Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 91-95
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102014

Hans汉斯

The Signed Roman Domination Number of Two Classes Corona Graph

Mengyu Duan, Xia Hong

Department of Mathematics, Luoyang Normal University, Luoyang Henan
Email: 05shumenghongxia@163.com

Received: Jan. 22nd, 2020; accepted: Feb. 10th, 2020; published: Feb. 17th, 2020

Abstract

Let $G=(V,E)$ be a simple undirected graph and denote $f(S)=\sum_{v\in S} f(v)$ for $S\subseteq V$. A real-valued function $f:V\mapsto\{-1,1,2\}$ is called a signed Roman domination function if *f* satisfies the conditions that 1) $f(N[v])\ge 1$ for any $v\in V$, and 2) every vertex *v* for which $f(v)=-1$ is adjacent to a vertex *u* for which is $f(u)=2$. The signed Roman domination number of *G* is $\gamma_{sR}(G)=\min\{f(V) \mid f \text{ is a signed Roman domination function } f \text{ of } G\}$. In this paper, we determine exact values of the signed Roman domination number of two classes graph, such as a Corona of *k*-regular graph and wheel graph by constructive method and exhaustive method.

Keywords

Signed Roman Domination Function, Signed Roman Domination Number, *k*-Regular Graph, Wheel Graph, Corona Graph

两类冠图的符号罗马控制数

段梦宇，红　霞

洛阳师范学院数学科学学院，河南　洛阳
Email: 05shumenghongxia@163.com

收稿日期：2020年1月22日；录用日期：2020年2月10日；发布日期：2020年2月17日

摘　要

设图$G=(V,E)$为一个简单无向图，若$S\subseteq V$，则记$f(S)=\sum_{v\in S} f(v)$。若实值函数$f:V\mapsto\{-1,1,2\}$满

文章引用: 段梦宇, 红霞. 两类冠图的符号罗马控制数[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 91-95.
DOI: 10.12677/pm.2020.102014

足以下两个条件：1) 对于任意的顶点 $v\in V$，均有 $f(N[v])\ge 1$ 成立；2) 如果对任意的顶点 $v\in V$，若 $f(v)=-1$，则存在一个与 v 相邻的顶点 $u\in V$ 满足 $f(u)=2$，则称该函数为图 G 的符号罗马控制函数。图 G 的符号罗马控制数定义为 $\gamma_{sR}(G)=\min\{f(V)|f$ 为图 G 的一个符号罗马控制函数$\}$。本文利用构造法及穷标法主要得到了 k-正则图的冠图以及轮图的冠图的符号罗马控制数的精确值。

关键词

符号罗马控制函数，符号罗马控制数，k-正则图，轮图，冠图

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文所指定的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同文献[1]。

设 $G=(V,E)$ 是一个图，其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$。对任意 $u\in V(G)$，则 $N_G(u)$ 为 u 点在 G 中的邻域，$N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭邻域，$d_G(u)=|N_G(u)|$ 为 u 点在 G 中的度，而 $\delta=\delta(G)$ 和 $\Delta=\Delta(G)$ 分别为图 G 的最小度和最大度。在不致混淆情况下，可将 $N_G(u)$，$N_G[u]$，$\Delta(G)$，$\delta(G)$ 分别简单记为 $N(u)$，$N[u]$，Δ，δ。用 C_n，P_n，K_n 分别表示 n 阶圈、路和完全图。k-正则图 G 是指 G 中每个顶点度均为 k 的图。

过去的几十年，图的控制理论作为图论中很重要的研究课题，其研究内容越来越丰富，很多学者在不同背景应用之下提出各种类型的符号控制数以及其变化的形式，如图的符号控制数[2]、图的边(全)符号控制数[3]、图的符号全控制数[4]、图的圈符号(边)控制数[5]以及符号(全)罗马控制数[6]、符号边(全)罗马控制数[7] [8]等。在 1995 年，由 J E Dunbar 等人首次提出图的符号控制概念，从此开辟了这一研究领域并得到迅速发展。图的符号控制数的研究有着广泛的应用背景，如交通岗位、物资供应点的设置等。

至今为止，很多相关学者踊跃研究关于图的符号罗马控制数的上下界[9]以及特殊图的符号罗马控制数的精确值。文[10]中，Zhao 等人确定了完全二部图以及轮图的符号(全)罗马控制数。文[11]中，尹凯等人确定了完全多部图的符号罗马控制数。本文主要确定了两类特殊冠图，如 k-正则图的冠图和轮图的冠图的符号罗马控制数。

