Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(1), 30-37
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.101006

On Finite Groups of $\mathcal{SSH}$-Subgroups

Jianquan Liang

Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: 934819017@qq.com

Received: Dec. 20^{th}, 2019; accepted: Jan. 10^{th}, 2020; published: Jan. 17^{th}, 2020

Abstract

Let G be a finite group. A subgroup H of G is s-permutable in G if H permutes with every Sylow subgroup of G. A subgroup H of G is called an $\mathcal{SSH}$-subgroup in G if G has an s-permutable subgroup K such that $H^{sG} = HK$ and $H^g \cap N_K(H) \leq H$, for all $g \in G$, where H^{sG} is the intersection of all s-permutable subgroups of G containing H. This article studies the structure of finite groups with $\mathcal{SSH}$-subgroup which is prime power order. Some characterizations of a finite group as a p-nilpotent group are given.

Keywords

$\mathcal{SSH}$-Subgroups, p-Nilpotent Groups, *Sylow* p-Subgroups

某些子群为 $\mathcal{SSH}$-子群的有限群

梁坚全

广西大学，广西 南宁
Email: 934819017@qq.com

收稿日期：2019年12月20日；录用日期：2020年1月10日；发布日期：2020年1月17日

文章引用: 梁坚全. 某些子群为 $\mathcal{SSH}$-子群的有限群[J]. 理论数学, 2020, 10(1): 30-37.
DOI: 10.12677/pm.2020.101006

摘 要

设 H 是群 G 的一个子群，如果存在 G 的一个 s-置换子群 K，使得 $H^{sG} = HK$ 并且对任意 $g \in G$ 都有 $H^g \cap N_K(H) \leq H$ 成立，则称 H 为 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群。其中 H^{sG} 是 G 的包含着 H 的最小的 s-置换子群。文章研究了具有素数幂阶 $\mathcal{SSH}$-子群的有限群的结构，给出了有限群为 p-幂零群的一些刻画条件。

关键词

$\mathcal{SSH}$-子群，p-幂零群，$Sylow$ p-子群

1. 引言

本文所讨论的群都为有限群。U 是所有超可解群类，$Z_U(G)$ 是 G 的主因子是素数阶正规子群的乘积。设 E 是 G 的一个正规子群，G 的在 E 中的主因子是循环的，则称 G 的一个正规子群 E 为超循环嵌入的。若 G/L 是超可解群，则 G 是超可解当且仅当 L 在 G 中是超循环嵌入的。

子群的 s-置换性对群的结构有着极其重要的影响，吸引了许多群论工作者从不同的角度来推广子群的 s-置换性。早在2000年，国外学者Bianchi在文献 [1]引入了 $\mathcal{H}$- 子群的概念，设 H 是群 G 的一个子群，如果对群 G 的每个元素 g 都有 $H^g \cap N_K(H) \leq H$ 成立，则称 H 为 G 的一个 $\mathcal{H}$-子群。在2012年，Asaad 结合 c- 正规子群和 $\mathcal{H}$- 子群两个概念，在文献 [2]中引入了弱 $\mathcal{H}$-子群，即设 H 是群 G 的一个子群，若存在 G 的一个正规子群 K 使得 $G = HK$ 并且 $H \cap K$ 是 G 的 $\mathcal{H}$-子群，则称 H 是 G 的一个弱 $\mathcal{H}$-子群。接着在2016年，Ramadan 和 Asaad 在文献 [3]给出了弱 $\mathcal{H}$-嵌入子群的概念，即设 H 是群 G 的一个子群，如果存在 G 的一个正规子群 K 使得 $H^G = HK$ 并且 $H \cap K$是 G 的 $\mathcal{H}$-子群，则称 H 是 G 的一个弱 $\mathcal{H}$-嵌入子群。另外在2012年，国内学者魏先彪和郭秀云在文献 [4]给出了 $\mathcal{HC}$-子群的概念，即设 H 是群 G 的一个子群，存在 G 的一个正规子群 K 使得 $G = HK$ 且对任意 $g \in G$，$H^g \cap N_K(H) \leq H$ 都成立，则称 H 是 G 的一个 $\mathcal{HC}$-子群。紧接着在2016年，Ramadan 和 Asaad 在文献 [5]发展了 $\mathcal{HC}$-子群的概念得到弱 $\mathcal{HC}$-嵌入子群的概念，即设 H 是群 G 的一个子群，存在 G 的一个正规子群 K 使得 $H^G = HK$ 且对任意 $g \in G$，$H^g \cap N_K(H) \leq H$ 都成立，则称 H 是 G 的一个弱 $\mathcal{HC}$-嵌入子群。

