Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 1102-1107
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99135

Solutions of a Class of Euler Function Equations

Keli Pu

Department of Mathematics and Computer Science, ABa Teachers College, Wenchuan Sichuan
Email: pp180896@163.com

Received: Nov. 2nd, 2019; accepted: Nov. 21st, 2019; published: Nov. 28th, 2019

Abstract

Let n be a positive integer, $\varphi(n)$ is Euler function, the value is equal to the sequence $0, 1, 2, ..., n-1$ which are prime to n. In fact, discussing the solutions of Euler function equation is a meaningful work, moreover, the properties of the function are very important to discuss the solution. In this paper, using the properties of the Euler function, we discuss the necessity of integer solution of the Euler function equation $\varphi(mn) = a\varphi(m) + b\varphi(n) + c$, and then gives all solutions if a = 5, b = 6, C = 16.

Keywords

Euler Function, Properties of Euler Function, Integer Solution

一类欧拉函数方程的解

蒲可莉

阿坝师范学院，数学与计算机科学学院，四川 汶川
Email: pp180896@163.com

收稿日期：2019年11月2日；录用日期：2019年11月21日；发布日期：2019年11月28日

文章引用: 蒲可莉. 一类欧拉函数方程的解[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1102-1107.
DOI: 10.12677/pm.2019.99135

摘 要

设n是正整数，$\varphi(n)$是著名的欧拉函数，它的值等于序列$0,1,2...n-1$中与n互素的整数的个数。对于涉及欧拉函数的方程解的讨论是一个富有意义的课题，而欧拉函数的性质在讨论欧拉函数方程的解中至关重要。本文利用欧拉函数性质的相关结论，讨论了一类欧拉函数方程$\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ 存在整数解的必要条件，并给出了当$a=5,b=6,c=16$ 时，该欧拉函数方程的全部解。

关键词

欧拉函数, 欧拉函数性质, 整数解

1. 引言

设n是正整数，$\varphi(n)$是著名的欧拉函数，它的值等于序列$0,1,2...n-1$中与n互素的整数的个数。关于Euler函数$\varphi(n)$的方程是数论中非常重要和有意义的课题，对有关于$\varphi(n)$的性质和$\varphi(n)$有关的不定方程的研究，许多学者进行了探讨(可参看文献 [1–13])。其中文献 [1, 2] 对于方程$\varphi(x)=m$的解进行了讨论，文献 [3]给出了当$m=2p,2p^n,2pq$ 时方程$\varphi(x)=m$的解(其中p,q为素数，n为正整数)。而在文献 [4–7]中则分别讨论了方程$\varphi(mn)=k(\varphi(m)+\varphi(n))$ 其中$k\in Z$，在k取不同值时的解。对形如$\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ 的欧拉函数非线性方程，文献 [13] 给出了当$a=7,b=8,c=16$时方程的全部解。本文讨论了方程$\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$(其中$a,b,c\in Z$)的整数解，并给出了$\varphi(mn)=5\varphi(m)+6\varphi(n)+16$ 的全部整数解。

2. 欧拉函数性质的相关结果

引理1 [14] 设m,n为任意正整数，若$m|n$，则$\varphi(m)|\varphi(n)$。

引理2 [14] 对任意正整数m,n，若$gcd(m,n)=d$，则$\varphi(mn)=\frac{d\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(d)}$。

引理3 [14] 当$n\geq 1$时，$\varphi(n)\leq n$，当$n\geq 3$时，$\varphi(n)$必为偶数。

推论4 对任意n个正整数$x_1,x_2,...,x_n$，有

$$\varphi(x_1x_2...x_n)\geq\varphi(x_1)\varphi(x_2)...\varphi(x_n)$$

证明 由引理2及引理3立得。

引理5 [15] 对任意正整数n, p是素数，则

$$\varphi(np) = \begin{cases} (p-1)\varphi(n), & (n,p)=1, \\ p\varphi(n), & (n,p)=p. \end{cases}$$

3. 主要结果及证明

引理6 [3] p为素数，$\varphi(x)=2p$的解为

(1) 当$p=2$时，$x=5,8,10,12$

(2) 当$p=3$时，$x=7,9,14,18$

(3) 当$p\geq 5$时，$g=2p+1$为素数，$\varphi(x)=2p$ 有两个解$x=g,2g$；$g=\varphi(2p+1)$不为素数时，则$\varphi(x)=2p$无整数解。

