

Proving Four-Dimensional Space Algorithms of Orthogonal Four-Sphere Six-Plane and Four-Dimensional Verticality

—Application of Pythagorean Theorem of Four Dimensional Volume (Formula 7)

Guowei Cai

Shanghai Huimei Property Co., Ltd., Shanghai
Email: yiersan@139.com

Received: Dec. 14th, 2019; accepted: Jan. 1st, 2020; published: Jan. 9th, 2020

Abstract

In Euclidean 3-D coordinate system, the orthogonal 4-sphere space is proved to be four-dimensional mutually perpendicular space by means of 6 planes and rotation of the orthogonal 4-sphere space.

Keywords

Volume Pythagorean Theorem, Orthocentric Tetrahedron, Four Sphere Orthogonal, Four Dimensional Space, Supersymmetric, Proof, Algorithm

证明正交4球6平面及四维垂直的四维空间算法

——四维体积勾股定理的应用(公式七)

蔡国伟

上海汇美房产有限公司, 上海
Email: yiersan@139.com

收稿日期: 2019年12月14日; 录用日期: 2020年1月1日; 发布日期: 2020年1月9日

摘要

在欧氏3D坐标系中, 通过正交4球空间的6平面及其旋转, 证明正交4球空间即为四维相互垂直的四维空间。

关键词

体积勾股定理, 垂心四面体, 4球正交, 四维空间, 超对称, 证明, 算法

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

四维空间[1]的四维垂直, 一直被认为生活在 3D 空间是无法可视的超平面[2]。是否能通过对 4 球正交的空间[3]的旋转, 证明其即为 4 维相互垂直的四维空间的呢?

2. 证明正交 4 球空间即为 4 维相互垂直的四维空间

2.1. 点标符号及其坐标、平面符号约定

2.1.1. 正交 4 球心间 1 至 4 维 15 个垂心点[4]、8 球面交点[4]点符号及坐标均与文[4]相同, 即

- 设 4 个 1 维垂心(4 正交球球心)为 A, B, C, D 半径依次为 a, b, c, d (坐标同文[4]);
- 设 6 个 2 维垂心为: $H_{AB}, H_{AC}, H_{AD}, H_{BC}, H_{BD}, H_{CD}$ (坐标同文[4]);
- 设 4 个 3 维垂心为: $H_{ABC}, H_{ABD}, H_{ACD}, H_{BCD}$ (坐标同文[4]);
- 设 1 个 4 维垂心为: H (坐标同文[4]);
- 设 4 个内凹 3 球面交点为: A_-, B_-, C_-, D_- (坐标同文[4]);
- 设 4 个外凸 3 球面交点为: A_+, B_+, C_+, D_+ (坐标同文[4])。

2.1.2. 设垂直 6 棱, 且与对棱共面的 6 个平面符号

- 设与 AB 棱垂直, 且与对棱 CD 棱共面的平面符号为: Π_{CD} ;
- 设与 AC 棱垂直, 且与对棱 BD 棱共面的平面符号为: Π_{BD} ;
- 设与 AD 棱垂直, 且与对棱 BC 棱共面的平面符号为: Π_{BC} ;
- 设与 BC 棱垂直, 且与对棱 AD 棱共面的平面符号为: Π_{AD} ;
- 设与 BD 棱垂直, 且与对棱 AC 棱共面的平面符号为: Π_{AC} ;
- 设与 CD 棱垂直, 且与对棱 AB 棱共面的平面符号为: Π_{AB} 。

2.2. 证明正交 4 球心间 15 个垂心点[4]、8 球面交点[4]及其 46 线为与棱垂直的 6 平面及其方程

文[5]得知, 正交 4 球心间构成了 4 态垂心四面体, 依据其对棱垂直的性质[6]:

2.2.1. 证明与 AB 棱垂直的 Π_{CD} 平面及其平面方程

根据垂心四面体(4 态)以及对边 \perp 的性质,

证明: Π_{CD} 平面与 AB 棱垂直, 10 点 11 线共面的 Π_{CD} 平面。易得:

$$AB \perp CD, AB \perp CD_-, AB \perp CD_+, AB \perp CH_{ABC}, AB \perp CH, AB \perp CH_{AB}$$

$$AB \perp DC_-, AB \perp DC_+, AB \perp DH_{ABD}, AB \perp DH, AB \perp DH_{AB}$$

