Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 1082-1093
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99133

Hans汉斯

An Erdös-Kac Type Theorem in Short Intervals Weighted by $d_k(n)$

Xiaofei Tong

College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 2018020208@qdu.edu.cn

Received: Nov. 1st, 2019; accepted: Nov. 18th, 2019; published: Nov. 25th, 2019

Abstract

Let $d_k(n)$ be the *k*-fold divisor function. In this paper, we prove a weighted Erdös-Kac type theorem with weight $d_k(n)$ in short intervals. This generalizes a recent result of K. Liu and J. Wu.

Keywords

Central Limit Theorem, Short Intervals, Arithmetic Function, Dirichlet Series

短区间上权为$d_k(n)$的Erdös-Kac型定理

仝晓菲

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 2018020208@qdu.edu.cn

收稿日期：2019年11月1日；录用日期：2019年11月18日；发布日期：2019年11月25日

摘 要

设$d_k(n)$为k重除数函数。本文证明了一个短区间上权为$d_k(n)$的Erdös-Kac型定理，并证明了其中的余项估计是最优的。这推广了K. Liu和J. Wu最近的一个结果。

关键词

中心极限定理，短区间，算术函数，Dirichlet级数

文章引用：仝晓菲. 短区间上权为$d_k(n)$的Erdös-Kac型定理[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1082-1093.
DOI: 10.12677/pm.2019.99133

1. 介绍

对于固定的整数 $k \ge 2$，k 重除数函数 $d_k(n)$ 是指 $n = n_1 n_2 \cdots n_k$ 的解的个数，其中 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 为正整数。如果 n 的标准分解形式 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$，$\alpha_i \ge 1$ （$i = 1,2,\cdots,s$），p_i（$i = 1,2,\cdots,s$）是不同的素数，则有(可参见[1])

$$d_k(n) = \frac{(\alpha_1 + k - 1)!}{\alpha_1!(k-1)!} \cdots \frac{(\alpha_s + k - 1)!}{\alpha_s!(k-1)!}. \tag{1}$$

当 $k = 2$ 时，$d_k(n)$ 即为经典除数函数 $d(n)$。

当 $x \ge 2$ 时，定义 $d_k(n)$ 的和函数

$$D_k(x) := \sum_{n \le x} d_k(n).$$

Landau [2]和 Voronoi [3]证明了

$$D_k(x) = xP_{k-1}(x) + \Delta_k(x)$$

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon},$$

其中 P_{k-1} 是 $k-1$ 次的多项式。对于 $k \ge 4$，Hardy 和 Littlewood 改进了以上余项的上界估计，证明了

$$\Delta_k(x) \ll x^{\frac{k-1}{k-2}+\varepsilon}.$$

相关文献还可参见[4]，[5]，[6]和[7]。

同时，人们还研究函数 $d_k(n)$ 在短区间上的均值问题。例如，Garaev，Luca 和 Nowak [8]证明了当 $x^{1/2}\log x < y < x^{1/2}(\log x)^{5/2}$ 时，有

$$\sum_{x<n\le x+y} d_4(n) = \frac{1}{6} y \log^3 x \left|1 + O\left(\frac{x^{1/3}(\log x)^{2/3}}{y^{2/3}}\right)\right|.$$

当 $k \ne 4$ 时，目前短区间上相应问题的最佳结果可由 $D_k(x)$ 的渐进公式(“长区间”)推得。

本文中，我们考虑了 $d_k(n)$ 在短区间上另一种形式的均值问题。令 $\omega(n)$ 表示正整数 n 的不同素因子个数，定义

$$\pi_{l,k}(x,y) := \sum_{\substack{x<n\le x+y \\ \omega(n)=l}} d_k(n).$$

我们证明了下面的结果。

定理 1.1 对于固定的 $k \ge 2$，$B > 0$ 及任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\pi_{l,k}(x,y) = \frac{y}{\log x}\frac{(k\log\log x)^{l-1}}{(l-1)!}\left\{\lambda\left(\frac{l-1}{k\log\log x}\right) + O_{B,\varepsilon}\left(\frac{\log\log x}{l\log x} + \frac{l-1}{(\log\log x)^2}\right)\right\},$$

