Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 1108-1113
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99136

Hans汉斯

On the Weak Locality of a Field Algebra and Its Quotient Space

Xiaopei Chen, Xiandong Wang

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 337025168@qq.com

Received: Nov. 3rd, 2019; accepted: Nov. 22nd, 2019; published: Nov. 29th, 2019

Abstract

In this paper, we investigate the weak locality of a field algebra and give a concrete example which relates to weak locality and non-locality. The quotient space of a field algebra is obtained by its bilateral ideals. Finally, some theorems on the quotient space of a field algebra are explored.

Keywords

Field Algebra, Vertex Algebra, Weak Locality, Bilateral Ideals, Quotient Space

场代数弱局部性与商空间的研究

陈晓培，王宪栋

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 337025168@qq.com

收稿日期：2019年11月3日；录用日期：2019年11月22日；发布日期：2019年11月29日

摘　要

本文对场代数的弱局部性进行了研究，给出了一个具体的例子，用于比较算子的弱局部性与非局部性。对场代数关于其双边理想做商得到商空间，并探究了场代数商空间的若干基本性质。

关键词

场代数，顶点代数，弱局部性，双边理想，商空间

文章引用: 陈晓培, 王宪栋. 场代数弱局部性与商空间的研究[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1108-1113.
DOI: 10.12677/pm.2019.99136

1. 引言

场代数是顶点代数概念的“非局部性”推广。在顶点代数的定义中，局部性是一个基本的条件，把它换成较弱的结合性条件，将得到一个新的代数结构——场代数。由于场代数与顶点代数之间有着如此密切的联系，对场代数的研究将有助于更好的理解顶点代数及其相关领域。

在文献[1]中，作者系统讨论了态场对应、场代数的定义及初等性质，并且研究了场代数和顶点代数之间的关系，研究了态场对应的弱局部性和莱布尼兹共形代数上的张量代数等等。文献[2]研究了场代数的结合性，文献[3]和[4]分别引进了局部共形场代数和全场代数。本文将在上述文献给出的基本概念的基础上，探讨弱局部性与非局部性之间的关系，并给出具体实例加以说明。另外，本文对场代数的商空间也进行了描述，并讨论了一些基本性质。

本文假设所讨论的向量空间与各种代数结构都是指某个固定的域 F 上的，F 可以是一般的域，必要时还可以假定它是复数域，从而保障线性变换特征值与特征向量的存在性。关于顶点代数的系统讨论，以及本文用到的一些术语与记号，参见文献[5] [6] [7] [8] [9]。

设 V 是一个向量空间，$0\neq|0\rangle\in V$，若有线性映射：

$$Y:V\to glf(V)=\left\{a(z)=\sum_{n\in Z}a_n z^{-n-1};a_n\in EndV,n\in Z\right\}$$
$$a\to Y(a,z)$$

及自同态 $T\in EndV$，使得下列条件成立：

1) 真空性 $Y(|0\rangle,z)=I_V$，$Y(a,z)|0\rangle=a+T(a)z+\cdots\in V[[z]]$，其中 $I_V(\in EndV)$ 是恒等变换；
2) 平移不变性 $[T,Y(a,z)]=Y(Ta,z)=\partial_z Y(a,z)$(称 T 是 V 上的平移算子)；

则称三元组 $(V,|0\rangle,Y)$ 是态场对应。

进一步，若态场对应 $(V,|0\rangle,Y)$ 满足结合性公理：对 $a,b,c\in V$，有

$$(z-w)^N Y(Y(a,z)b,-w)c=(z-w)^N i_{z,w}Y(a,z-w)Y(b,-w)c,N\gg 0,$$

则称三元组 $(V,|0\rangle,Y)$ 为场代数。

2. 预备知识

定义 2.1 [1]：对 $a(z),b(z)\in glf(V)$，若有正整数 N，使得 $\mathrm{Res}_z(z-w)^N[a(z),b(w)]=0$，则称二元对 $(a(z),b(z))$ 是 N-弱局部的。若对充分大的 N，总有 $\mathrm{Res}_z(z-w)^N[a(z),b(w)]=0$，则称二元对 $(a(z),b(z))$ 是弱局部的。