前 6 线右侧共点于 C , 后 5 线与首线右侧共点于 D ; 因此该平面 $\Pi_{CD} \in$ 右侧 11 线 10 点, 该平面与左侧 AB 棱 \perp , 垂足落在左侧 AB 棱的 H_{AB} 上。因此 10 点 $(C, D, D_-, D_+, H_{ABC}, H, C_-, C_+, H_{ABD}, H_{AB})$ 共面,

任取 3 点坐标可得与 CD 棱共面的 Π_{CD} 平面方程为: (例: 取 C, D, H 3 点坐标)

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-c \\ bct-0 & act-0 & abt-c \\ \frac{-ab^2c^2t}{v}-0 & \frac{-a^2bc^2t}{v}-0 & \frac{-a^2b^2ct}{v}-c \end{vmatrix} = ax-by$$

2.2.2. 同理可证明与其它 5 棱垂直的 5 个平面及其平面方程为

- Π_{BD} 平面与 AC 棱垂直, 且 $BD, BD_-, BD_+, BH_{ACD}, BH_{AC}, BH, DB_-, DB_+, DH_{ABC}, DH, DH_{AC}$ 11 线均与 AC 棱垂直。与 BD 棱共面平面方程为: 任取 3 点坐标可得 Π_{BD} 平面方程为: (例: 取 B, D, H 3 点坐标)

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-b & z-0 \\ bct-0 & act-b & abt-0 \\ \frac{-ab^2c^2t}{v}-0 & \frac{-a^2bc^2t}{v}-b & \frac{-a^2b^2ct}{v}-0 \end{vmatrix} = ax-cz$$

- Π_{AD} 平面与 BC 棱垂直, 且 $AD, AD_-, AD_+, AH_{ABC}, AH_{BC}, AH, DA_-, DA_+, DH_{BCD}, DH, DH_{BC}$ 11 线均与 BC 棱垂直。与 AD 棱共面平面方程为: 任取 3 点坐标可得 Π_{AD} 平面方程为: (例: 取 A, D, H 3 点坐标)

$$0 = \begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ bct-a & act-0 & abt-0 \\ \frac{-ab^2c^2t}{v}-a & \frac{-a^2bc^2t}{v}-0 & \frac{-a^2b^2ct}{v}-0 \end{vmatrix} = by-cz$$

- Π_{BC} 平面与 AD 棱垂直, 且 $BC, BC_-, BC_+, BH_{ABD}, BH_{AD}, BH, CB_-, CB_+, CH_{ACD}, CH, CH_{AD}$ 11 线均与 AD 棱垂直。与 BC 棱共面平面方程为: 任取 3 点坐标可得 Π_{BC} 平面方程为: (例: 取 B, C, H 3 点坐标)

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-b & z-0 \\ 0-0 & 0-b & c-0 \\ \frac{-ab^2c^2t}{v}-0 & \frac{-a^2bc^2t}{v}-b & \frac{-a^2b^2ct}{v}-0 \end{vmatrix} = \left[\frac{a}{d}(v+v_4) + v_1 \right] x + v_2 y + v_3 z - abcd$$

这里: $v_1 = bcd, v_2 = acd, v_3 = abd, v_4 = abc$ 。

- Π_{AC} 平面与 BD 棱垂直, 且 $AC, AC_-, AC_+, AH_{ABD}, AH_{BD}, AH, CA_-, CA_+, CH_{BCD}, CH, CH_{BD}$ 11 线均与 BD 棱垂直。与 AC 共面平面方程为: 任取 3 点坐标可得 Π_{AC} 平面方程为: (例: 取 A, C, H 3 点坐标)

$$0 = \begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \\ \frac{-ab^2c^2t}{v}-a & \frac{-a^2bc^2t}{v}-0 & \frac{-a^2b^2ct}{v}-0 \end{vmatrix} = v_1 x + \left[\frac{b}{d}(v+v_4) + v_2 \right] y + v_3 z - abcd$$

