

# Dynamic Analysis of a 4D Hyperchaotic Generalized Segmented Disc Dynamo System

Feng Wu

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong  
Email: 1315809807@qq.com

Received: Jan. 25<sup>th</sup>, 2020; accepted: Feb. 14<sup>th</sup>, 2020; published: Feb. 21<sup>st</sup>, 2020

---

## Abstract

Based on segmented disc dynamo, a new four-dimensional chaotic generalized generator system was proposed. The author studies Pitchfork fork, Hopf fork and zero-zero Hopf fork, gives the proof that Pitchfork fork and periodic solution exist in the system under different conditions, and gives the numerical simulation of Pitchfork fork.

## Keywords

Model-Dynamos, Hyperchaotic System, Pitchfork Bifurcation, Hopf Bifurcation, 0-0 Hopf Bifurcation

---

# 一个四维混沌的广义发电机系统的动力学分析

吴 锋

华南理工大学数学学院, 广东 广州  
Email: 1315809807@qq.com

收稿日期: 2020年1月25日; 录用日期: 2020年2月14日; 发布日期: 2020年2月21日

---

## 摘 要

本文基于segmented disc dynamo发电机, 提出了一个新的四维混沌的广义发电机系统。作者研究了Pitchfork分叉、Hopf分叉、zero-zero Hopf分叉, 给出了在不同条件下系统存在pitchfork分叉、Hopf

分叉和周期解的证明，并给出了Pitchfork分叉和Hopf分叉的数值模拟。

## 关键词

发电机模型，超混沌系统，Pitchfork分叉，Hopf分叉，Zero-Zero Hopf分叉

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

非线性科学自二十世纪下半叶以来，作为一门基础学科取得了迅猛的发展，尤其是其中的混沌现象更是成为当今科学前沿的热门话题，自1963年Lorenz引入第一个数学物理混沌模型[1]，在那之后各个领域的科学家开始深入探索混沌的本质、路径、分叉和混沌系统的特性[2]-[10]，在此基础上1979年，O. E. Rossler首次提出了超混沌的概念，并给出了具有一个以上正Lyapunov指数的四维超混沌系统，超混沌作为一种比混沌更复杂的动力学行为，在工程应用上又比混沌具有更大的应用潜力；众所周知，自治系统中产生超混沌的最小可能维数系统是4；因此，四维自治系统是超混沌研究和应用的主要方向，为了帮助理解天体物理间磁场的产生和逆转，过去广泛运用发电机模型[11]-[15]来进行研究，后来Moffa[16]提出了一种新型发电机模型，该发电机模型可用以下常微分方程组来描述：

$$\dot{X} = r(Y - X) \quad (1)$$

$$\dot{Y} = mX - (1 + m)Y + XZ \quad (2)$$

$$\dot{Z} = g[1 + mX^2 - (1 + m)XY] \quad (3)$$

这里 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示由于径向和方位角电流分布引起的磁通量， $Z(t)$ 表示圆盘的角速度，圆点表示相对于时间的微分， $g$ 表示施加的转矩， $r$ 和 $m$ 为正常数，取决于电路的电性能。Moffat的发电机忽略了摩擦对转盘的影响，然而实际情况还要考虑轴承的摩擦，我们可以在(3)式后加上项“ $-vZ$ ”来模拟这种摩擦，为方便，Moffat进行坐标变换：

$$\bar{X} = (gm)^{\frac{1}{2}} \frac{X}{r}, \bar{Y} = (gm)^{\frac{1}{2}} \frac{Y}{r}, \bar{Z} = \left( Z - \frac{g}{v} \right) / r, \bar{t} = rt \quad (4)$$

$$\bar{X}' = \bar{Y} - \bar{X} \quad (5)$$

$$\bar{Y}' = \alpha(\bar{X} - \bar{Y}) + \gamma\bar{X} + \bar{X}\bar{Z} \quad (6)$$

$$\bar{Z}' = -n\bar{Z} + \bar{X}(\bar{X} - \beta\bar{Y}) \quad (7)$$

则方程(1)~(3)变为

其中， $n = v/r, \alpha = (1 + m)/r, \beta = 1 + 1/m, \gamma = (g/v - 1)/r$ 。Moffat利用此方程组探究混沌的特性。