引理7 [3] 若$\varphi(x)=2$, 则$x=3,4,6$。

$\varphi(x)=2^2$，则$x=5,8,10,12.$

$\varphi(x)=2^3$，则$x=15,16,20,24,30.$

$\varphi(x)=2^4$，则$x=17,32,34,40,48,60.$

$\varphi(x)=2^5$，则$x=51,64,68,80,96,102,120.$

定理6 欧拉函数方程$\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$(其中$a,b,c\in Z$)，若存在整数解$(m,n)$，则$\varphi(gcd(m,n))|c$。

证明 不妨设$gcd(m,n)=d$，则$d|m, d|n$。由引理1可得$\varphi(d)|\varphi(m)$且$\varphi(d)|\varphi(n)$。令$\varphi(m)=m_1\varphi(d)$,
$\varphi(n)=n_1\varphi(d)$, 其中$m_1,n_1\in Z^+$，再由引理2得$\varphi(d)(dm_1n_1-am_1-bn_1)=c$，即$\varphi(d)|c$，得证。

定理7 欧拉函数方程$\varphi(mn)=5\varphi(m)+6\varphi(n)+16$ 的整数解共21组，分别为

$$(m,n)=(53,7),(53,9),(53,14),(53,18),(106,7),(106,9),$$

$$(15,29),(16,29),(20,29),(24,29),(30,29),(15,58),(8,38),$$

$$(8,54),(10,38),(10,54),(12,38),(75,12),(12,18),(20,10),(30,10).$$

证明 令$gcd(m,n)=d$，由引理2可得$\varphi(d)(dm_1n_1-5m_1-6n_1)=16$，再由定理6可得$\varphi(d)|16$，则$\varphi(d)=1,2,4,8,16$。下面分情况讨论：

I. 当$\varphi(d)=1$，则$d=1$或2。

$d=1$时，则$m_1n_1-5m_1-6n_1=16$，即$(m_1-6)(n_1-5)=46$ 由此可得$(m_1,n_1)=(7,51),(52,6),(8,28),(29,7)$，而当$(m_1,n_1)=(7,51),(29,7)$时，由于$\varphi(d)=1$，所以$\varphi(m)\varphi(n)$均为奇数，这与引理3 矛盾，所以$(m_1,n_1)=(52,6),(8,28)$。当$(m_1,n_1)=(52,6)$时，此时$\varphi(m)=52$，

则计算可得$m=53,106$，$\varphi(n)=6$，则$n=7,9,14,18$, 所以$(m,n)=(53,7),(53,9)(53,14),(53,18),(106,7),(106,9)$。当$(m_1,n_1)=(8,28)$时，$\varphi(m)=8$, 则$m=15,16,20,24,30$。而$\varphi(n)=28$，则$n=29,58$。所以

$$(m,n)=(15,29),(16,29)(20,29),(24,29),(30,29),(15,58).$$

$d=2$时，则$2m_1n_1-5m_1-6n_1=16$，即$(m_1-3)(2n_1-5)=31$, 由此可得$(m_1,n_1)=(4,18),(34,3)$。而(34,3)不满足条件，舍去。即$(m_1,n_1)=(4,18)$，则$\varphi(m)=4$，则$m=5,8,10,12$。而$\varphi(n)=18$，则$n=19,27,38,54$。所以

$$(m,n)=(8,38),(8,54),(10,38),(10,54),(12,38).$$

II.当$\varphi(d)=2$，则$d=3,4,6$。

$d=3$时，则$3m_1n_1-5m_1-6n_1=8$，即$(3m_1-6)(3n_1-5)=54$。则$(m_1,n_1)=(20,2)$，此时$\varphi(m)=40$，则$m=41,55,75,82,88,100,110,132,150,\varphi(n)=4$，则$n=5,8,10,12$。所以

$$(m,n)=(75,12)$$

$d=4$时，则$4m_1n_1-5m_1-6n_1=8$，即$(2m_1-3)(4n_1-5)=31$，则$(m_1,n_1)=(2,9)$，此时$\varphi(m)=4$，则$m=5,8,10,12$” $\varphi(n)=18$, 则$n=19,27,38,54$。因$gcd(m,n)=4$，所以方程无整数解。

$d=6$时，则$6m_1n_1-5m_1-6n_1=8$，即$(2m_1-2)(6n_1-5)=26$，则$(m_1,n_1)=(14,1),(2,3)$。当$(m_1,n_1)=(14,1)$，此时$\varphi(m)=28$，则$m=29,58.\varphi(n)=2$，则$n=3,4,6$，而$gcd(m,n)=6$，此时方程无整数解。当$(m_1,n_1)=(2,3)$，此时$\varphi(m)=4$，则$m=5,8,10,12.\varphi(n)=6$，则$n=7,9,14,18$。所以

$$(m,n)=(12,18).$$

III.当$\varphi(d)=4$，则$d=5,8,10,12$。

$d=5$时，$5m_1n_1-5m_1-6n_1=4$，即$(5m_1-6)(n_1-1)=10$，此时不存在$m_1,n_1\in Z^+$ 使得等式成立，故方程无整数解。