这里: $v_1 = bcd, v_2 = acd, v_3 = abd, v_4 = abc$ 。

- Π_{AB} 平面与 CD 棱垂直, 且 $AB, AB_-, AB_+, AH_{ACD}, AH_{CD}, AH, BA_-, BA_+, BH_{BCD}, BH, BH_{CD}$ 11 线均与 CD 棱垂直。与 AB 共面平面方程为: 任取 3 点坐标可得 Π_{AB} 平面方程为: (例: 取 A, B, H 3 点坐标)

$$0 = \begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ \frac{-ab^2c^2t}{v}-a & \frac{-a^2bc^2t}{v}-0 & \frac{-a^2b^2ct}{v}-0 \end{vmatrix} = v_1 x + v_2 y + \left[\frac{c}{d}(v+v_4) + v_3 \right] z - abcd$$

这里： $v_1 = bcd, v_2 = acd, v_3 = abd, v_4 = abc$ 。

2.3. 证明 6 平面，任意 3 平面分别交于 4 垂线，6 平面交于 H 垂心点，且任意 3 平面夹角之和等于 180 度

2.3.1. 上述 6 平面方程中垂心 H 为 6 平面的共点

分析上述一至四维垂心 15 点；以及 8 点球面交点，可归纳为：

- 一维垂心 4 点 A, B, C, D ，交叉存在 6 平面其中的 3 个平面；
- 二维垂心 6 点 $H_{AB}, H_{AC}, H_{AD}, H_{BC}, H_{BD}, H_{CD}$ 为 6 平面中，每平面各占其中一点；
- 三维垂心 4 点 $H_{ABC}, H_{ABD}, H_{ACD}, H_{BCD}$ 交叉存在 6 平面其中的 3 个平面；
- 四维垂心 H 为 6 平面共点；
- 球面内凹与外凸 8 交点，交叉存在 6 平面其中的 3 个平面；
- 任意 3 平面均分别交于 4 垂线。

2.3.2. 上述 6 平面方程间任意 3 平面夹角与棱角相等，其与各面 3 棱垂直的 3 平面夹角之和等于 180 度

因为上述 6 平面均与 6 棱垂直，垂心四面体任意一面 3 棱组成三角形垂直的 3 平面的夹角之和等于棱角和为 180 度。因此 6 平面可以任意组合，其平面夹角和均等于 180 度。

例： $\Pi_{AD}, \Pi_{BD}, \Pi_{CD}$ 3 平面交 D 轴，3 平面夹角之和均为 180 度

$$\Pi_{BD}, \Pi_{CD} \text{ 间夹角为 } \angle\alpha = \angle BAC = \angle A_4 \Rightarrow \cos A_4 = \frac{a^2}{|AB||AC|}$$

$$\Pi_{CD}, \Pi_{AD} \text{ 间夹角为 } \angle\beta = \angle ABC = \angle B_4 \Rightarrow \cos B_4 = \frac{b^2}{|AB||BC|}$$

$$\Pi_{BD}, \Pi_{AD} \text{ 间夹角为 } \angle\gamma = \angle ACB = \angle C_4 \Rightarrow \cos C_4 = \frac{c^2}{|AC||BC|}$$

$$\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \text{ 见(图 1)}$$

这里的： $\cos A_4, \cos B_4, \cos C_4$ 见文[5]。

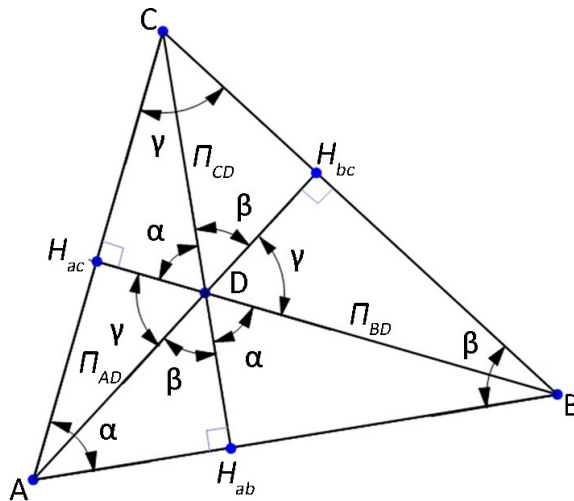


Figure 1. $\Pi_{AD}, \Pi_{BD}, \Pi_{CD}$ the sum of 3 plane intersection D axis and 3 plane angle is 180 degree sketch