Pitchfork分叉和Hopf分叉是改变参数时从系统平衡点出现的两种分叉现象。局部分叉的研究有助于我们分析和阐明非线性系统如何从稳态演化到混沌和超混沌状态。因此，分叉点在研究平衡点的稳定性方面起到至关重要的作用。当平衡点的个数和稳定性发生变化时，且零点为非双曲点时，可能出现

pitchfork 分叉；当平衡点通过一对纯虚特征值来改变稳定性时，Hopf 分叉将在动力系统平衡态的极限环中产生；当平衡点在特征值表现为一对纯虚特征值和零特征值时，将可能出现 0-0 Hopf 分叉。

本文主要研究的是基于 Moffat 提出的发电系统，对其广义化的四维新型超混沌系统及其基本性质进行研究，得到广义发电系统下 pitchfork 分叉、零 Hopf 分叉以及周期解在零零-Hopf 平衡下的分叉问题。

## 2. 超混沌系统及其基本性质

### 2.1. 超混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = b(y - x) + kw \\ \dot{y} = dx + cy + xz \\ \dot{z} = -nz + bx(x - \beta z) \\ \dot{w} = -sw + k_2xz - x \end{cases} \quad (8)$$

基于(5)~(7)所提出的四维光滑二次自治超混沌系统具有以下动力学方程：

其中  $(x, y, z, w)^T \in R^4$ ， $b > 0, \beta > 0, c < 0, d > 0, n > 0, s > 0, k > 0$ ， $bs^2 - cs^2 + ck + ks < 0$ ， $k_2 \in R$ 。由系统(8)的 Lyapunov 系数图 1，可判断出系统(8)是超混沌的

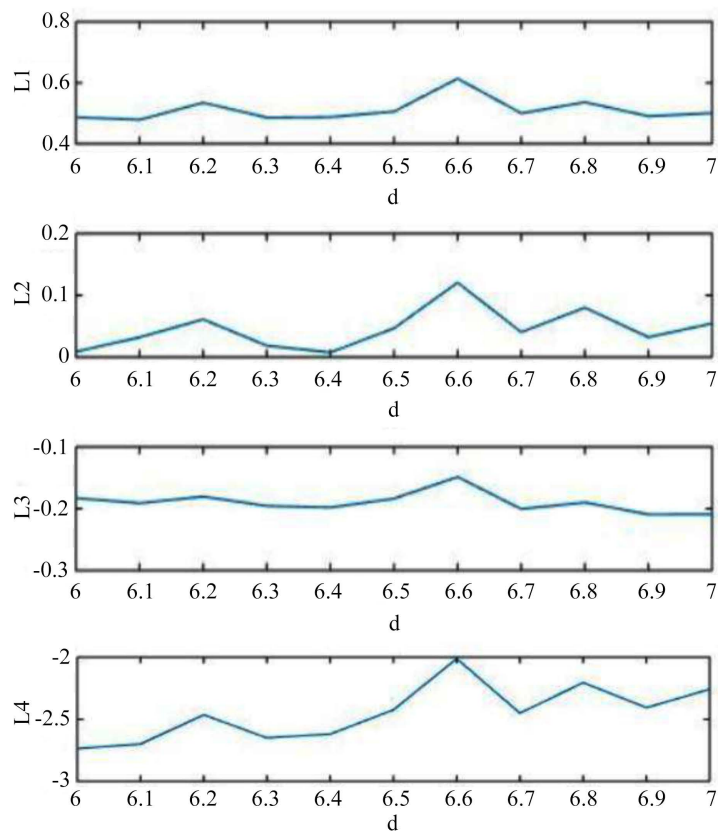


Figure 1. Lyapunov coefficient diagram of system (8)  
图 1. 系统(8)的 Lyapunov 系数图

### 2.2. 平衡点

计算系统(8)的平衡性，先考虑方程组

$$\begin{cases} b(y-x) + kw = 0 \\ dx + cy + xz = 0 \\ -nz + bx(x - \beta z) = 0 \\ -sw + k_2xz - x = 0 \end{cases}$$