对 $x \ge 2$，$x^{7/12+\varepsilon} \le y \le x$，$1 \le l \le Bk\log\log x$ 一致成立，这里

$$\lambda(z)=\frac{k}{\Gamma(kz+1)}\prod_p\left(1+\sum_{v\ge1}\frac{(v+k-1)!}{v!(k-1)!p^v}z\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{kz},$$

并且 O-符号中的隐含常数只依赖于 B 和 ε。

1939 年，Erdös 和 Kac [9]证明了 $\omega(n)$ 的概率分布，对于每一个 $\lambda\in R$，他们证明了如下的中心极限定理：

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)-\log\log x\le\lambda\sqrt{\log\log x}}}1\to\Phi(\lambda),\ x\to\infty$$

其中

$$\Phi(\lambda):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\mathrm{d}\tau.$$

2015 年，Elliott [10] [11]证明了如下权为 $d(n)^\alpha$（$\alpha\in R$）的中心极限定理，即对每一个 $\lambda\in R$，有

$$\frac{1}{D_\alpha(x)}\sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)-2^\alpha\log\log x\le\lambda\sqrt{2^\alpha\log\log x}}}d(n)^\alpha\to\Phi(\lambda),\ x\to\infty$$

其中

$$D_\alpha(x):=\sum_{n\le x}d(n)^\alpha$$

最近，K. Liu 和 J. Wu [12]把此结果推广到了短区间。

本文中，我们推广了 Elliott 以及 Liu 和 Wu 的结果，证明了权为 $d_k(n)$ 的中心极限定理。

定理 1.2 对于每个实数 λ 和任意的 $\varepsilon>0$，当 $x\to\infty$，$x^{7/12+\varepsilon}<y\le x$ 时，有

$$\frac{1}{D(x,y)}\sum_{\substack{x<n\le x+y\\ \omega(n)-k\log\log x\le\lambda\sqrt{k\log\log x}}}d_k(n)=\Phi(\lambda)+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log x}}\right),$$

其中

$$D(x,y):=\sum_{x<n\le y}d_k(n),$$

O-符号中的隐含常数只依赖于 ε，并且误差项的上界估计是最优的。

记号：

N 为全体自然数集，R 为全体实数集，C 为全体复数集；$\Gamma(z)$ 伽马函数；Landau 符号，$f(x)=O(g(x))$，$f(x)\ll g(x)$ 是指存在常数 $c>0$，使得 $|f(x)|\le cg(x)$；$\prod_p$ 表示 p 遍历所有素数并求乘积；$f(x)\sim g(x)$ 是指 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$。

2. 预备知识

为了完成引理 2.2 的证明，我们需要下面的定义(参见[12])。令 $f(n)$ 表示算术函数，$F(s)$ 是 $f(n)$ 的 Dirichlet 级数，

$$F(s):=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s}.$$

设 $z\in C$，$\omega\in C$，$\alpha>0$，$\delta\ge 0$，$A\ge 0$，$B>0$，$C>0$，$M>0$ 为常数，$s=\sigma+i\tau$。如果 $F(s)$ 满足下列条件，则称其是 $P(z,\omega,\alpha,\delta,A,B,C,M)$ 型的：

(a) 对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$|f(n)|\ll_{\varepsilon} Mn^{\varepsilon}\quad(n\ge 1)$$

$\ll$-中的隐含常数只与 ε 有关。

(b) 当 $\sigma>1$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|n^{-\sigma}\le M(\sigma-1)^{-\alpha}.$$

(c) Dirichlet 级数

$$G(s;z,\omega):=F(s)\zeta(s)^{-z}\zeta(2s)^{-\omega}$$

可以解析延拓成 $\sigma\ge\frac{1}{2}$ 上的全纯函数，并且 $G(s;z,\omega)$ 满足

$$|G(s;z,\omega)|\le M(|\tau|+1)^{\max\{\delta(1-\sigma),0\}}\log^{A}(|\tau|+1).$$