图 1. $\Pi_{AD}, \Pi_{BD}, \Pi_{CD}$ 3 平面交 D 轴，3 平面夹角之和均为 180 度示意图

2.4. 证明正交 4 球空间即 4 维垂直的四维空间

根据上述 6 个平面方程, 每个平面围绕其垂直的棱旋转, 即各平面绕其垂直的棱的二维垂心点旋转, 即固定该平面垂直棱 2 球心在欧氏 3D 坐标系的 2 轴线上, 而旋转与棱垂直的平面, 使得该平面另 2 球心点旋转至另一正负轴线上时, 与其对应的 3 球面交点同时旋转至原点 D_- 位置。证明正交 4 球空间即 4 维垂直超对称空间[7]。

2.4.1. 固定 A, B 棱, A, B 2 球心位于 x 轴和 y 轴线上, 绕 AB 棱旋转平面 Π_{CD} , 使得 C, D 2 球心分别落在正负 z 轴线上时, 球面交点 D_+, C_-, C_+ 分别旋转至 D_- 位置上

根据上述 Π_{CD} 平面 10 点共面, 其中包括: $C, D, H_{AB}, C_-, C_+, D_-, D_+$ 这 7 点共面; 7 点坐标见文[4]

- 证明 $\cos \angle CH_{AB}C' = \cos \angle D_-H_{AB}D_+$ 这里坐标: $C'(0, 0, -c)$

$$\text{左侧点间距: } CH_{AB} = H_{AB}C' = \sqrt{c^2 + r_{AB}^2} = \sqrt{c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}}, \quad CC' = 2c$$

$$\text{左侧代入余弦公式: } \cos \angle CH_{AB}C' = \frac{c^2 + r_{AB}^2 + c^2 + r_{AB}^2 - (2c)^2}{2\sqrt{c^2 + r_{AB}^2}\sqrt{c^2 + r_{AB}^2}} = \frac{2a^2b^2}{s_4^2} - 1$$

(这里 $s_4^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$)

$$\text{右侧点间距: } D_-H_{AB} = H_{AB}D_+ = r_{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad D_-D_+ = \frac{2abc}{s_4} = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$$

$$\text{右侧代入余弦公式: } \cos \angle D_-H_{AB}D_+ = \frac{r_{AB}^2 + r_{AB}^2 - \left(\frac{2abc}{s_4}\right)^2}{2r_{AB}r_{AB}} = \frac{2a^2b^2}{s_4^2} - 1$$

(这里 $s_4^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$)

通过旋转 Π_{CD} 平面, 将 C 点从正 z 轴旋转至负轴的同时, D_+ 也同时旋转至 D_- 位置。

证明了 3 球: $A \perp B \perp C$ 。

- 证明 $\cos \angle DH_{AB}D' = \cos \angle D_-H_{AB}C_+$ 这里坐标: $D'(0, 0, d)$

$$\text{左侧点间距: } DH_{AB} = H_{AB}D' = \sqrt{d^2 + r_{AB}^2} = \sqrt{d^2 + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}},$$

$$D'D^2 = (0 - bct)^2 + (0 - act)^2 + (d - abt)^2 = \frac{2d^2(v + v_3)}{v + v_4}$$

(这里 $t = \frac{-d^2}{v + v_4}$, $v = \sqrt{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2}$, $v_3 = abd$, $v_4 = abc$)

$$\text{左侧代入余弦公式: } \cos \angle DH_{AB}D' = \frac{d^2 + r_{AB}^2 + d^2 + r_{AB}^2 - \frac{2d^2(v + v_3)}{v + v_4}}{2\sqrt{d^2 + r_{AB}^2}\sqrt{d^2 + r_{AB}^2}} = 1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{(v + v_4)(v - v_3)}$$