我们可以算出系统(8)有平衡点  $S_0 = (0, 0, 0, 0)$  且当  $bcs + bds + ck > 0$  时, 系统(8)有另外两个平衡点:

$$S_{1,2} := \left( \pm x_0, \pm x_0 \cdot \frac{dkk_2 + bs + k}{-ckk_2 + bs}, -\frac{bcs + bds + ck}{-ckk_2 + bs}, \mp x_0 \cdot \frac{b(ck_2 + dk_2 + 1)}{-ckk_2 + bs} \right).$$

$$\text{其中 } x_0 = \sqrt{\frac{n(bcs + bds + ck)}{b(\beta dkk_2 + b\beta s + ckk_2 - bs + \beta k)}}$$

线性化系统(8)在任意平衡点  $S = (x, y, z, w)$ , 可得如下雅各比矩阵:

$$J_s = \begin{bmatrix} -b & b & 0 & k \\ d + z & c & x & 0 \\ b(-\beta y + x) + bx & -bx\beta & -n & 0 \\ k_2z - 1 & 0 & k_2x & -s \end{bmatrix} \quad (9)$$

通过方程  $|\lambda I_4 - J_s| = 0$  (其中  $I_4 \in R^{4 \times 4}$  是个恒等矩阵), 计算出相应的特征值。对于  $S_1$  和  $S_2$ , 易证明  $|\lambda I_4 - J_{s_1}| = |\lambda I_4 - J_{s_2}|$ , 这表明  $S_1$  和  $S_2$  的稳定性是相同的; 对于零平衡点  $S_0 = (0, 0, 0, 0)$ , 特别的, 此时系统(8)的雅各比矩阵变为

$$J_s = \begin{bmatrix} -b & b & 0 & k \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -s \end{bmatrix} \quad (10)$$

此时相关特征方程为

$$\varphi(\lambda) = -(\lambda + n) \cdot \varphi_1(\lambda) = 0 \quad (11)$$

$$\varphi_1(\lambda) = bc\lambda + bcs + bd\lambda + bds - b\lambda^2 - b\lambda s + c\lambda^2 + c\lambda s - \lambda^3 - \lambda^2 s + ck - k\lambda \quad (12)$$

显然, 式(11)总有一个负实根  $\lambda = -n$ ; 但其他三个根的实部对于不同的参数值, 不总是非负的, 在第3节将给出零平衡点  $S_0$  的局部分叉分析以及改变参数  $d$  时  $S_0, S_1, S_2$  的稳定性情况。

### 3. Pitchfork 分叉

令  $d$  为分叉参数, 当  $d = d^0 = \frac{-bcs - ck}{bs}$  时, 特征方程在奇点  $S_0$  处有特征值  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -n$ ,

$$\lambda_{3,4} = \frac{(-sb + sc - s^2) \pm \sqrt{s(b^2s - 2bcs - 2bs^2 + c^2s + 2cs^2 + s^3 - 4ck - 4ks)}}{2s},$$

因此零点  $S_0$  是非双曲的, 由中心流形定理和分叉理论, 经过推导, 可得 Pitchfork 分叉的以下定理。

**定理 1** 当  $d = d^0 = \frac{-bcs - ck}{bs}$  时, 系统(8)在零平衡点  $S_0 = (0, 0, 0, 0)$  出现了一个 Pitchfork 分叉, 而且当  $d < d^0$  时, 仅有一个不稳定平衡点  $S_0 = (0, 0, 0, 0)$  在  $d = d^0$  的左侧; 当  $d > d^0$  时, 将出现三个平衡点,  $S_0 = (0, 0, 0, 0)$  将变成稳定的, 另外两个不稳定的平衡点  $S_{1,2}$  在  $d = d^0$  的右侧。

