5\}$，$L_1=L_9=\{1,-4\}$，$L_2=\{\xi-1,3-\xi\}$，$L_3=\{\xi,\xi-5\}$，$L_4=\{2,-5\}$，$L_5=-L_{11}=\{3,-2\}$，$L_6=L_{13}=\{1,-1\}$，$L_7=\{2,-2\}$，$L_8=\{4,2-\xi\}$，$L_{10}=\{3,-1\}$，$L_{12}=\{\xi-4,-1\}$。

由引理 1.3 的(1)和(2)知，$2\in C_0^2,3\in C_0^2,5\in C_0^2$，且 $\xi-l\in C_0,1\le l<\xi$。不难验证 $\left|L_i\cap C_k^2\right|=1$，$0\le i\le 26$，$k=0,1$。由前述知，$\mathcal{A}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$。

利用引理 1.3 相应的条件，同理可证引理 2.2~2.13 成立。

引理 2.2 若 $p\equiv 43,67,163,403,547,667,187,283,307,523,643,787(\mathrm{mod}\,840)$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{2,j}:j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{2,1}=\{(1,0),(2,0),(3,1),(-3,3),(6,5),(0,11),(-2,18)\},$$

$$A_{2,2}=\{(0,0),(4,4),(1,12)\},\quad A_{2,3}=\{(0,0),(1,6),(3,13)\}.$$

引理 2.3 若 $p\equiv 23,263,407,527,743,767,47,143,167,383,503,647(\mathrm{mod}\,840)$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{3,j}:j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{3,1}=\{(9,0),(5,0),(6,1),(4,3),(8,5),(7,11),(10,18)\},$$

$$A_{3,2}=\{(0,0),(-1,4),(4,12)\},\quad A_{3,3}=\{(0,0),(-5,6),(5,13)\}.$$

引理 2.4 若 $p\equiv 19,139,451,619,691,811(\mathrm{mod}\,840)$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{4,j}:j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{4,1}=\{(0,0),(2,0),(1,1),(4,3),(5,5),(3,11),(-3,18)\},$$

$$A_{4,2}=\{(0,0),(2,4),(6,12)\},\quad A_{4,3}=\{(0,0),(2,6),(3,13)\}.$$

引理 2.5 若 $p\equiv 211,331,379,499,571,739(\mathrm{mod}\,840)$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{5,j}:j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{5,1}=\{(0,0),(2,0),(1,1),(4,3),(5,5),(3,11),(-3,18)\},$$

$$A_{5,2}=\{(0,0),(2,4),(3,12)\},\quad A_{5,3}=\{(0,0),(2,6),(3,13)\}.$$

引理 2.6 若 $p\equiv 31,199,271,391,439,559 \pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{6,j}: j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{6,1}=\{(2,0),(0,0),(-3,1),(6,3),(5,5),(3,11),(-4,18)\},$$

$$A_{6,2}=\{(0,0),(3,4),(-1,12)\},\quad A_{6,3}=\{(0,0),(2,6),(5,13)\}.$$

引理 2.7 若 $p\equiv 79,151,319,631,751,799 \pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{7,j}: j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{7,1}=\{(2,0),(0,0),(-3,1),(6,3),(5,5),(3,11),(-4,18)\},$$

$$A_{7,2}=\{(0,0),(3,4),(-1,12)\},\quad A_{7,3}=\{(0,0),(5,6),(7,13)\}.$$

引理 2.8 若 $p\equiv 83,227,467,563,587,803 \pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{8,j}: j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{8,1}=\{(9,0),(5,0),(7,1),(0,3),(8,5),(6,11),(4,18)\},$$

$$A_{8,2}=\{(0,0),(2,4),(3,12)\},\quad A_{8,3}=\{(0,0),(2,6),(1,13)\}.$$

引理 2.9 若 $p\equiv 107,323,347,443,683,827 \pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{9,j}: j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{9,1}=\{(9,0),(5,0),(7,1),(0,3),(8,5),(6,11),(4,18)\},$$

$$A_{9,2}=\{(0,0),(2,4),(3,12)\},\quad A_{9,3}=\{(0,0),(2,6),(1,13)\}.$$

引理 2.10 若 $p\equiv 59,131,251,299,419,731 \pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{10,j}: j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{10,1}=\{(4,0),(9,0),(5,1),(1,3),(10,5),(3,11),(8,18)\},$$

$$A_{10,2}=\{(0,0),(-1,4),(2,12)\},\quad A_{10,3}=\{(0,0),(2,6),(-1,13)\}.$$

引理 2.11 若 $p\equiv 11,179,491,611,659,779 \pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\{C_0^2\cdot A_{11,j}: j=1,2,3\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{11,1}=\{(4,0),(9,0),(5,1),(1,3),(10,5),(3,11),(8,18)\},$$

$$A_{11,2}=\{(0,0),(-1,4),(2,12)\},\quad A_{11,3}=\{(0,0),(2,6),(-1,13)\}.$$

引理 2.12 若 $p\equiv 103,223,367,607,703,727\pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\left\{C_0^2\cdot A_{12,j}:j=1,2,3\right\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{12,1}=\{(5,0),(2,0),(7,1),(0,3),(3,5),(4,11),(9,18)\},$$

$$A_{12,2}=\{(0,0),(4,4),(2,12)\},\quad A_{12,3}=\{(0,0),(-1,6),(-7,13)\}.$$

引理 2.13 若 $p\equiv 127,247,463,487,583,823\pmod{840}$ 是素数，则 $\mathcal{A}=\left\{C_0^2\cdot A_{13,j}:j=1,2,3\right\}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$，其中

$$A_{13,1}=\{(7,0),(4,0),(2,1),(9,3),(5,5),(6,11),(-1,18)\},$$

$$A_{13,2}=\{(0,0),(4,4),(1,12)\},\ A_{13,3}=\{(0,0),(2,6),(-1,13)\}.$$

定理的证明： 对于每个素数 $p\equiv 3\pmod 4$ 且 $p>7$，由引理 2.1~2.13 可得到一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$。对于 $p=7$，设