定义 2.2 [5]：(局部性)对 $a(z),b(z)\in glf(V)$，若存在自然数 $N\in\mathrm{N}$，使得下列等式成立：

$$(z-w)^N[Y(a,z),Y(b,w)]=0,$$

其中 $[Y(a,z),Y(b,w)]=\sum_{n,m\in Z}[a_n,b_m]z^{-n-1}w^{-m-1}$，则称 $(a(z),b(z))$ 是相互局部的。

定义 2.3 [1]：设 V 是场代数，I 是 V 的子空间，且 $TI\subset I$。若有 $a_nb\in I$，$\forall n\in\mathrm{Z},a\in V,b\in I$，则称 I 是 V 的一个左理想。如果有 $a_nb\in I$，$\forall n\in\mathrm{Z},b\in V,a\in I$，则称 I 是 V 的一个右理想。若 I 既是左理想又是右理想，则 I 是 V 的一个双边理想。

3. 主要结果及证明过程

设 V 是域 F 上的向量空间，定义 V 上的算子向量空间

$$glf(V)=\left\{a(x)=\sum_{n\in Z}a_n x^{-n-1}\,|a_n\in EndV;\forall v\in V,a_n v=0,n>>0\right\},$$

其加法和数乘运算都是自然定义的。称 $glf(V)$ 是向量空间 V 上的场空间，其中的元素 $a(x)$ 为 V 上的场或算子。定义 $glf(V)$ 上的双线性 n-运算如下：

$$n:glf(V)\times glf(V)\to glf(V)$$

$$\big(a(x),b(x)\big)\to a(x)_n b(x)$$

$$a(x)_n b(x)=\operatorname{Res}_{x_1}\left\{(x_1-x)^n a(x_1)b(x)-(-x+x_1)^n b(x)a(x_1)\right\}$$

此时，$glf(V)$ 是 F 上的非结合代数，其中的算子也称为是下方截断的，见文献[1]。

引理 3.1：定义算子 $a(z)\in EndV\left[\!\left[z,z^{-1}\right]\!\right]$，使得 $a(z)$ 的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_N$ 与 $b(z)$ 的任何系数可交换，则有 $\operatorname{Res}(z-w)^N\left[a(z),b(w)\right]=0$。此时，算子 $\big(a(z),b(z)\big)$ 是 N-弱局部的。

进一步，若还有 $a_{N+j}=0,j\ge1$，则算子 $\big(a(z),b(z)\big)$ 是弱局部的。

证明：设 $a(z)=\sum_{n\in Z}a_n z^{-n-1},b(z)=\sum_{m\in Z}b_m z^{-m-1}$，其中 $a_n,b_m\in EndV,\forall n,m\in Z$。根据引理的条件，有下列等式：

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_z(z-w)^N\left[a(z),b(w)\right]&=\operatorname{Res}_z\left[\sum_{i=0}^{N}(-1)^i z^{N-i}w^i\sum_{n,m\in Z}\left[a_n,b_m\right]z^{-n-1}w^{-m-1}\right]\\&=\operatorname{Res}_z\left[\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\sum_{n,m\in Z}\left[a_n,b_m\right]z^{N-i-n-1}w^{i-m-1}\right]\\&=\operatorname{Res}_z\left[\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\sum_{n,m\in Z}\left[a_{N+n-i},b_{m+i}\right]z^{-n-1}w^{-m-1}\right]\\&=\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\sum_{m\in Z}\left[a_{N-i},b_{m+i}\right]w^{-m-1}\\&=0\end{aligned}$$

即，等式 $\operatorname{Res}_z(z-w)^N\left[a(z),b(w)\right]=0$ 成立，算子 $\big(a(z),b(z)\big)$ 是 N-弱局部的。

定理 3.2：设算子 $a(z)$，$b(z)$ 如上，且 $b(z)$ 是下方截断的。若有正整数 N_1 使得 $b_{N_1}\ne0,b_{N_1+j}=0$，$\forall j=1,2,\cdots$，且算子 $a(z)$ 满足条件：对任意的正整数 N_2，存在非负整数 n，使得系数 a_{N_2+n} 与 b_{N_1} 不可交换，则 $\big(a(z),b(z)\big)$ 不是局部的。