证明：相关特征向量为  $V_1 = \begin{bmatrix} -s \\ -bs+k \\ b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $V_3 = \begin{bmatrix} \frac{k(c-\lambda_3)(bcs-cs^2+ck+ks)}{s(bcs-c^2s+c\lambda_3s+2ck-k\lambda_3)(b+\lambda_3)} \\ \frac{ck(c-k-\lambda_3)(bs+k)}{bs(cs(b-c+\lambda_3)+k(2c-\lambda_3))} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

$$V_4 = \begin{bmatrix} \frac{k(c-\lambda_4)(bcs-cs^2+ck+ks)}{s(bcs-c^2s+c\lambda_4s+2ck-k\lambda_4)(b+\lambda_4)} \\ \frac{ck(c-k-\lambda_4)(bs+k)}{bs(cs(b-c+\lambda_4)+k(2c-\lambda_4))} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据[17], 令

$$\text{令 } d = \frac{-bcs-ck}{bs} + \varepsilon \text{ 且 } T = [V_1, V_2, V_3, V_4] \tag{13}$$

考虑变换

$$[x, y, z, w]^T = T[x_1, x_2, x_3, x_4]^T \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$\dot{\varepsilon} = 0$

利用方程(13)、(14)将系统(8)转换为  
其中

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{k(c-\lambda_3)(bcs-cs^2+ck+ks)}{s(cs(b-c+\lambda_3)+k(2c-\lambda_3))(b+\lambda_3)}, & r_2 &= \frac{k(c-\lambda_4)(bcs-cs^2+ck+ks)}{s(cs(b-c+\lambda_4)+k(2c-\lambda_4))(b+\lambda_4)}, \\ r_3 &= \frac{ck(c-\lambda_3-k)(bs+k)}{bs(cs(b-c+\lambda_3)+k(2c-\lambda_3))}, & r_4 &= \frac{ck(c-\lambda_4-k)(bs+k)}{bs(cs(b-c+\lambda_4)+k(2c-\lambda_4))}; \\ g_1 &= \frac{b(r_1x_3+r_2x_4-sx_1)(k_2r_1r_4x_2-k_2r_2r_3x_2-\varepsilon r_1+\varepsilon r_2-r_1x_2+r_2x_2)}{br_1r_4+br_1s-br_2r_3-br_2s-br_3s+br_4s+kr_1-kr_2}, \\ g_2 &= -(r_1x_3+r_2x_4-sx_1)(b\beta r_3x_3+b\beta r_4x_4-b\beta sx_1-br_1x_3-br_2x_4+bsx_1-\beta kx_1), \\ g_3 &= -\frac{(r_1x_3+r_2x_4-sx_1)(bk_2r_2sx_2-bk_2r_4sx_2+kk_2r_1x_2+b\varepsilon r_2+b\varepsilon s+br_2x_2+bsx_2)}{br_1r_4+br_1s-br_2r_3-br_2s-br_3s+br_4s+kr_1-kr_2}, \\ g_4 &= \frac{(r_1x_3+r_2x_4-sx_1)(bk_2r_1sx_2-bk_2r_3sx_2+kk_2r_1x_2+b\varepsilon r_1+b\varepsilon s+br_1x_2+bsx_2)}{br_1r_4+br_1s-br_2r_3-br_2s-br_3s+br_4s+kr_1-kr_2} \end{aligned}$$

由中心流形定理可知, 对于方程(15)存在一个中心流形, 通过变量  $x_1$  和  $\varepsilon$  [17]可将其表示为

$$W_C(0) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, \varepsilon) \in R^4 \mid x_2 = h_1(x_1, \varepsilon), x_3 = h_2(x_1, \varepsilon), x_4 = h_3(x_1, \varepsilon), \\ |x_1| < \delta, |\varepsilon| < \bar{\delta}, h_i(0, 0) = 0, Dh_i(0, 0) = 0, i = 1, 2, 3\}$$

其中  $\delta$  和  $\bar{\delta}$  充分小且  $Dh_i(x_1, \varepsilon)$  是  $h_i$  的全微分  $i = 1, 2, 3$ ; 要获得中心流形上的向量域, 设

$$\begin{cases} x_2 = h_1(x_1, \varepsilon) = a_1x_1^2 + a_2x_1\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + o(3) \\ x_3 = h_2(x_1, \varepsilon) = b_1x_1^2 + b_2x_1\varepsilon + b_3\varepsilon^2 + o(3) \\ x_4 = h_3(x_1, \varepsilon) = c_1x_1^2 + c_2x_1\varepsilon + c_3\varepsilon^2 + o(3) \end{cases} \quad (16)$$