此结果对 $\sigma\ge\frac{1}{2}$，$|z|\le B$ 及 $|\omega|\le C$ 一致成立。

我们需要如下引理来证明引理 2.2，此引理为[1]的推论 1.2。

引理 2.1 假设对任意的 $\varepsilon>0$，Dirichlet 级数 $F(s)$ 是 $P(z,\omega,\alpha,\delta,A,B,C,M)$ 型的，则有

$$\sum_{x<n\le x+y}f(n)=y(\log x)^{z-1}\left\{\lambda(z,\omega)+O\left(\frac{M}{\log x}\right)\right\},$$

此结果对 $x\ge 2$，$x^{(7+5\delta)/(12+5\delta)+\varepsilon}\le y\le x$，$|z|\le B$，及 $|\omega|\le C$ 一致成立，其中

$$\lambda(z,\omega):=\frac{G(1,z)\zeta(2)^{\omega}}{\Gamma(z)}.$$

O-符号中的隐含常数只依赖于 A，B，α，δ 及 ε。

令引理 2.1 中的 $f(n)=d_k(n)z^{\omega(n)}$，我们得到如下结果。

引理 2.2 令 $B>0$ 是一个常数，对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{x<n\le x+y}d_k(n)z^{\omega(n)}=y(\log x)^{kz-1}\left\{z\lambda(z)+O_{B,\varepsilon}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\},$$

对 $x\ge 2$，$x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$，及 $|z|\le B$ 一致成立，其中

$$\lambda(z)=\frac{k}{\Gamma(kz+1)}\prod_{p}\left(1+\sum_{v\ge 1}\frac{(v+k-1)!z}{v!(k-1)!p^{v}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{kz}.$$

证明：因为函数 $d_k(n)z^{\omega(n)}$ 是可乘函数，当 $\operatorname{Re}s>1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}F_{k,z}(s)&=\sum_{n\ge 1}\frac{d_k(n)z^{\omega(n)}}{n^{s}}\\&=\prod_{p}\left(1+\sum_{v\ge 1}\frac{d_k(p^{v})z^{\omega(p^{v})}}{p^{vs}}\right)\end{aligned}\tag{2}$$

把公式(1)带入公式(2)中，可得

$$\begin{aligned}F_{k,z}(s)&=\prod_p\left(1+\frac{kz}{p^s}+\frac{k(k+1)z}{2p^{2s}}+\cdots\right)\\&=\zeta(s)^{kz}\zeta(2s)^{\frac{k^2z-k^2z^2}{2}}G(s;z)\end{aligned}$$

其中欧拉乘积

$$\begin{aligned}G(s;z)&=F_{k,z}(s)\zeta(s)^{-kz}\zeta(2s)^{\frac{-k^2z+k^2z^2}{2}}\\&=\prod_p\left(1+\sum_{v\geq1}\frac{(v+k-1)!z}{v!(k-1)!p^{vs}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{kz}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{\frac{k^2z-k^2z^2}{2}}\end{aligned}$$

$G(s;z)$ 的 Dirichlet 级数是

$$G(s;z)=\sum_{n\geq1}\frac{b(n)}{n^s}.$$

令 $\xi=\frac{1}{p}$，当 $|\xi|<1$ 时，函数 $b(n)$ 是可乘函数，其在 p^v (p 为素数，$v\geq1$)的值可由下列公式给出

$$1+\sum_{v\geq1}b(p^v)\xi^v=\left(1+\sum_{v\geq1}\frac{(v+k-1)!}{v!(k-1)!}z\xi^v\right)(1-\xi)^{kz}(1-\xi^2)^{\frac{-k^2z^2+k^2z}{2}}.$$

特别地，当 $v=1$，$v=2$ 时，对于所有的素数 p 有

$$b(p)=b(p^2)=0.$$

令

$$H_z(\xi)=\left(1+\sum_{v\geq1}\frac{(v+k-1)!}{v!(k-1)!}z\xi^v\right)(1-\xi)^{kz}(1-\xi^2)^{\frac{-k^2z^2+k^2z}{2}},$$