证明：对任意正整数 N_2，要证明 $(z-w)^{N_2}\left[a(z),b(w)\right]\ne0$。根据前面的计算式，只要证明

$$\sum_{i=0}^{N_2}(-1)^i\left[a_{N_2+n-i},b_{m+i}\right]\ne0,\exists n,m\in Z$$

选取 $m=N_1$，上述不等式化简为 $\left[a_{N_2+n},b_{N_1}\right]\ne0$。再根据定理条件：$a_{N_2+n}$ 与 b_{N_1} 不可交换，前面的不等式确实成立，从而算子 $\big(a(z),b(z)\big)$ 不是局部的。

注记：上述定理中的 $a(z)$ 不具有下方截断性。若要求 $a(z)$ 满足下方截断性，可选取正整数 $K>N_1$，使得 $a_K\ne0$，且 $a_{K+j}=0,j\ge1$。此时，对任意的正整数 N_2 及整数 k，满足：$0\le k\le N_2$，使得 $a_{N_2+n-k}\ne0$，且 $a_{N_2+n-k+j}=0,j\ge1$，这里 $n=k-N_2+K$。取 b_{N_1}，使它与 a_K 不可交换。再令 $m=N_1-k$，则有下列式子：

$$\left[a_{N_2+n-k},b_{m+k}\right]=\left[a_{N_2+n-k},b_{N_1}\right]\neq 0,$$

从而有

$$\sum_{i=0}^{N_2}(-1)^i\left[a_{N_2+n-i},b_{m+i}\right]=\left[a_{N_2+n-k},b_{m+k}\right]\neq 0.$$

因此，算子$\left(a(z),b(z)\right)$不是局部的。

下面我们以二阶矩阵为例，给出一个具体的例子。

例 3.3： 1) 构造算子$a(z)$：当$s<0$时，a_s为任意矩阵。当$0\le s\le N_1$时，令$a_s=\begin{pmatrix} b_s & 0 \\ 0 & b_s \end{pmatrix},b_s\in F$。当$N_1+1\le s\le K$，令$a_s=\begin{pmatrix} s & s \\ 0 & s \end{pmatrix}$。当$s\ge K+1$，令$a_s=0$。2) 构造算子$b(z)$：当$s<N_1$时，$b_s$为任意矩阵。当$s=N_1$时，$b_{N_1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，$b_{21}\neq 0$或者$b_{12}\neq b_{22}$。当$s>N_1$时，$b_{N_1+j}=0,j\ge 1$。此时，$\begin{pmatrix} s & s \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & s \\ 0 & s \end{pmatrix}$。因此，$\left(a(z),b(z)\right)$是$N_1$-弱局部的，但是它们不是局部的。

讨论算子的弱局部性是为了构造场代数，而局部性的研究是顶点代数要面临的问题。下面的例子给出了一些说明，其详细讨论见文献[1]和文献[8]。

例 3.4： 设子空间W是向量空间$glf(V)$的一个弱局部子空间，它包含恒等变换$I(x)=Id_V$，且对n运算封闭，则$\left(W,Y,I(x)\right)$是一个态场对应。这里线性映射$Y:W\to EndW\left[\!\left[z,z^{-1}\right]\!\right]$定义如下：

$$Y\left(a(x),z\right)=\sum_{n\in Z}a(x)_n z^{-n-1},$$

其中$a(x)_n b(x)$定义如上。若$\left(W,Y,I(x)\right)$满足结合性公理，则它是场代数。若还满足弱局部性，则它是强场代数。

引理 3.5： 设$\left(V,|0\rangle,Y\right)$是场代数，$I$是$V$的$T$不变的双边真理想，则$\left(V/I,\left[|0\rangle\right],\tilde{Y}\right)$也是一个场代数。相应的线性映射可以如下给出：

$$\tilde{Y}:V/I\to End\left(V/I\right)\left[\!\left[z,z^{-1}\right]\!\right]$$
$$[u]\to Y\left([u],z\right)=\sum_{n\in Z}[u]_n z^{-n-1},n\in Z,u\in V$$