接着在2018年T. M. AI-Gafri 和 S. K. Nauman 在文献 [6]引入了 $\mathcal{SSH}$-子群的概念。

定义1.1 设 H 是群 G 的一个子群，如果存在 G 的一个 s-置换子群 K，使得 $H^{sG} = HK$，并且对任意 $g \in G$，$H^g \cap N_K(H) \le H$ 都成立，则称 H 为 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，其中 H^{sG} 是 G 的包含着 H 的最小的 s-置换子群。

T. M. AI-Gafri 和 S. K. Nauman 研究了 *Sylow*-子群的极大子群为 $\mathcal{SSH}$-子群对群结构的影响，获得了以下几个成果。

定理1.1 设 p 为整除群 G 的阶的最小素因子，P 是群 G 的一个 *Sylow* p-子群，则 G 是 p-幂零群当且仅当 P 的每个极大子群都是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群。

定理1.2 令 N 是 G 的一个正规子群，使得 G/N 是超可解群，若 N 的非循环 *Sylow* p-子群的极大子群是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，则 G 是超可解群。

本文通过假设某类子群具有素数幂阶 $\mathcal{SSH}$-子群的有限群的结构，给出有限群 p-幂零群的一些新的一些刻画条件，获得一些有意义的结果。

2. 预备知识

引理2.1 ([6]，引理2.4) 设 H 和 K 为 G 的子群，H 是 G 的一个 $\mathcal{SSH}$-子群，

1) 若 $H \le K$ ，则 H 也是 K 的 $\mathcal{SSH}$-子群；

2) 若 N 为 G 的正规子群，且 $N \le H$，那么 H 是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群当且仅当 H/N 是 G/N 的 $\mathcal{SSH}$-子群；

3) 若 H 是 G 的一个 p-子群， N 是 G 的一个 p'-子群，那么 HN 是 G/N 的 $\mathcal{SSH}$-子群，且 HN/N 是 G/N 的 $\mathcal{SSH}$-子群。

引理2.2 ([7]，引理2.1) 设 H 为 G 的 $\mathcal{H}$-子群，若 H 为 G 的次正规子群，则 H 正规于 G。

引理2.3 ([6]，引理2.2) 设 H 和 K 是 G 的子群，且 $H \le K$， H 是 G 的 s-置换子群，则 H^{sG} 是 G 的 s-置换子群且 $H^{sG} \le H^G$。

引理2.4 ([6]，引理2.1) 设 H 是 G 的 s-置换子群，若对于某素数 p， H 是 G 的一个 p-群，则 $O^p(G) \le N_G(H)$。

引理2.5 ([8]，引理3.12) 设 p 为整除 G 的阶的最小素因子，P 是 G 的一个 *Sylow* p-子群。如果 $|P| \le p^2$，且 G 与 A_4 无关，则 G 为 p-幂零群。

引理2.6 ([9]，引理7.2.2) 设 p 为整除 G 的阶的最小素因子，P 是群 G 的一个 *Sylow* p-子群且为循环群，则 G 为 p-幂零群。

引理2.7 ([10]，定理8.3.1) 令 p 是奇素数并整除 $|G|$，P 是 G 的 *Sylow* p-子群。则 G 是 p-幂零群当且仅当 $N_G(Z(J(P)))$ 是 p-幂零群，其中 $J(P)$ 是 P 的 *Thompson* 子群。

引理2.8 ([6]，定理3.1) 令 P 是 G 的 *Sylow* p-子群，则 G 是 p-幂零群当且仅当 $N_G(P)$ 是 p-幂零群，且 P 的每个极大子群都是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群。

引理2.9 ([11]，引理3.3) 若 G 是 p-超可解群且 $O_{p'}(G) = 1$，则 G 是超可解群。

引理2.10 ([12]，引理2.6) 令 P 是 G 的一个非平凡正规 p-子群，若 P 中存在子群 D，满足 $1 < |D| < |P|$，使得 P 中 $|D|$ 阶或4阶(若 $|D| = 2$)子群为 G 的 $\mathcal{H}$-子群，则 $P \le Z_U(G)$。