对于图 $G=(V,E)$，定义一个函数 $f:V\mapsto R$ 和 G 的一个子集 $S\subseteq V$，记 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$。下文中，为简单起见，记 V_i 表示所有标号为 i 的顶点集合，其中 $i=-1,+1,+2$。对于 $x\in V$，把 $f(N[x])$ 简单记为 $f[x]$。

2. 基本概念

定义 1 [9] 设图 $G=(V,E)$ 为一个简单无向图，若 $S\subseteq V$，则记 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$。若实值函数 $f:V\mapsto\{-1,1,2\}$ 满足以下两个条件：

1) 对于任意的顶点 $v\in V$，均有 $f(N[v])\ge 1$ 成立；

2) 如果对任意的顶点 $v\in V$，若 $f(v)=-1$，

则存在一个与 v 相邻的顶点 $u\in V$ 满足 $f(u)=2$，则称该函数为图 G 符号罗马控制函数。图 G 的符号罗马控制数定义为 $\gamma_{sR}(G)=\min\{f(V)\,|\,f\text{为图}G\text{的一个符号罗马控制函数}\}$。若符号罗马控制函数 f 满足

$$\gamma_{sR}(G)=\sum\nolimits_{v\in V}f(v),$$

则称函数 f 为图 G 的 $\gamma_{sR}(G)$-函数。

定义 2 [3] 图 G 的每个顶点上粘接 r 个悬挂点而得到的图称为图 G 的 r-冠图，记为 $I_r(G)$。特别地，图 G 的 1-冠图，记为 $I(G)$。

定义 3 设 $W_{n+1}=C_n\vee K_1$ 为轮图，其中中心点为 v_0，圈 C_n 上顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$。用 $I_7(W_{n+1})$ 表示圈 C_n 中每个顶点上粘接 7 个悬挂点且中心点上粘接 $2n+1$ 个悬挂点而得到的图。

3. 主要定理及其证明

定理 1 设 G' 为任意 n 个顶点的 k-正则图 $(k\ge 1)$ 且 $G=I_{2k+1}(G')$，则

$$\gamma_{sR}(G)=n(1-2k).$$

证明： 设 $G=I_{2k+1}(G')$，$G=G(V,E)$，其中 G' 为任意的 k-正则图。令

$$V(G')=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},\quad V(G)=\{v_i,v_i^j\,|\,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,2k+1\},$$

其中 v_i^j 为图 G' 的悬挂点。下面首先考虑图 G 的符号罗马控制数的下界。

设 $f=(V_2,V_1,V_{-1})$ 是图 G 的 $\gamma_{sR}(G)$-函数，由符号罗马控制数定义知

$$f[v_1]+\cdots+f[v_n]\ge n,$$

即

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{2k+1}f(v_1^j)+\cdots+\sum_{j=1}^{2k+1}f(v_n^j)+(k+1)\sum_{i=1}^{n}f(v_i)\\&=f(V(G))+k\sum_{i=1}^{n}f(v_i)\ge n\end{aligned}$$

故，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}(G)&=f(V(G))\\&\ge n-k\left(f(v_1)+\cdots+f(v_n)\right).\\&\ge n-k\cdot 2n=n(1-2k)\end{aligned}$$

另一方面，通过给出一个符号罗马控制函数 g 来证明图 G 的符号罗马控制数的上界。令

$$g(v)=\begin{cases}+2,\text{当}v=v_i,i=1,\cdots,n\\-1,\text{否则}\end{cases}$$

容易验证，对于任意顶点 $v\in V(G')$，有

$$g[v]=2(k+1)-(2k+1)=1.$$

对于任意顶点 $v_i^j\in V(G)$，有 $g\left[v_i^j\right]=1$。从而 G 中有 $|V_2|=n$，$|V_1|=0$，$|V_{-1}|=2k+1$。故，有

$$\gamma_{sR}(G)\le g(V)=2|V_2|+|V_1|-|V_{-1}|=n(1-2k).$$

综上所述，有

$$\gamma_{sR}(G)=n(1-2k).$$

定理 1 证毕。

定理 2 设 $W_{n+1}=C_n\vee K_1$ 轮图且 $G=I_7(W_{n+1})$，则

$$\gamma_{sR}(G)=1-7n.$$

证明： 设 $G=I_7(W_{n+1})$， $G=(V,E)$，其中 $W_{n+1}=C_n\vee K_1$ 。令

$$V(W_{n+1})=\{v_0,v_1,\cdots,v_n\}$$

$$V(G)=\left\{v_i^j \middle| i=1,2,\cdots n, j=1,2,\cdots,7\right\}\cup\left\{v_i^k \middle| i=0,k=1,2,\cdots,2n+1\right\}\cup V(W_{n+1}),$$