证明： 1) 合理性：商空间V/I中的n运算定义为：$[u]_n[v]=[u_n v],\forall u,v\in V$。若$[a]=[b]$，$[u]=[w]$，则$a-b\in I,u-w\in I$，$I$是$V$的双边理想，必有$(a-b)_n u\in I,b_n(u-w)\in I$。

$$a_n u-b_n w=a_n u-b_n u+b_n u-b_n w=(a-b)_n u+b_n(u-w)\in I,$$

于是，$[a_n u]=[b_n w]$，运算的定义是合理的。

2) 真空性：$Y\left(\left[|0\rangle\right],z\right)=I_{V/I}$，$Y\left([a],z\right)|0\rangle=[a]+T\left([a]\right)z+\cdots\in V/I[\![z]\!]$，其中$I_v\in EndV$是恒等变换。

3) 平移不变性：$\left[T,Y\left([a],z\right)\right]=Y\left(T[a],z\right)=\partial_z Y\left([a],z\right)$，$T$是$V/I$上的平移算子。

4) 因为$\left(V,|0\rangle,Y\right)$是场代数，对所有的$a,b,c\in V$，有下列结合性等式：

$$(z-w)^N Y\left(Y(a,z)b,-w\right)c=(z-w)^N i_{z,w}Y(a,z-w)Y(b,-w)c,N\gg 0$$

$$(z-w)^N Y\left(\sum_{n\in Z}a_n bz^{-n-1},-w\right)c=(z-w)^N i_{z,w}\sum_{m\in Z}a_m(z-w)^{-m-1}\sum_{k\in Z}b_k c(-w)^{-k-1}$$

将上式变形，得到下列等式：

$$(z-w)^N \sum_{s,n\in Z} (a_n b)_s cz^{-n-1}(-w)^{-s-1} = (z-w)^N i_{z,w} \sum_{m,k\in Z} a_m (b_k c)(z-w)^{-m-1}(-w)^{-k-1}.$$

对商空间 V/I 中的任意元素 $[a],[b],[c]$，必有

$$(z-w)^N \sum_{s,n\in Z} ([a]_n [b])_s [c] z^{-n-1}(-w)^{-s-1} = (z-w)^N i_{z,w} \sum_{m,k\in Z} [a]_m ([b]_k [c])(z-w)^{-m-1}(-w)^{-k-1}$$

$$(z-w)^N Y(Y([a],z)[b],-w)[c] = (z-w)^N i_{z,w} Y([a],z-w) Y([b],-w)[c], N \gg 0$$

故 $(V/I,[|0\rangle],Y)$ 也是一个场代数。

可以按照通常的方式定义场代数的同态，并且同态的核是理想，同态的像是场代数。

引理 3.6： 场代数的同态基本定理：设 $f:V\to W$ 是场代数 V,W 之间的同态，I 是 V 的一个理想，并且 $I\subset\ker f$，则有唯一的场代数同态 $\tilde{f}:V/I\to W$，使得 $\tilde{f}\pi=f$。这里 $\pi:V\to V/I, a\to[a]$ 是典范同态，而 $\tilde{f}([a])=\tilde{f}\pi(a)=f(a),\forall a\in V$。

特别，若 $I=\ker f$，则 $\tilde{f}$ 是单射，此时 $\tilde{f}:V/I\to \mathrm{Im}\, f$ 是同构。

证明：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r] & \mathrm{Im} f \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

1) 令 $\tilde{f}([x])=f(x),\forall x\in V$。映射 $\tilde{f}$ 定义合理：若 $[a_1]=[a_2]$，即 $a_1\sim a_2$，$a_1-a_2\in I\subset\ker f$，有 $f(a_1-a_2)=0$。$f(a_1)=f(a_2)$，$\tilde{f}([a_1])=\tilde{f}([a_2])$。

2) $\tilde{f}$ 是同态：$V/I\to W$。首先，它是向量空间的线性映。另外，它保持 n 运算：

$$\tilde{f}([|0\rangle])=|0\rangle, \tilde{f}([a]_n[b])=f(a_n b)=f(a)_n f(b)=\tilde{f}([a])_n \tilde{f}([b]).$$