引理2.11 ([6]，定理3.5) 令 p 是整除 G 的阶的最小素因子，并且 P 是 G 的一个 *Sylow* p-子群。则 G 是 p-幂零群当且仅当 P 的每个 p 阶或4阶(若 $p = 2$)循环子群是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群。

引理2.12 令 P 是 G 的一个非平凡正规 p-子群，若 P 的每个极大子群为 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，则 $P \leq Z_U(G)$。

证明 若 $\Phi(P) \neq 1$，则考虑 $G/\Phi(P)$，明显 $G/\Phi(P)$ 满足假设，故 $P/\Phi(P) \leq Z_U(G/\Phi(P))$，由([12]，定理1.7.19)有 $P \leq Z_U(G)$。若 $\Phi(P) = 1$，则 P 是交换群。取 N 为 G 的极小正规子群且 $N \leq P$，则 G/N 满足假设条件，故 $P/N \leq Z_U(G/N)$。若存在另一个 G 的正规子群 N_1，则 $P/N_1 \leq Z_U(G/N_1)$，明显 NN_1/N_1 是 G/N_1 的极小正规子群。因此 $|N| = p$，故 $P \leq Z_U(G)$。故 N 是唯一的。取 L 是 P 的一个极大子群且 L 不包含着 N，则有 $P = LN$，明显 L 是 G 的一个 $\mathcal{SSH}$-子群，则存在 G 的一个 s-置换子群 K，使得 $L^{sG} = LK$，并且对任意 $g \in G$，$L^g \cap N_K(L) \leq L$ 都成立。因此对任意 $g \in G$，$L^g \cap N_K(L) \cap N \leq L \cap N$，因为 K 是 G 的 s-置换子群，则 $O^p(G) \leq N_G(K)$，故 K 正规于 G。故 $L^g \cap N_K(L) \cap N = L^g \cap N \cap K = L^g \cap N$，所以对任意 $g \in G$，$L^g \cap N^g = L^g \cap N^g \cap K = L^g \cap N^g \cap N_K(L) \leq L \cap N$。因此 $L \cap N$ 正规于 G。由 N 的极小性知 $L \cap N = 1$，故 $|N| = p$，因此 $P \leq Z_U(G)$。

引理2.13 令 P 是 G 的一个非平凡正规 p-子群，若 p 的每个 p 阶或4阶(若 $p = 2$)子群是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，则 $P \leq Z_U(G)$。

证明 若 $p = 2$，令 Q 是 G 的 $Sylow$ q-子群，且 $q \neq p$。明显有 $M = PQ$ 且 $M \leq G$，由2.1(1)和引理2.14，M 是 p-幂零群，因此 $M = P \times Q$，故 $|G/C_G(P)|$ 是2的方幂，并且由([12]，Appendix C 定理6.3)有 $P \leq Z_\infty(G)$，又由([12]，引理1.7.1)有 $Z_\infty(G) \leq Z_U(G)$，进而有 $P \leq Z_U(G)$。

若 $p > 2$，设 N 是 G 的极小正规子群，令 H 是 P 的 p 阶子群。由假设条件，H 是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，即存在 G 的一个 s-置换子群 K，使得 $H^{sG} = HK$，并且对任意 $g \in G$，$H^g \cap N_K(H) \leq H$ 都成立。因此对任意 $g \in G$，$H^g \cap N_K(H) \cap N \leq H \cap N$，因为 K 是 G 的 s-置换子群，则 $O^p(G) \leq N_G(K)$，故 K 正规于 G。故 $H^g \cap N_K(H) \cap N = H^g \cap N \cap K = H^g \cap N$，所以对任意 $g \in G$，$H^g \cap N^g = H^g \cap N^g \cap K = H^g \cap N^g \cap N_K(H) \leq H \cap N$。因此 $H \cap N$ 正规于 G。由 N 的极小性知 $H \cap N = 1$，故 $|N| = p$，因此 $P \leq Z_U(G)$。

引理2.14 令 P 是 G 的一个非平凡正规 p-子群，若 P 中存在子群 D，满足 $1 < |D| < |P|$，使得 P 中 $|D|$ 阶或4阶(若 $|D| = 2$)子群为 G 的 $\mathcal{SSH}$- 子群，则 $P \leq Z_U(G)$。