因为当 $|\xi|<1$，$|z|\leq B$ 时函数 $H_z(\xi)$ 收敛，所以该函数在 $|\xi|=2^{-1/6}$，$|z|\leq B$ 时有最大值：

$$M_1(B):=\max_{|z|\leq B}\max_{|\xi|=2^{-1/6}}\left|\left(1+\sum_{v\geq1}\frac{(v+k-1)!}{v!(k-1)!}z\xi^v\right)(1-\xi)^{kz}(1-\xi^2)^{\frac{-k^2z^2+k^2z}{2}}\right|.$$

由 Cauchy 公式，当 $v\geq3$，$|z|\leq B$ 时有

$$b(p^v)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=2^{-1/6}}\frac{H_z(\xi)}{\xi^{v+1}}\mathrm{d}\xi,$$

所以 $b(p^v)$ 的上界为

$$\begin{aligned}|b(p^v)|&\leq\frac{1}{2\pi}M_1(B)\oint_{|\xi|=2^{-1/6}}\frac{1}{|\xi|^{v+1}}\mathrm{d}\xi\\&\leq M_1(B)2^{v/6}.\end{aligned}\tag{3}$$

当 $\sigma>\frac{1}{3}$，$|z|\leq B$ 时，计算可得

$$\log\left|G(s,z)\right| = \left|\log\prod_p\left(1+\sum_{v\ge 3}\frac{b(p^v)}{p^{vs}}\right)\right|$$
$$\le \sum_p\sum_{v\ge 3}\frac{\left|b(p^v)\right|}{p^{v\sigma}}.$$

再由公式(3)可得

$$\log\left|G(s;z)\right| \le M_1(B)\sum_p\sum_{v\ge 3}\frac{2^{v/6}}{p^{v\sigma}}$$
$$\le M_1(B)2^{1/2}\sum_p\frac{1}{1-\left(2^{-1/6}p^{\sigma}\right)^{-1}}\frac{1}{p^{3\sigma}}$$
$$\le \frac{2^{1/2}M_1(B)}{1-2^{-1/6}}\sum_p\frac{1}{p^{3\sigma}},$$

这表明 $G(s;z)$ 在 $\sigma\ge 1/2$， $|z|\le B$ 时收敛，且 $G(s;z)$ 有上界：

$$\left|G(s;z)\right|\le M(B),$$

其中

$$M(B) := \exp\left(\frac{2^{1/2}M_1(B)}{1-2^{-1/6}}\sum_p\frac{1}{p^{3/2}}\right).$$

综合上述计算结果，我们可以得到 Dirichlet 级数 $F_{k,z}(s)$ 是
$P\left(kz,\frac{-k^2z^2+k^2z}{2},|kz|,0,0,kB,\frac{k^2B^2+k^2B}{2},M(B)\right)$ 型的。

这样应用引理 2.1 我们可以得到引理 2.2. □

注记：如果 $z=1$，则由引理 2.2 可以推出

$$D(x,y) = y(\log x)^{k-1}\left\{\lambda(1)+O_{\varepsilon}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\},$$

对 $x\ge 2$， $x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$ 一致成立，其中

$$\lambda(1) = \frac{k}{\Gamma(k+1)}\prod_p\left(1+\sum_{v\ge 1}\frac{(v+k-1)!}{v!(k-1)!p^v}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^k.$$

在证明定理 1.2 时，我们还需要下面的 Berry-Esseen 不等式(可参见[13])。

引理 2.3 令 F、G 为两个分布函数，f、g 分别为 F、G 的特征函数。假设 G 可导，且 G' 在 R 上有界。则有

$$\|F-G\|_{\infty} \le 16\frac{\|G'\|_{\infty}}{T}+6\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(\tau)-g(\tau)}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau$$

对所有的 $T>0$ 都成立。其中 $\|F\|_{\infty} := \sup_{\lambda\in R}\left|F(\lambda)\right|$。

3. 定理 1.1 的证明

设

$$\sum_{x<n\le x+y} d_k(n) z^{\omega(n)} = \sum_{l=1}^{\infty} \pi_{l,k}(x,y) z^l$$

由 Cauchy 公式，可得

$$\pi_{l,k}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\left(\sum_{x<n\le x+y} d_k(n) z^{\omega(n)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{l+1}},$$