$d=8$时，$8m_1n_1-5m_1-6n_1=4$，即$(4m_1-3)(8n_1-5)=31$，此时不存在$m_1,n_1\in Z^+$使得等式成立，故方程无整数解。

$d=10$时，$10m_1n_1-5m_1-6n_1=4$，即$(5m_1-3)(2n_1-1)=7$，则$(m_1,n_1)=(2,1)$，此时$\varphi(m)=8$，则$m=15,16,20,24,30.\varphi(n)=4$，则$n=5,8,10,12$。所以

$$(m,n)=(20,10),(30,10).$$

$d=12$时，$12m_1n_1-5m_1-6n_1=4$，即$(2m_1-1)(12n_1-5)=13$，此时不存在$m_1,n_1\in Z^+$使得等式成立，故方程无整数解。

IV.当$\varphi(d)=8$，则$d=15,16,20,24,30$。

$d=15$时，$15m_1n_1-5m_1-6n_1=2$，即$(5m_1-2)(3n_1-1)=4$.

$d=16$时，$16m_1n_1-5m_1-6n_1=2$，即$(8m_1-3)(16n_1-5)=31$.

$d=20$时，$20m_1n_1-5m_1-6n_1=2$，即$(10m_1-3)(4n_1-1)=7$.

$d=24$时，$24m_1n_1-5m_1-6n_1=2$，即$(24m_1-5)(4n_1-1)=13$.

$d=30$时，$30m_1n_1-5m_1-6n_1=2$，即$(5m_1-1)(6n_1-1)=3$.

此时，对上述5种情况均不存在m_1,n_1使得等式成立，故原方程无整数解。

V.当$\varphi(d)=16$，则$d=17,32,34,40,48,60$。同上计算可得，均不存在m_1,n_1使得等式$dm_1n_1-5m_1-6n_1=1$成立，故原方程无整数解。综上定理得证。

基金项目

国家自然科学基金(11861001)，四川省应用基础研究项目(2018JY0458)，四川省高校科研创新团队建设计划(18TD0047)，阿坝师范学院校级项目(ASB18-02)。

参考文献

[1] Schinzel, A. (1956) Surl' Equation $\varphi(x)=m$. *Elemente der Mathematik*, **11**, 75-78.

[2] Ford, K. (1999) The Number of Solutions of $\varphi(x)=m$. *Annals of Mathematics*, **150**, 283-311. https://doi.org/10.2307/121103

[3] 姜友谊. 关于Euler函数方程$\varphi(x)=m$的解[J]. 重庆工业管理学院学报, 1998, 12(5): 91-94.

[4] 张四保. 有关Euler函数$\varphi(n)$方程的正整数解[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(20): 302-305.

[5] 许霞, 徐小凡. 关于欧拉方程$\varphi(ab)=2k(\varphi(a)+\varphi(b))$的正整数解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 6-9.

[6] 管春梅, 张四保. 与Euler函数$\varphi(n)$有关的两个方程[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(9): 221-225.

[7] 鲁伟阳, 高丽, 王曦浛. 有关Euler函数$\varphi(n)$的方程的可解性问题[J]. 江西科学, 2016, 34(1): 15-16.

[8] 陈斌. 一类包含Smarandache函数和Euler函数的方程[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, 34(2): 70-73.

[9] 刘卓, 石鹏. 关于方程$\sum S(d)=\varphi(n)$的可解性. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(6): 54-58.

[10] 陈国慧. 一个包含Euler函数的方程[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(4): 439-445.

[11] 张四保, 杜先存. 一个包含Euler函数方程的正整数解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2015, 49(4): 497-501.

[12] Sun, C.F. and Cheng, Z. (2010) Some Kind of Equations Involving Euler Function $\varphi(n)$. *Journal of Mathematical Study*, **43**, 364-369.

[13] 夏衣旦・莫合德, 张四保, 熊满玉. 一个有关Euler函数$\varphi(n)$的非线性方程的解[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 4-7.

[14] Rosen, K.H. (2005) Elementary Theory and Its Applications. 5th Edition, Pearson Education Inc., Addison Wesley, Upper Saddle River, NJ.

[15] 孙翠芳, 程智. 关于方程$\varphi(xyz) = 2(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z))$[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(23): 267-271.