证明 若 P 的每个 $|D|$ 阶或4阶(若 $|D| = 2$)子群是 G 的一个 $\mathcal{H}$-子群，则由引理2.10有 $P \leq Z_U(G)$。故假设存在 P 的满足 $|H| = |D|$ 的子群 H，使得 H 不是 G 的 $\mathcal{H}$-子群，由假设条件，H 是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，则存在 G 的一个 s-置换子群 K，使得 $H^{sG} = HK$，并且对任意 $g \in G$，$H^g \cap N_K(H) \leq H$ 都成立。取 G 的一个 s-正规子群 M，使得 $K \leq M$，并且 $|G : M| = p$，明显 $P \cap M$ 是 P 的极大子群。若 $|P : D| = p$，则由引理2.11得 $P \leq Z_U(G)$。故假设 $|P : D| > p$，则 $P \cap M$ 的每个 $|D|$ 阶或4阶(若 $|D| = 2$)子群都是 G 的一个 $\mathcal{SSH}$-子群。由归纳假设， $P \cap M \leq Z_U(G)$，因为 $|P/P \cap M| = p$，故可推出 $P \leq Z_U(G)$。

3. 主要结果

定理3.1 设 p 是群 G 的阶的最小素因子。P 是 G 的一个 $Sylow$ p-子群，如果 G 与 A_4 无关，且 P 中 p^2 阶子群为 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，则 G 为 p-幂零群。

证明 假设定理不真，并设 G 是为极小阶反例，则由引理2.5知，$|P| \geq p^3$。设 $M < G$ 且 $p \mid |M|$，M_p 为 M 的一个 $Sylow$ 子群。若 $|M_p|p^2$，由引理2.5，M 为 p-幂零群。若 $|M_p| > p^2$，由

归纳假设及引理2.1(1)得，M 为 p-幂零群。故可以假设 G 是极小非 p-幂零群，由([13], Satz 5.4, p. 434)得到 $G = PQ$，其中 Q 为循环群，$Exp\ P = p$ 或 $Exp\ P \leq 4$ (当 $p = 2$ 时)，$P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子，其中 $Q \in Syl_q(G)$ 且 $q \neq p$。

在 $P/\Phi(P)$ 中取一个元素 x，则 $|\langle x\rangle| = p$ 或 $|\langle x\rangle| = 4$。

若 $|\langle x\rangle| = 4$。由假设条件，$|\langle x\rangle|$ 为 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，则存在一个 s-置换子群 K，使得 $\langle x\rangle^{sG} = \langle x\rangle K$，且 $\langle x\rangle^g \cap N_K(\langle x\rangle) \leq \langle x\rangle, \forall g \in G$。当 $K = G$ 时，$\langle x\rangle$ 为 G 的 $\mathcal{H}$-子群，且 $\langle x\rangle\ G$，由引理2.2，$\langle x\rangle G$，则有 $\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)G/\Phi(P)$，又因为 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的主因子，因而有 $\langle x\rangle\Phi(P) = P$，则 $P = \langle x\rangle\Phi(P) = \langle x\rangle$，由引理2.6知，$G$ 是幂零群，矛盾。