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\{&\{0,1,3,7,12,20,44\},\{0,14,35,50,66,88,114\},\{0,10,28,55,95,118,160\},\\&\{0,25,58\},\{0,30,76\},\{0,34,83\},\{0,47,98\},\{0,54,116\},\{0,56,117\}\}\end{aligned}$$

则 $\mathcal{A}$ 形成一个 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$。

因此，由引理 1.1 和 1.2 知，对于任意的素数 $p\equiv 3\pmod 4$ 且 $p\geq 7$，可得到一个最优的 $2-CP\left(\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\};27p\right)$ 和最优的变重量光正交码 $\left(27p,\{3,7\},1,\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}\right)-\mathrm{OOC}$。

基金项目

广西自然科学基金项目(2018GXNSFAA281259)。

参考文献

[1] Salehi, J.A. (1989) Code Division Multiple-Access Techniques in Optical Fiber Networks Part I: Fundamental Principles. *IEEE Transactions on Communications*, **37**, 824-833. https://doi.org/10.1109/26.31181

[2] Yang, G.C. (1996) Variable-Weight Optical Orthogonal Codes for CDMA Network with Multiple Performance Requirements. *IEEE Transactions on Communications*, **44**, 47-55. https://doi.org/10.1109/26.476096

[3] Yang, G.C. and Kwong, W.C. (2002) Prime Codes with Applications to CDMA Optical and Wireless Networks. Artech House, Norwood.

[4] Yin, J. (1998) Some Combinatorial Constructions for Optical Orthogonal Codes. *Discrete Mathematics*, **185**, 201-219. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00172-6

[5] Wu, D.H., Zhao, H.M., Fan, P.Z., *et al.* (2010) Optimal Variable-Weight Optical Orthogonal Codes via Difference Packings. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**, 4053-4060. https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2050927

[6] Chang, Y., Fuji-Hara, R. and Miao, Y. (2003) Combinatorial Constructions of Optimal Optical Orthogonal Codes with Weight 4. *IEEE Transactions on Information Theory*, **49**, 1283-1292. https://doi.org/10.1109/TIT.2003.810628

[7] Chang, Y. and Miao, Y. (2003) Constructions for Optimal Optical Orthogonal Codes. *Discrete Mathematics*, **261**, 127-139. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00464-8

[8] Fuji-Hara, R., Miao, Y. and Yin, J. (2001) Optimal $(9v,4,1)$ Optical Orthogonal Codes. *SIAM Journal on Discrete

Mathematics, **14**, 256-266. https://doi.org/10.1137/S0895480100377234

[9] Ge, G. and Yin, J. (2001) Constructions for Optimal $(v,4,1)$ Optical Orthogonal Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **47**, 2998-3004. https://doi.org/10.1109/18.959278

[10] Ma, S. and Chang, Y. (2005) Constructions of Optimal Optical Orthogonal Codes with Weight Five. *Journal of Combinatorial Designs*, **13**, 54-69. https://doi.org/10.1002/jcd.20022

[11] Chang, Y. and Ji, L. (2004) Optimal $(4up,5,1)$ Optical Orthogonal Codes. *Journal of Combinatorial Designs*, **12**, 346-361. https://doi.org/10.1002/jcd.20011

[12] Chen, K., Wei, R. and Zhu, L. (2012) Existence of $(q,7,1)$ Difference Families with q a Prime Power. *Journal of Combinatorial Designs*, **10**, 126-138. https://doi.org/10.1002/jcd.998

[13] Jiang, J., Wu, D.H. and Fan, P.Z. (2011) Senior Member, IEEE, General Constructions of Optimal Variable-Weight Optical Orthogonal Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **57**, 4488-4496. https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2146110

[14] Wu, D., Chen, Z. and Cheng, M. (2008) A Note on the Existence of Balanced $(q,\{3,4\},1)$ Difference Families. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **41**, 171-174.

[15] Zhao, H.M., Wu, D.H. and Fan, P.Z. (2010) Constructions of Optimal Variable-Weight Optical Orthogonal Codes. *Journal of Combinatorial Designs*, **18**, 274-291. https://doi.org/10.1002/jcd.20246

[16] Buratti, M., Wei, Y.E., Wu, D.H., Fan, P.Z. and Cheng, M.Q. (2011) Relative Difference Families with Variable Block Sizes and Their Related OOCs. *IEEE Transactions on Information Theory*, **47**, 7489-7497. https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2162225

[17] Liu, Y. and Wu, D.H. (2013) Constructions of Optimal Variable-Weight OOCs via Quadratic Residues. *Frontiers of Mathematics in China*, **8**, 869-890. https://doi.org/10.1007/s11464-012-0220-7

[18] Zhong, X.R., Wu, D.H. and Fan, P.Z. (2012) New Infinite Classes of Optimal Optical Orthogonal Codes via Quadratic Residues. *IEICE Transactions*, **95**, 1827-1834. https://doi.org/10.1587/transfun.E95.A.1827

[19] Nathanson, M.B. (2000) Elementary Methods in Number Theory. Springer-Verlag, New York.