其中  $o(3)$  表示为所有三阶项(例如  $x_1^3, x_1^2\varepsilon, x_1\varepsilon^2, \varepsilon^3$ )和更高阶项(例如  $x_1^4, x_1^3\varepsilon, x_1^2\varepsilon^2, x_1\varepsilon^3, \varepsilon^4$ )

又因为  $\dot{\varepsilon} \equiv 0$ , 则不变流形应满足

$$N(h(x_1, \varepsilon)) = D_{x_1}h \cdot g_1 - Bh - g \equiv 0 \quad (17)$$

$$\text{其中, } h(x_1, \varepsilon) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, D_{x_1}h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix},$$

将方程(16)代入(17), 比较相同项的系数, 我们可得到

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{s(b\beta s - bs + \beta k)}{n}, a_2 = 0, a_3 = 0 \\ b_1 = 0, b_2 = -\frac{sb(s + r_2)}{\lambda_3(b r_1 r_4 + b r_1 s - b r_2 r_3 - b r_2 s - b r_3 s + b r_4 s + k r_1 - k r_2)}, b_3 = 0 \\ c_1 = 0, c_2 = \frac{sb(s + r_1)}{\lambda_4(b r_1 r_4 + b r_1 s - b r_2 r_3 - b r_2 s - b r_3 s + b r_4 s + k r_1 - k r_2)}, c_3 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

因此方程(16)可改写为

$$\begin{cases} x_2 = h_1(x_1, \varepsilon) = a_1x_1^2 + o(3) = -\frac{s(b\beta s - bs + \beta k)}{n}x_1^2 + o(3) \\ x_3 = h_2(x_1, \varepsilon) = b_2x_1\varepsilon + o(3) = -\frac{sb(s + r_2)x_1\varepsilon}{\lambda_3(b(r_1r_4 - r_2r_3) + (r_1 - r_2 - r_3 + r_4)bs + k(r_1 - r_2))} + o(3) \\ x_4 = h_3(x_1, \varepsilon) = c_2x_1\varepsilon + o(3) = \frac{sb(s + r_1)x_1\varepsilon}{\lambda_4(b(r_1r_4 - r_2r_3) + (r_1 - r_2 - r_3 + r_4)bs + k(r_1 - r_2))} + o(3) \end{cases} \quad (19)$$

将方程组(19)代入方程组(15)的  $\dot{x}_1 \equiv g_1$ , 将向量场简化为中心流形, 我们可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F(x_1, \varepsilon) + o(4) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$F(x_1, k) = \frac{b}{b(r_1r_4 + r_1s - r_2r_3 - r_2s - r_3s + r_4s) + k r_1 - k r_2} (r_1\varepsilon x b_2 + r_1\varepsilon x c_2 - s x_1) \\ \text{其中} \quad \left( \frac{((k_2r_2r_3 - k_2r_1r_4) - (r_1 - r_2))s(b\beta s - bs + \beta k)x_1^2}{n} - \varepsilon r_1 + \varepsilon r_2 \right)$$

由平衡点分叉理论[18]，容易证得以下条件成立的，这说明系统(20)的平衡点  $(x_1, \varepsilon) = (0, 0)$  在  $\varepsilon = 0 (d = d^0)$  处发生了一个 pitchfork 分叉。

因此定理 1 得证

$$\begin{cases} F(0,0) = 0, \frac{\partial F}{\partial x_1} \Big|_{(0,0)} = 0, \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \Big|_{(0,0)} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \Big|_{(0,0)} = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \varepsilon} \Big|_{(0,0)} = \frac{bs(r_1 - r_2)}{br_1r_4 + br_1s - br_2r_3 - br_2s - br_3s + br_4s + kr_1 - kr_2} \neq 0 \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3} \Big|_{(0,0)} = \frac{6bs^2(b\beta s - bs + \beta k)(k_2r_1r_4 - k_2r_2r_3 - r_1 + r_2)}{n(br_1r_4 + br_1s - br_2r_3 - br_2s - br_3s + br_4s + kr_1 - kr_2)} \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