其中 v_0 是 W_{n+1} 的中心点， v_i^j 为悬挂点。

设 $f=(V_2,V_1,V_{-1})$ 是图 G 的 $\gamma_{sR}(G)$-函数，由符号罗马控制数定义知

$$f[v_1]+\cdots+f[v_n]+f[v_{n+1}]\ge n+1,$$

即

$$\sum_{j=1}^{7}f(v_1^j)+\sum_{j=1}^{7}f(v_2^j)+\cdots+\sum_{j=1}^{7}f(v_n^j)+\sum_{j=1}^{2n+1}f(v_0^j)+4\sum_{i=1}^{n}f(v_i)+(n+1)f(v_0)\ge n+1,$$

由此推出

$$f(V(G))+3\sum_{i=1}^{n}f(v_i)+nf(v_0)\ge n+1.$$

故，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}(G)&=f(V(G))\\&\ge n+1-3\big(f(v_1)+\cdots+f(v_n)\big)-n\cdot f(v_0).\\&\ge n+1-6n-2n=1-7n\end{aligned}$$

另一方面，通过给出一个符号罗马控制函数 g 来证明上界。令

$$g(v)=\begin{cases}+2, 当 v=v_i, i=0,1,2,\cdots,n\\-1, 否则\end{cases},$$

容易验证，对于任意顶点 $v\in V(W_{n+1})$，有 $g[v]=1$ 。对于任意顶点 $v_i^j\in V(G)$，有 $g[v_i^j]=1$ 。从而 G 中有 $|V_2|=n+1$， $|V_1|=0$， $|V_{-1}|=9n+1$ 。故，有

$$\begin{aligned}\gamma_{sR}(G)&\le g(V)=2|V_2|+|V_1|-|V_{-1}|\\&=2(n+1)-7n-(2n+1)=1-7n\end{aligned}.$$

综上所述，有

$$\gamma_{sR}(G)=1-7n.$$

定理 2 证毕。

基金项目

国家自然科学基金(No.11701257、No.11801253)，河南省教育厅高校重点项目(No.18A110025)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1977) Graph Theory with Applications. Macmillan, London.

[2] Dunbar, J.E., Hedetniemi, S.T., Henning, M.A. and Slater, P.J. (1995) Signed Domination in Graphs. *Graph Theory, Combinatorics and Application*, **1**, 311-322.

[3] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] Henning, M.A. (2004) Signed Total Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **278**, 109-125. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.002

[5] Xu, B.G. (2009) On Signed Cycle Domination Numbers in Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 1007-1012. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.01.007

[6] Volkmann, L. (2016) On the Signed Total Roman Domination and Domatic Numbers of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **214**, 179-186. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.06.006

[7] Ahangar, H.A., Amjadi, J., Sheikholeslami, S.M. and Zhao, Y. (2016) Signed Roman Edge Domination Numbers in Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **31**, 333-346. https://doi.org/10.1007/s10878-014-9747-8

[8] Asgharsharghi, L. and Sheikholeslami, S.M. (2017) Signed Total Roman Edge Domination in Graphs. *Discussions Mathematicae Graph Theory*, **37**, 1039-1053. https://doi.org/10.7151/dmgt.1984

[9] Abdollahzadeh Ahangar, H., Henning, M.A., Löwenstein, C., Zhao, Y. and Samodivkin, V. (2014) Signed Roman Domination in Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **27**, 241-255. https://doi.org/10.1007/s10878-012-9500-0

[10] Zhao, Y.C. and Miao, L.Y. (2017) Signed Roman (Total) Domination Numbers of Complete Bipartite Graphs and Wheels. *Communications in Mathematical Research*, **33**, 318-326.

[11] 尹凯, 陈学刚. 完全多部图的符号罗马控制数[J]. 汕头大学学报, 2017, 31(4): 25-34.