(这里 $v_1 = bcd$, $v_2 = acd$)

$$\text{右侧点间距: } D_-H_{AB} = H_{AB}C_+ = r_{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$D_-C_+^2 = \left[\frac{ab^2c^2d^2}{(v + v_4)(v - v_3)} - 0 \right]^2 + \left[\frac{a^2bc^2d^2}{(v + v_4)(v - v_3)} - 0 \right]^2 + \left[\frac{abcd(v_3 - v_4 - v)}{(v + v_4)(v - v_3)} - 0 \right]^2 = \frac{2a^2b^2c^2d^2}{(v + v_4)(v - v_3)}$$

右侧代入余弦公式：
$$\cos \angle D_{-}H_{AB}C_{+} = \frac{r_{AB}^2 + r_{AB}^2 - \left(\frac{2a^2b^2c^2d^2}{(v+v_4)(v-v_3)} \right)}{2r_{AB}r_{AB}} = 1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{(v+v_4)(v-v_3)}$$

通过旋转 Π_{CD} 平面，将 D 点旋转至正 z 轴 D' 的同时， C_{+} 也同时旋转至 D_{-} 位置。

证明了 4 球： $A \perp B \perp C \perp D$ 。

- 证明 $\cos \angle DH_{AB}D' = \cos \angle D_{-}H_{AB}C_{-}$ 这里坐标： $D'(0,0,-d)$

左侧点间距：
$$DH_{AB} = H_{AB}D' = \sqrt{d^2 + r_{AB}^2} = \sqrt{d^2 + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}},$$

$$D'D^2 = (0 - bct)^2 + (0 - act)^2 + (-d - abt)^2 = \frac{2d^2(v - v_3)}{v + v_4}$$

(这里 $t = \frac{-d^2}{v + v_4}$ ， $v = \sqrt{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2}$ ， $v_3 = abd$ ， $v_4 = abc$)

左侧代入余弦公式：
$$\cos \angle DH_{AB}D' = \frac{d^2 + r_{AB}^2 + d^2 + r_{AB}^2 - \frac{2d^2(v - v_3)}{v + v_4}}{2\sqrt{d^2 + r_{AB}^2}\sqrt{d^2 + r_{AB}^2}} = 1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{(v + v_4)(v + v_3)}$$

(这里 $v_1 = bcd$ ， $v_2 = acd$ ， $v_3 = abd$ ， $v_4 = bcd$)

右侧点间距：
$$D_{-}H_{AB} = H_{AB}C_{-} = r_{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$D_{-}C_{-}^2 = \left[\frac{ab^2c^2d^2}{(v+v_4)(v+v_3)} - 0 \right]^2 + \left[\frac{a^2bc^2d^2}{(v+v_4)(v+v_3)} - 0 \right]^2 + \left[\frac{abcd(v_3+v_4+v)}{(v+v_4)(v+v_3)} - 0 \right]^2$$

$$= \frac{2a^2b^2c^2d^2}{(v+v_4)(v+v_3)}$$

右侧代入余弦公式：
$$\cos \angle D_{-}H_{AB}C_{-} = \frac{r_{AB}^2 + r_{AB}^2 - \left(\frac{2a^2b^2c^2d^2}{(v+v_4)(v+v_3)} \right)}{2r_{AB}r_{AB}} = 1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{(v+v_4)(v+v_3)}。$$

通过旋转 Π_{CD} 平面，将 D 点旋转至正 z 轴 D' 的同时， C_{-} 也同时旋转至 D_{-} 位置。

证明了 4 球： $A \perp B \perp C \perp D$ 。

同理：可得如下 2 组旋转等式：

2.4.2. 固定 A, C 棱， A, C 2 球心位于 x 轴和 z 轴线上，绕 AC 棱旋转平面 Π_{BD} ，使得 B, D 2 球心分别落在正负 y 轴线上时，球面交点 D_{+}, B_{+}, B_{-} 分别旋转至 D_{-} 位置上

根据上述 Π_{BD} 平面 10 点共面，其中包括： $B, D, H_{AC}, B_{-}, B_{+}, D_{-}, D_{+}$ 这 7 点共面；7 点坐标见文[4]