**数值模拟** 为了验证定理 1，设参数  $b=1, c=-2, \beta=2, n=4, k=10, s=0.5, k_2=0$  根据定理 1 知道  $d = d^0 = \frac{-bcs - ck}{bs} = 42$ ，系统(8)在  $S_0$  点产生了 Pitchfork 分叉，这说明在  $d = d^0$  附近平衡点个数和稳定性发生了变化。在  $d = d^0$  左侧仅有一个不稳定的平衡点  $S_0$ ，在它的右侧有两个不稳定的平衡点  $S_1, S_2$  和一个稳定的平衡点  $S_0$ 。图 2 所示为  $d^0$  在 35~48 之间的分叉图。显然，由图 2 得知分叉方向在  $d > 42$  处，且  $d < 42$  时  $S_0$  是不稳定的，当  $d > 42$  时， $S_0$  变为稳定的且  $S_1, S_2$  出现为不稳定的；这与定理 1 结论相同。

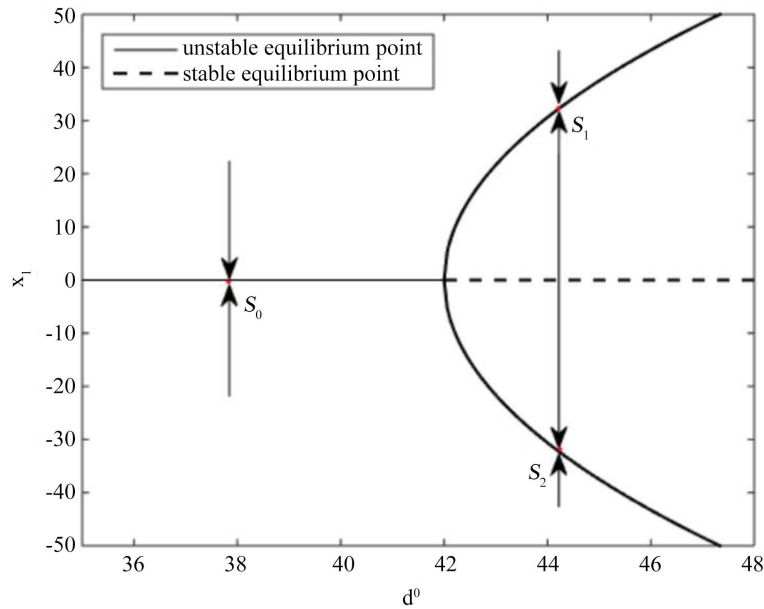


Figure 2. Pitchfork bifurcation at  $d = d^0 = 42$  of system (8)  
图 2. 系统(8)在  $d = d^0 = 42$  处的 Pitchfork 分叉

### 4. Hopf 分叉

令  $d$  分叉参数，在研究系统(8)的平衡点  $S_0 = (0, 0, 0, 0)$  的 Hopf 分叉之前，先介绍 Hopf 分叉的基本理论：

考虑一个向量场  $\dot{x} = f(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R$

若向量场将发生 Hopf 分叉，则要同时满足以下条件[19]-[26]：

a) 满足  $f(x_0, \mu_0) = 0$ ，雅各比矩阵  $Df(x_0, \mu_0)$  有一对纯虚根特征值  $\varphi_1(\mu)|_{\mu=\mu_0}$  和  $\varphi_2(\mu)|_{\mu=\mu_0}$ ，其余  $n-2$  个特征值实部非零。

b) 横截性条件：特征值实部满足  $\frac{d}{d\mu}(\text{Re}(\varphi_{1,2}(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0$ 。

接下来，对 Hopf 分叉的两个条件逐一验证。

首先，由方程(11)通过计算得知当

$$d = d_0 = \frac{(b+s)(bc-bs-c^2+cs-k)}{(c-b)b}$$

系统(8)在  $S_0$  点的雅各比矩阵线性化后有一对纯虚根特征值和两个非零实特征值

$$\lambda_{1,2} = \mp i\omega, \lambda_3 = -n, \lambda_4 = -s+c-b \quad \text{其中 } \omega = \sqrt{-\frac{bs^2 - cs^2 + ck + ks}{b-c}} \quad (23)$$