其中 $r := l/(k\log\log x)$。

由引理 2.2，可得

$$\begin{aligned}\pi_{l,k}(x,y) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} y(\log x)^{kz-1}\left(z\lambda(z) + O_{B,\varepsilon}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{l+1}} \\ &= M + \Delta,\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$M = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} y(\log x)^{kz-1} z\lambda(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{l+1}},$$

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} y(\log x)^{kz-1} O_{B,\varepsilon}\left(\frac{1}{\log x}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{l+1}}.$$

首先计算 $\pi_{l,k}(x,y)$ 的主项 M，令

$$M = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} y(\log x)^{kz-1} z\lambda(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{l+1}} = \frac{y}{\log x} I_{l,k}(x;r),$$

其中

$$I_{l,k}(x;r) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}(\log x)^{kz}\lambda(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{l}}.$$

接下来计算 $I_{l,k}(x,y)$，考虑 $l=1$ 和 $l\ge 2$ 两种情况。当 $l=1$ 时，因为 $\lambda(z)$ 在 $|z|\le B$ 时解，所以

$$I_{1,k}(x;r) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}(\log x)^{kz}\lambda(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \lambda(0) = k.$$

将此结果代入公式(4)，得到

$$\pi_{1,k}(x,y) = \frac{ky}{\log x}\left\{1 + O_{\varepsilon}\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right\}.$$

当 $l\ge 2$ 时，因为 $\lambda(z)$ 在 $|z|\le B$ 时解析，所以 $I_{l,k}(x;r) = I_{l,k}(x;r_0)$，其中 $r_0 := (l-1)/(k\log\log x)$。$\lambda(z)$ 在点 $z=r_0$ 处的 Taylor 展开为

$$\lambda(z) = \lambda(r_0) + \lambda'(r_0)(z-r_0) + (z-r_0)^2\int_0^1(1-t)\lambda''(r_0 + t(z-r_0))\mathrm{d}t. \tag{5}$$

这样，我们只需分别估计上述公式(5)右侧的三项对 $I_{l,k}(x;r_0)$ 的贡献即可。

第一项对 $I_{l,k}(x;r_0)$ 的贡献为：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}(\log x)^{kz}\lambda(r_0)\frac{\mathrm{d}z}{z^l} &= \frac{\lambda(r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^{kz\log\log x}}{z^l}\mathrm{d}z \\ &= \lambda\left(\frac{l-1}{k\log\log x}\right)\frac{(k\log\log x)^{l-1}}{(l-1)!}.\end{aligned} \tag{6}$$

第二项对 $I_{l,k}(x;r_0)$ 的贡献为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda'(r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{kz}(z-r_0)}{z^l}\mathrm{d}z\\
&=\frac{\lambda'(r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{kz}}{z^{l-1}}\mathrm{d}z-\frac{r_0\lambda'(r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{kz}}{z^l}\mathrm{d}z\\
&=\frac{(k\log\log x)^{l-2}}{(l-2)!}-r_0\frac{(k\log\log x)^{l-1}}{(l-1)!}\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

当 $0\le t\le 1$，$|z|\le B$，$|z|=r_0$ 时，有

$$
|r_0+t(z-r_0)|=|r_0(1-t)+tz|\le r_0(1-t)+t|z|=r_0\le B.
$$

因为当 $|z|\le B$ 时 $\lambda''(z)$ 解析，所以 $\lambda''(z)$ 在 $|z|\le B$ 上有上界，即存在一个常数 M_B，使得 $|\lambda''(r_0+t(z-r_0))|\le M_B$，容易计算出

$$
\int_0^1(1-t)\lambda''(r_0+t(z-r_0))\mathrm{d}t\le\int_0^1(1-t)M_B\mathrm{d}t=\frac{1}{2}M_B.
$$

由 Stirling 公式，第三项对 $I_{l,k}(x;r_0)$ 的贡献为：

$$
\begin{aligned}
&\ll_B\oint_{|z|=r_0}\frac{\mathrm{e}^{(k|z|\log\log x)}|z-r_0|^2}{r_0^l}|\mathrm{d}z|\\
&\ll_B r_0^{-l+3}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{(l-1)\cos\theta}(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\
&\ll_B\frac{(k\log\log x)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{(l-1)}{(k\log\log x)^2}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