- 可得： $\cos \angle BH_{AC}B' = \cos \angle D_{-}H_{AB}D_{+} = \frac{2a^2c^2}{s_4^2} - 1$ 这里坐标： $B(0,b,0), B'(0,-b,0)$ ；
- 可得： $\cos \angle DH_{AC}D' = \cos \angle D_{-}H_{AB}B_{+} = 1 - \frac{v_1^2 + v_3^2}{(v+v_4)(v-v_2)}$ 这里坐标： $D'(0,b,0)$ ；
- 可得： $\cos \angle DH_{AC}D' = \cos \angle D_{-}H_{AB}B_{-} = 1 - \frac{v_1^2 + v_3^2}{(v+v_4)(v+v_2)}$ 这里坐标： $D'(0,-b,0)$ 。

证明了 4 球： $A \perp B \perp C \perp D$ 。

2.4.3. 固定 B, C 棱, B, C 2 球心位于 y 轴和 z 轴线上, 绕 BC 棱旋转平面 Π_{AD} , 使得 A, D 2 球心分别落在正负 x 轴线上时, 球面交点 D_+, A_+, A_- 分别旋转至 D_- 位置上

根据上述 Π_{AD} 平面 10 点共面, 其中包括: $A, D, H_{BC}, A_-, A_+, D_-, D_+$ 这 7 点共面; 7 点坐标见文[4]

- 可得: $\cos \angle AH_{AC}A' = \cos \angle D_-H_{BC}D_+ = \frac{2b^2c^2}{s_4^2} - 1$ 这里坐标: $A(a, 0, 0), A'(-a, 0, 0)$;
- 可得: $\cos \angle DH_{AC}D' = \cos \angle D_-H_{BC}A_+ = 1 - \frac{v_2^2 + v_3^2}{(v+v_4)(v-v_1)}$ 这里坐标: $D'(a, 0, 0)$;
- 可得: $\cos \angle DH_{AC}D' = \cos \angle D_-H_{BC}A_- = 1 - \frac{v_2^2 + v_3^2}{(v+v_4)(v-v_1)}$ 这里坐标: $D'(-a, 0, 0)$ 。

证明了 4 球: $A \perp B \perp C \perp D$ 。

3. 总结

通过上述固定 2 球心位于 2 轴的棱, 旋转与其垂直的平面, 使得另 2 球心可达另一正负轴线上的同时, 其 3 球面交点同时到达欧氏 3D 坐标的原点, 证明了正交 4 球的 4 维 a, b, c, d 相互垂直; 证明了正交 4 球即为超对称的 4 维空间。

而更简洁的是不用旋转, 从 8 点球面交点为 8 原点, 8 原点均是 3 球面交点与 3 球心连线构成截角(直角四面体), 分别组成 4 组不同的三维正交的垂直关系, 从哲学关系上:

$$\because A \perp B \perp C, A \perp B \perp D, A \perp C \perp D, B \perp C \perp D$$

$$\therefore A \perp B \perp C \perp D$$

直接证明了 4 球正交空间即四维相互垂直的空间。

以此也可以推广证明任意有限正交球为有限高维的正交垂直关系。

参考文献

- [1] 周东清, 徐品. 四维空间可视化综述[J]. 大连理工大学学报, 1997(6): 710-713.
- [2] 罗琳, 胡福高. 关于 R^n 上超平面的几个结果[J]. 沙洋师范高等学校学报, 2001, 2(2): 54-56.
- [3] 蔡国伟. 体积勾股定理的证明[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 723-729.
- [4] 蔡国伟. 证明正交四球心间 15 个垂心球及距离公式的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 928-948.
- [5] 蔡国伟. 垂心四面体 4 态的正弦余弦定律及其换元算法[J]. 理论数学, 9(10): 1174-1186.
- [6] 刘正中. 垂心四面体的性质[J]. 数学教学研究, 1993(1): 11-13.
- [7] 张一方. 相互作用的几何统一、五维时空和超对称性[J]. 商丘师范学院学报, 2012, 28(6): 41-46.