设 $|\langle x\rangle| = p$，由于 P 不是循环群，故可取 P 中元素 a 使得 $a \notin \langle x\rangle$，令 $B = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$，则 B 是一个 p^2 阶子群。由假设条件，B 是 G 的一个 $\mathcal{SSH}$-子群，故存在一个 s-置换子群 K，使得 $B^{sG} = BK$，且 $B \cap N_K(B) \leq B$，当 $K = G$，B 为 G 的$\mathcal{H}$-子群，且 BG，由引理2.2有 BG，于是有 $B\Phi(P)/\Phi(P)G/\Phi(P)$。由于 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的主因子，因而有 $B\Phi(P) = \Phi(P)$ 或 $B\Phi(P) = P$。若 $B\Phi(P) = \Phi(P)$，则 $B \leq \Phi(P)$，与 $\langle x\rangle\Phi(P)$，矛盾。若 $B\Phi(P) = P$，则 $P = B\Phi(P) = B = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$，与 $|P| \geq p^3$ 矛盾。当 $K < G$ 时，记 $H = \langle x\rangle$，若 $O^p(G)G$，则由 G 的极小性，$O^p(G)$ 是幂零群，故 $Q\ char\ O^p(G)G$，因此 QG，矛盾。因此 $O^p(G) = G$，由 G 的极小性和引理2.3 可知 $H^{sG} \leq H^G \leq P$，且 H^{sG} 是 G 的 s-置换子群，假设 $H^{sG}P$，则 $H^{sG}QG$ 且由 G 的极小性可推出，$H^{sG}Q$ 是幂零群，故 $Q \leq C_G(H^{sG})$，对于 $\forall Q \in Syl_q(G)$，故有 $O^p(G) \leq C_G(H^{sG})$ 且可推出 HG。因此 $H = \langle x\rangle_p G$。又因为 p 是群 G 的最小素因子，$H \in Syl_p(G)$ 且 H 循环，故 G 为 p-幂零群，矛盾。这意味着 $P = HK$，假设 $K = P$，注意到 $H^g \cap N_G(H) = H^g \cap P \cap N_G(H) = H^g \cap N_K(H) \leq H, \forall g \in G$，则 H 是 G 的$\mathcal{H}$-子群。由引理2.2知，HG，因此 $H = \langle x\rangle_p G$。又因为 p 是群 G 的最小素因子，$H \in Syl_p(G)$ 且 H 循环，故 G 为 p-幂零群，矛盾。意味着 KP，由引理2.4得到，$O^p(G) \leq N_G(K)$，故 KG。令 $N := \Phi(P)$，若 $KN = P$，则 $K = P$，矛盾。因此 KNP，显然 $KN/NG/N$，且由 G 的极小性，P/N 是 G/N 的极小正规子群，故 $KN/N = 1$。这意味着 $K \leq N$。因此 $P = HN = H$ 是循环群。故 G 是 p-幂零群，矛盾。从而定理得证。

定理3.2 设 p 是群 G 的阶的奇素因子。假设 L 是 G 的一个正规子群，使得 G/L 是 p-幂零群且 P 是 L 的 $Sylow\ p$-子群。若存在 P 的子群 D，满足 $1 < |D| < |P|$，使得 P 的每个阶为 $|H| = |D|$ 的子群 H 是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，且 $N_G(P)$ 是 p-幂零群，则 G 是 p-幂零群。

证明 假设定理不真，并设 G 为极小阶反例。

(1) $O_{p'}(G) = 1$。

记 $T = O_{p'}(G) = 1$，若 $T > 1$，考虑 G/T，明显有 $(G/T)/(LT/T) \cong G/LT$ 是 p-幂零群。令 HT/T 是 PT/T 的 $|D|$ 阶子群，其中，H 是 P 的 $|D|$ 阶子群，因为 H 是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，故由引理2.1(3)有 HT/T 是 G/T 的 $\mathcal{SSH}$-子群。再因 $N_G(P)$ 是 p-幂零群，$N_{G/T}(PT/T) = N_G(P)T/T$ 是 p-幂零群。故 G/T 满足假设条件，由 G 的极小性知，G/T 是 p-幂零群，矛盾。

(2)令 K 为 G 的一个真子群，使得 $P \leq K$，则 K 是 p-幂零群。

由引理2.1(1)知，P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 是 K 的 $\mathcal{SSH}$-子群，因 $N_K(P) \leq N_G(P)$ 且 $N_G(P)$ 是 p-幂零群，故 $N_K(P)$ 是 p-幂零群。故 K 满足假设条件，由 G 的极小性知 K 是 p-幂零群。

(3) $L = G$。

若 $L < G$，则由(2)知 L 是 p-幂零群。令 T 为 L 的正规 p-补，则 $T\ char\ LG$，故 TG 且根

DOI: 10.12677/pm.2020.101006

据(1)有 $T=1$，进而推出 $L=P$ 且 $G=N_G(P)$ 是 p-幂零群，矛盾。

(4) $O_p(G)\neq 1$。

考虑群 $Z(J(P))$，其中 $J(P)$ 是 P 的 $Thompson$ 子群，若 $N_G(Z(J(P)))<G$，由(2)得到 $N_G(Z(J(P)))$ 是 p-幂零群。由引理2.7知，G 是 p-幂零群，矛盾。因此 $N_G(Z(J(P)))=G$ 且有 $1<Z(J(P))\leq O_p(G)<P$。

(5) $G/O_p(G)$ 是 p-幂零群，特别有$G/O_p(G)$ 是 p-超可解群。

令 $\bar{G}=G/O_p(G)$，$\bar{P}=P/O_p(G)$，$\bar{K}=Z(J(\bar{P}))$，且 $G_1/O_p(G)=N_{\bar{G}}(Z(J(\bar{P})))$。因为 $O_p(\bar{G})=1$，故有 $N_{\bar{G}}(Z(J(\bar{P})))<\bar{G}$，因此 $G_1<G$。由(2)得 G_1 是 p-幂零群，则 $N_{\bar{G}}(Z(J(\bar{P})))$ 是 p-幂零群。由引理2.7知，$\bar{G}$ 是 p-幂零群。