现在来估计 $\pi_{l,k}(x,y)$ 的余项 Δ。我们有

$$
\begin{aligned}
\Delta&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}y(\log x)^{kz-1}O_{B,\varepsilon}\left(\frac{1}{\log x}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{l+1}}\\
&\ll\frac{y}{\log^2 x}\int_0^{2\pi}\frac{(\log x)^{kr\cos\theta}}{r^l}\mathrm{d}\theta\\
&\ll\frac{y}{r^l\log^2 x}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{l\cos\theta}\mathrm{d}\theta+1\right).
\end{aligned}
$$

令 $t=l(1-\cos\theta)$，可得

$$
\begin{aligned}
\Delta&\ll\frac{y\mathrm{e}^l}{r^l\log^2 x\sqrt{l}}\left(\int_0^l\mathrm{e}^{-t}t^{-1/2}\mathrm{d}t+1\right)\\
&\ll\frac{(k\log\log x)^l}{l!}\frac{y}{\log^2 x}.
\end{aligned}
$$

将公式(6) (7)、(8)代入公式(4)，即得定理 1.1。

4. 定理 1.2 的证明

令 $F_{x,y}(\lambda)=\frac{1}{D(x,y)}\sum\limits_{\substack{x<n\le x+y\\ \omega(n)-k\log\log x\le\lambda\sqrt{k\log\log x}}}d_k(n)$，记 $\varphi_{x,y}(\tau)$ 为 $F_{x,y}(\lambda)$ 的特征函数，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\tau) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau\lambda} \mathrm{d}F_{x,y}(\lambda) \\ &= \frac{1}{D(x,y)} \sum_{x<n\le x+y} \exp\left\{ i\tau\left(\frac{\omega(n)-k\log\log x}{\sqrt{k\log\log x}} \right) \right\} d_k(n) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i\tau T}}{D(x,y)} \sum_{x<n\le x+y} \mathrm{e}^{\frac{i\tau\omega(n)}{T}} d_k(n),\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $T=\sqrt{k\log\log x}$ 。

设 $(F,G)=(F_{x,y},\Phi)$，由引理 2.3，计算得到下面结果：

$$\|F_{x,y}-\Phi\|_\infty \le 16\frac{1}{\sqrt{2\pi}T}+6\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\tau^2/2}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau.$$

所以我们只需要证明

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\tau^2/2}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau \ll \frac{1}{T} \tag{10}$$

对 $x\ge 2$， $x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$ 时一致成立。

由引理 2.2，设 $z=\mathrm{e}^{it}$，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{D(x,y)}\sum_{x<n\le x+y} d_k(n)\mathrm{e}^{it\omega(n)} \\ &=\frac{1}{\lambda(1)}(\log x)^{k(z-1)}\left\{z\lambda(z)+O_{B,\varepsilon}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \\ &=(\log x)^{k(\mathrm{e}^{it}-1)}A(\mathrm{e}^{it})+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)\end{aligned}$$

对 $t\in R$， $x\ge 2$， $x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$ 一致成立，其中 $A(z)=z\lambda(z)/\lambda(1)$ 是关于 z 的整数函数，且 $A(1)=1$ 。令 $t=\tau/T$，则有

$$\varphi_{x,y}(\tau)=(\log x)^{k(\mathrm{e}^{i\tau/T}-1)}A(\mathrm{e}^{i\tau/T})\mathrm{e}^{-i\tau T}+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

对 $x\ge 2$， $x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$ 及 $|\tau|\le T$ 一致成立。

当 $|\tau|\le 1$ 时，因为 $\cos t-1\le -2(t/\pi)^2$，所以有

$$\left|(\log x)^{k(\mathrm{e}^{i(\tau/T)}-1)}\right|=\left|(\log x)^{k(\cos(\tau/T))}\right|=\mathrm{e}^{(\cos(\tau/T)-1)T^2}\le \mathrm{e}^{-2(\tau/\pi)^2},$$