因此，条件 a) 成立。

其次，验证条件 b)，已知  $\lambda_{1,2} = \mp i\omega$  为方程(12)的根，对  $\varphi^1(\lambda)$  中的  $d$  求偏导，得

$$\frac{d\lambda(d)}{dd} \Big| = \frac{b\lambda + bs}{3\lambda^2 + 2(b-c+s)\lambda + (k+bs-cs-bd-bc)} \quad (24)$$

则

$$\rho = \text{Re}(\lambda'(d)) \Big|_{d=d_0} = \frac{2b(b-c)(b+c)^2}{4(c-b)^2\omega^2 + (2b^2 - 4bc + 2bs + 2c^2 - 2cs)^2} > 0 \quad (25)$$

横截条件 b) 满足。因此系统(8)在  $S_0$  处发生 Hopf 分岔，而分岔点的稳定性由第一个 Lyapunov 系数  $l_1$  所决定，故可得以下定理。

**定理 2** 对于系统(8)，( $b > 0, \beta > 0, c < 0, d > 0, n > 0, s > 0, k > 0, bs^2 - cs^2 + ck + ks < 0, k_2 \in R$ )，该系统在  $S_0$  处的第一个 Lyapunov 系数  $l_1$  可表示为

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{2(bc-bs-c^2+cs-k)^4(b+s)(b-c)k^4b^2(bs^4-6bs^2\omega^2+b\omega^4-cs^4+6cs^2\omega^2-c\omega^4+ks^3-3ks\omega^2)}{((b-c)^4b^2\omega^2+(bs-cs+k)^2(b-c)^2b^2)n((b-c)^2\omega^2+(bs-cs+k)^2)^3} \right. \\ \left. \frac{(bc-bs-c^2+cs-k)^4(b+s)(b-c)k^4b^2(s^2+\omega^2)(bns^2-bn\omega^2-4bs\omega^2-cns^2+cn\omega^2+4cs\omega^2+kns-2k\omega^2)}{((b-c)^4b^2\omega^2+(bs-cs+k)^2(b-c)^2b^2)((b-c)^2\omega^2+(bs-cs+k)^2)^3(n^2+4\omega^2)} \right. \\ \left. + \frac{2k^4b(bs-cs+k)^3(s^3-3s\omega^2)}{n((b-c)^2\omega^2+(bs-cs+k)^2)^3} + \frac{k^4b(bc-bs-c^2+cs-k)^3(s^2+\omega^2)(ns-2\omega^2)}{((b-c)^2\omega^2+(bs-cs+k)^2)^3(n^2+4\omega^2)} \right]$$

1) 如果  $l_1 > 0$ ，系统(8)在  $S_0$  处发生 Hopf 分岔，分岔点是不稳定的，而且当  $d < d_0$ ，靠近  $d_0$  时，系统在稳定奇点  $S_0$  附近存在一个不稳定的极限环。

2) 如果  $l_1 < 0$ ，系统(8)在  $S_0$  处发生 Hopf 分岔，分岔点是稳定的，而且当  $d > d_0$ ，靠近  $d_0$  时，系统在不稳定奇点  $S_0$  附近存在一个稳定的极限环。

**证明：**由(10)式的雅各比矩阵可知，当  $d = d_0 = \frac{(b+s)(bc-bs-c^2+cs-k)}{(c-b)b}$  时，



它的特征值为  $\lambda_1 = -i\omega, \lambda_2 = i\omega, \lambda_3 = -n, \lambda_4 = -s + c - b$ ,  $\omega = \sqrt{-\frac{bs^2 - cs^2 + ck + ks}{b - c}}$