(6) $G=PQ$，其中 Q 是 G 的一个 $Sylow$ q-子群。

由(5)得到，G 是 p 可解的，则存在 G 的 $Sylow$ q-子群 Q 使得 PQ 是 G 的子群，对于任意 $q\in\pi(G), q\neq p$ ([10]，定理6.3.5)。若 $PQ<G$，由(2) PQ 是 p-幂零群。故有 $Q\leq C_G(O_p(G))\leq O_p(G)$ ([14]，定理9.3.1)，矛盾。因此 $PQ=G$。

(7) $|P|>p|D|$。

由引理2.8即可推出。

(8) $O_p(G)$ 是 P 的极大子群。

由(5)我们假设 $G/O_p(G)$ 有一正规 $Hall$ p'-子群 $T/O_p(G)$。明显 T 是 G 的正规子群，且 G/T 是一个 p-群，则存在 G 的一个正规子群 M，使得 $T\leq M$ 且 $|G:M|=p$，且易得 $P\cap M$ 是 P 的极大子群，而且是 M 的 $Sylow$ p-子群。若 $N_G(P\cap M)<G$，则由(2)知 $N_G(P\cap M)$ 是 p-幂零群。同理 $N_M(P\cap M)$ 是 p-幂零群。由(7) 和引理2.1(1)可得，$P\cap M$ 的每个 $|D|$ 阶子群 H 是 M 的 $\mathcal{SSH}$-子群，故 M 满足定理假设，由 G 的极小性得 M 是 p-幂零群，则 G 是 p-幂零群，矛盾。这意味着 $P\cap M$ 是 G 的一个正规 p-子群。因为 $O_p(G)<P$，故 $P\cap M=O_p(G)$ 且 $O_p(G)$ 是 P 的极大子群。

(9) $O_p(G)$ 是超循环嵌入于 G。

由(7)和(8)有 $|D|<|O_p(G)|$，由定理假设，$O_p(G)$ 的每个 $|D|$ 阶子群 H 是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群。由引理2.14即可得(9)。

(10) G 是超可解群。

因 $G/O_p(G)$ 是 p-超可解群，且 $O_p(G)$ 是超循环嵌入于 G，故 G 是 p-超可解群。由引理2.9和(1)得，G 是超可解群。

(11)最终矛盾。

因为 G 有超可解型 $Sylow$ 塔，故由(6)得 P 是正规于 G。因此由假设有 $G=N_G(P)$ 是 p-幂零群，矛盾。定理得证。

定理3.3 令 p 为整除 $|G|$ 的素因子，假设 G 有一个正规子群 L，使得 G/L 是 p-幂零群且 P 是 L 的 $Sylow$ 子群。若存在 P 的子群 D，满足 $1<|D|<|P|$，使得 P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 为 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群且 $N_G(H)$ 是 p-幂零群，则 G 是 p-幂零群。

证明 考虑以下两种情况。

情况1： $L=G$。

假设定理不真，设 G 为极小阶反例，类似定理3.2的(1)，(2)中的讨论有

(1) $O_{p'}(G)=1$。

(2) 令 K 为 G 的真子群，使得 $P\le K$，则 K 是 p-幂零群。

(3) P 是 G 的一个正规子群。

若 $N_G(P)<G$，则由(2)有 $N_G(P)$ 是 p-幂零群，由定理3.2有 G 是 p-幂零群，矛盾。故 P 是正规于 G。

(4) P 是超循环嵌入于 G。

由假设 P 的每个 $|D|$ 阶子群 H 是 G 的 $\mathcal{SSH}$-子群，则由引理2.14， P 是超循环嵌入于 G。

(5) 令 N 是 G 的极小正规子群，则 $|N|<|D|<|P|$。

由(3)知 G 是 p-可解。则由(1)得到 N 是一个 p-子群，故 $N\le P$。由(4)可知 $|N|=p$，若 $|N|=|D|$，则由假设条件 $G=N_G(N)$ 是 p-幂零群，矛盾，故 $|N|<|D|$。