3) 由 $\tilde{f}$ 的定义直接看出：$\tilde{f}\pi=f$。

4) 唯一性：若还有另外一个同态 $g:V/I\to W$，使得 $g\pi=f$。则 $(g\pi)(x)=f(x),\forall x\in V$。即 $g([x])=f(x),\forall[x]\in V/I$。由此可知，$g=\tilde{f}$。

5) $\tilde{f}:V/I\to\mathrm{Im}\, f$ 是双射：由定义直接看出。因此，$\tilde{f}:V/I\to\mathrm{Im}\, f$ 是场代数的同构映射。

引理 3.7： 设 $(V,|0\rangle,Y)$ 是场代数，I 是 V 的真理想，则商代数 V/I 的理想构成的集合 B 与 V 包含 I 的理想构成的集合 A 之间有一一对应。特别地，V/I 的理想形如 L/I，这里 L 是 V 的包含 I 的理想。

证明：考虑典范态场对应同态 $\pi:V\to V/I, a\to[a]$，由此定义集合之间的映射

$$\sigma:A\to B,\ L\to\pi(L)=L/I.$$

1) σ 是单射：设理想 $L_1,L_2\in A$，且 $L_1/I=L_2/I$。$\forall a\in L_1$，必有 $[a]\in L_2/I$。故存在 $b\in L_2$，使得 $[a]=[b]\in V/I$。于是 $a-b\in I\subset L_2$，从而 $L_1\subset L_2$，同理可得 $L_2\subset L_1$，则 $L_1=L_2$。

2) σ 是满射：设 $K\in B$，令 $L=\pi^{-1}(K)$，现证 $L\in A$。$\forall a,b\in L$，$\pi(a+b)=\pi(a)+\pi(b)\in K$。从

而 $a+b\in L$ 。$\forall a\in L,z\in V$ ，则 $\pi(a_n z)=\pi(a)_n\pi(z)\in K$ ，同理可证 $\pi(z_n a)=\pi(z)_n\pi(a)\in K$ 。因此，L 是 V 的理想。另外，L 是 V 的包含 I 的理想，即 $L\in A$ 。最后由于典范映射 π 是满射，必有 $L/I=\pi\pi^{-1}(K)=K$ ，即 σ 是满射。

因此，σ 是双射，引理结论成立。

引理 3.8： 设 $(V,|0\rangle,Y)$ 是场代数，其中 I，J 为场代数 $(V,|0\rangle,Y)$ 的两个双边真理想，且有理想的包含关系：$I\subset J$ ，则有场代数之间的同构映射：$\dfrac{V/I}{J/I}\to V/J$ 。

证明：由双边理想的定义可以验证 J/I 是 V/I 的双边理想，利用同态基本定理可以验证引理的结论成立。

参考文献

[1] Bakalov, B. and Kac, V.G. (2002) Field Algebras. *International Mathematics Research Notices*, **13**, 123-159. https://doi.org/10.1155/S1073792803204232

[2] Kim, N. (2011) Associativity of Field Algebras. *Annales Henri Poincare*, **12**, 1145-1168. https://doi.org/10.1007/s00023-011-0092-5

[3] Juriev, D. (1991) Local Conformal Field Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **138**, 569-581. https://doi.org/10.1007/BF02102042

[4] Huang, Y.Z. and Kong, L. (2007) Full Field Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **272**, 345-396. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0224-4

[5] Gebert, R.W. (1993) Introduction to Vertex Algebras, Borcherds Algebras and the Monster Lie Algebra. *International Journal of Modern Physics A*, **8**, 5441-5503. https://doi.org/10.1142/S0217751X93002162

[6] Borcherds, R.E. (1986) Vertex Algebras, Kac-Moody Algebras and the Monster. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **83**, 3068-3071. https://doi.org/10.1073/pnas.83.10.3068

[7] Borcherds, R.E. (1998) Vertex Algebras. *Mathematics*, **160**, 35-77. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0705-4_2

[8] Lepowsky, J. and Li, H.S. (2004) Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations. Progress in Mathematics, Volume 227. Birkhauser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8186-9

[9] Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G. (1969) Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Boston.