由此可以推出 $\varphi_{x,y}(\tau)\ll_\varepsilon \mathrm{e}^{-2(\tau/\pi)^2}$ 对 $x\ge 2$， $x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$ 及 $|\tau|\le T$ 一致成立。下面我们将分三种情况来证明公式(10)成立。

首先，当 $T^{1/3}\le|\tau|\le T$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{\pm T^{1/3}}^{\pm T}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\tau^2/2}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau &\ll_\varepsilon \int_{T^{1/3}}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-2(\tau/\pi)^2}+\mathrm{e}^{-\tau^2/2}}{|\tau|}\mathrm{d}\tau \\ &\ll_\varepsilon \int_{T^{1/3}}^{T}\mathrm{e}^{-2(\tau/\pi)^2}\mathrm{d}\tau \\ &\ll_\varepsilon \frac{1}{T}.\end{aligned}$$

其次，当$|\tau|\le(\log x)^{-1}$时，因为

$$\left|\tau\left(\omega(n)-k\log\log x\right)/\sqrt{k\log\log x}\right|\ll\left(|\tau|\log x\right)/T,$$

则有

$$\exp\left\{i\tau\frac{\omega(n)-k\log\log x}{\sqrt{k\log\log x}}\right\}=1+O\left(\frac{|\tau|\log x}{T}\right),$$

将上式代入公式(9)，得到

$$\varphi_{x,y}(\tau)=\frac{1}{D(x,y)}\sum_{x<n\le x+y}d_k(n)\left(1+O\left(\frac{|\tau|\log x}{T}\right)\right)=1+O\left(\frac{|\tau|\log x}{T}\right).$$

由此可得，

$$\begin{aligned}\int_{-1/\log x}^{1/\log x}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\tau^2/2}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau&\ll\int_{-1/\log x}^{1/\log x}\frac{\left|1-\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\right|+\left(|\tau|\log x\right)/T}{|\tau|}\mathrm{d}\tau\\&\ll\int_{-1/\log x}^{1/\log x}\left(|\tau|+\frac{\log x}{T}\right)\mathrm{d}\tau\\&\ll\frac{1}{T}.\end{aligned}$$

最后，当$1/\log x<|\tau|\le T^{1/3}$时，由$A\left(\mathrm{e}^{i\tau/T}\right)$和$\mathrm{e}^{i(\tau/T)}$的 Taylor 展开：

$$A\left(\mathrm{e}^{i\tau/T}\right)=1+O\left(|\tau|/T\right),\quad \mathrm{e}^{i(\tau/T)}-1=i\left(|\tau|/T\right)-\frac{1}{2}\left(|\tau|/T\right)^2+O\left(\left(|\tau|/T\right)^3\right)$$

可得

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\tau)&=(\log x)^{k\left(\mathrm{e}^{i\tau/T}-1\right)}A\left(\mathrm{e}^{i\tau/T}\right)\mathrm{e}^{-i\tau T}+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)\\&=(\log x)^{k\left(\mathrm{e}^{i\tau/T}-1\right)}\mathrm{e}^{-i\tau T}\left\{1+O\left(\frac{|\tau|}{T}\right)\right\}+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)\\&=\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\left\{1+O\left(\frac{|\tau|^3+|\tau|}{T}\right)\right\}+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)\end{aligned}$$

对$x\ge2$，$x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$，$|\tau|\le T^{1/3}$一致成立。计算可得

$$\begin{aligned}\int_{\pm1/\log x}^{\pm T^{1/3}}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\tau^2/2}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau&\ll\int_{1/\log x}^{T^{1/3}}\left(\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\frac{1+\tau^2}{T}+\frac{1}{\tau\log x}\right)\mathrm{d}\tau\\&\ll\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\left(1+\tau^2\right)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\log x}\int_{1/\log x}^{T^{1/3}}1\mathrm{d}\tau\\&\ll\frac{1}{T}+\frac{\log\log x}{\log x}\\&\ll\frac{1}{T}.\end{aligned}$$