(6) 最终矛盾。

由引理2.1(2)知 G/N 满足定理假设，故由 G 的极小性知 G/N 是 p-幂零群。因为所有 p-幂零群是一个饱和群系，因此 N 是 G 的唯一极小正规子群且 $\Phi(G)=1$。故 $F(G)=N$，由(1)和(3)有 $F(G)=O_p(G)=P$，故 $N=P$，与(5)矛盾。

情况2： $L<G$。

由引理2.1(1)有每个 P 的 $|D|$ 阶子群 H 是 L 的 $\mathcal{SSH}$-子群，明显 $N_L(H)$ 是 p-幂零群。由情况1，L 是 p-幂零群，令 $L_{p'}$ 是 L 的 $Hall\ p'$-子群，则 $L_{p'}G$。若 $L_{p'}\neq 1$，则由引理2.1(3)知 $G/L_{p'}$ 满足定理假设，故 $G/L_{p'}$ 是 p-幂零群，则 G 是 p-幂零群。因此假设 $L_{p'}=1$，则 $L=P$。因为 G/P 是 p- 幂零群，故令 V/P 是 G/P 的正规 $Hall\ p'$-子群，由 *Schur-Zassenhaus* 定理，V 有一个 $Hall\ p'$-子群 $V_{p'}$。由引理2.1(1)有 P 的每个 $|D|$ 阶子群是 V 的 $\mathcal{SSH}$-子群。明显 $N_V(H)$ 是 p-幂零群。由情况1有 $V=PV_{p'}$ 是 p-幂零群。故 $V_{p'}$ 在 V 中正规，明显 $V_{p'}$ 也是 G 的一个正规 p-补，故 G 是 p-幂零群。定理得证。

参考文献

[1] Bianchi, M., Mauri, A.G.B., Herzog, M. and Verardi, L. (2000) On Finite Solvable Groups in Which Normality Is a Transitive Relation. *Journal of Group Theory*, **3**, 147-156. https://doi.org/10.1515/jgth.2000.012

[2] Asaad, M., Heliel, A.A. and Al-Mosa Al-Shomrani, M.M. (2012) On Weakly $\mathcal{H}$-Subgroups of Finite Groups. *Communications in Algebra*, **40**, 3540-3550. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.591218

[3] Asaad, M. and Ramadan, M. (2016) On Weakly $\mathcal{H}$-Embedded Subgroups of Finite Groups. *Communications in Algebra*, **44**, 4564-4574. https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1130139

[4] Wei, X. and Guo, X. (2012) On $\mathcal{HC}$-Subgroups and the Structure of Finite Groups. *Communications in Algebra*, **40**, 3245-3256. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.565846

[5] Asaad, M. and Ramadan, M. (2016) On Weakly $\mathcal{HC}$-Embedded Subgroups of Finite Groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, **15**, Article ID: 1650077.

https://doi.org/10.1142/S0219498816500778

[6] Al-Gafri, T.M. and Nauman, S.K. (2018) On $\mathcal{SSH}$-Subgroups of Finite Groups. *Annali dell' Universita di Ferrara*, **64**, 209-225. https://doi.org/10.1007/s11565-018-0299-1

[7] Ballester-Bolinches, A. and Esteban-Romero, R. (2003) On Finite $\mathcal{T}$-Groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **75**, 181-191. https://doi.org/10.1017/S1446788700003712

[8] Guo, X.Y. and Shum, K.P. (2003) Cover-Avoidance Properties and the Structure of Finite Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **181**, 297-308. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(02)00327-4

[9] Kurzweil, H. and Stellmacher, B. (2004) The Theory of Finite Groups An Introduction. Springer-Universitext, New York-Berlin-Heidelberg-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo. https://doi.org/10.1007/b97433

[10] Gorenstein, D. (1980) Finite Groups. Chelsea, New York.

[11] Guo, W., Shum, K.P. and Skiba, A.N. (2004) G-Covering Systems of Subgroups for Classes of p-Supersoluble and p-Nilpotent Finite Groups. *Siberian Mathematical Journal*, **45**, 433-442. https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000028608.59920.af

[12] Weinstein, M. (1982) Between Nilpotent and Solvable. Polygonal Publishing House, Passaic, NJ.

[13] Huppert, B. (1967) Endliche Gruppen I. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-64981-3

[14] Robinson, D.J.S. (1993) A Course in the Theory of Groups. Spring-Verlag, New York-Berlin.