现在我们来证明定理 1.2 中的余项估计是最优的。定义

$$R_\lambda(x,y) := \frac{1}{D(x,y)} \sum_{\substack{x<n\le x+y \\ \omega(n)-k\log\log x \le \lambda\sqrt{k\log\log x}}} d_k(n) - \Phi(\lambda)$$

以及

$$R(x,y) := \sup_{\lambda\in R} \left|R_\lambda(x,y)\right|.$$

令 $l := [k\log\log x]$， $\theta := l - k\log\log x$， 我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_{l,k}(x,y)}{D(x,y)} &= F_{x,y}\left(\frac{\theta}{\sqrt{k\log\log x}}\right) - F_{x,y}\left(\frac{\theta - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}}{\sqrt{k\log\log x}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{k\log\log x}}\right) - \Phi\left(\frac{\theta - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}}{\sqrt{k\log\log x}}\right) + 2R(x,y) \qquad (11) \\
&= \int_{\left(\theta - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)/\sqrt{k\log\log x}}^{\theta/\sqrt{k\log\log x}} \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\mathrm{d}\tau + 2R(x,y) \\
&\le \frac{1}{2\sqrt{2\pi k\log\log x}} + 2R(x,y).
\end{aligned}$$

由 Stirling 公式及定理 1.1，可得

$$\frac{\pi_{l,k}(x,y)}{D(x,y)} \sim \frac{(k\log\log x)^{l-1}}{(\log x)^k (l-1)!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k\log\log x}}. \qquad (12)$$

根据公式(11)及公式(12)，可以求得

$$R(x,y) \ge \frac{1+o(1)}{2\sqrt{2\pi k\log\log x}} - \frac{1}{4\sqrt{2\pi k\log\log x}} = \frac{1+o(1)}{4\sqrt{2\pi k\log\log x}}$$

对 $x \ge 2$， $x^{7/12+\varepsilon} \le y \le x$ 一致成立。由此可见，定理 1.2 中的余项估计是最优的。

参考文献

[1] Titchmarsh, E.C. (1951) The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford University Press, Oxford.

[2] Landau, E. (1912) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Göttinger Nachrichten, 687C771.

[3] Voronoi, G. (1903) Sur un probleme du calcul des fonctions asymptotiques. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **1903**, 241-282. https://doi.org/10.1515/crll.1903.126.241

[4] Karatsuba, A.A. and Voronin, S.M. (1992) The Riemann Zeta-Function. Springer, Berlin, New York. https://doi.org/10.1515/9783110886146

[5] Krätzel, E. (1988) Lattice Points. Kluwer, Dordrecht, Boston, London.

[6] Ivić, A. (1985) The Riemann Zeta-Function. John Wiley and Sons, New York.

[7] Ivić, A., Krätzel, E., Kühleitner, M. and Nowak, W.G. (2004) Lattice Points in Large Regions and Related Arithmetic Functions: Recent Developments in a Very Classic Topic. *Elementary and Analytic Number Theory*, Mainz, 25 October 2004, 1-39. http://arXiv.org/pdf/math.NT/0410522

[8] Garaev, M.Z., Luca, F. and Nowak, W.G. (2006) The Divisor Problem for d4(n) in Short Intervals. *Archiv der Mathematik*, **86**, 60-66. https://doi.org/10.1007/s00013-005-1447-2

[9] Erdös, P. and Kac, M. (1939) Gaussian Law of Errors in the Theory of Additive Functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **25**, 205-207. https://doi.org/10.1073/pnas.25.4.206

[10] Elliott, P.D.T.A. (2015) Central Limit Theorem for Classical Cusp Forms. *The Ramanujan Journal*, **36**, 81-98. https://doi.org/10.1007/s11139-013-9516-9

[11] Elliott, P.D.T.A. (2015) Corrigendum: Central Limit Theorem for Classical Cusp Forms. *The Ramanujan Journal*, **36**, 99-102. https://doi.org/10.1007/s11139-014-9629-9

[12] Liu, K. and Wu, J. (2018) Weighted Erdös-Kac Theorem in Short Intervals.

[13] Tenenbaum, G. (1995) Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory, Translated from the Second French Edition by C. B. Thomas. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 46, Cambridge University Press, Cambridge, xvi + 448.