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} -b & b & 0 & k \\ \frac{(b+s)(bc - bs - c^2 + cs - k)}{(c-b)b} & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -s \end{bmatrix},$$

$$q = \begin{bmatrix} \frac{(s-i\omega)k(bc - bs - c^2 + cs - k)}{(b-c)^2\omega^2 + (bs - cs + k)^2} \\ \frac{((bs+k-cs) - (b-c)i\omega)(bc - bs - c^2 + cs - k)(b+s)(b-c)kb}{(b-c)^4 b^2\omega^2 + (bs+k-cs)^2(b-c)^2 b^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$p = \begin{bmatrix} \frac{(s+i\omega)k(bc - bs - c^2 + cs - k)}{(b-c)^2\omega^2 + (bs - cs + k)^2} \\ \frac{((bs+k-cs) + (b-c)i\omega)(bc - bs - c^2 + cs - k)(b+s)(b-c)kb}{(b-c)^4 b^2\omega^2 + (bs+k-cs)^2(b-c)^2 b^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ b[x_1^2 + x_3^2 - \beta(x_1 y_3 + x_3 y_1)] \\ k_2(x_1 y_3 + x_3 y_1) \end{bmatrix}, \quad C(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

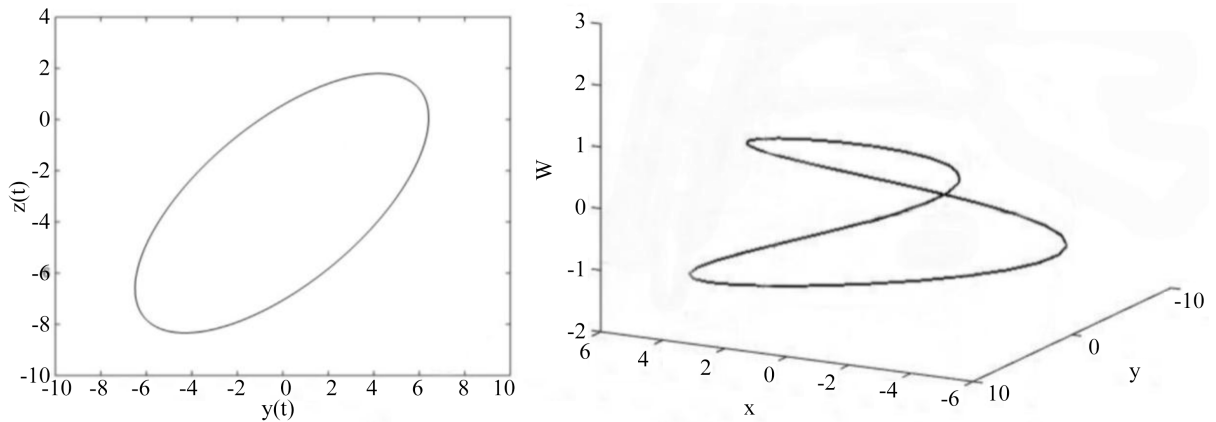
$$A^{-1}B(q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{b(s-i\omega)^2 k^2 (bc - bs - c^2 + cs - k)^2}{n((b-c)^2\omega^2 + (bs - cs + k)^2)^2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(2i\omega E - A)^{-1}B(q, q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b(s-i\omega)^2 k^2 (bc - bs - c^2 + cs - k)^2}{(2i\omega + n)((b-c)^2\omega^2 + (bs - cs + k)^2)^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

则根据公式  $l_1 = \frac{1}{2\omega} \text{Re} \left[ \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \right]$

即可计算得到第一个 Lyapunov 系数  $l_1$  如定理中所示。

**数值模拟** 取  $b = 1, c = -1.3249, \beta = 0.1, n = 20, k = 10, s = 0.4675, k_2 = 0$ , 则  $d = 8.9424, l_1 = 0.4962$ , 如图 3 所示, 此时系统(8)得到一个初始条件为  $(-1.1235, -0.7869, -3.1376, 0.0967)$  的不稳定极限环。



**Figure 3.** A unstable limit cycle of the system (8) with initial condition  $(-1.1235, -0.7869, -3.1376, 0.0967)$  for  $(b, c, d, \beta, n, k, s, k_2) = (1, -1.3249, 8.9424, 0.1, 20, 10, 0.4675, 0)$

**图 3.** 系统(8)的初始条件  $(-1.1235, -0.7869, -3.1376, 0.0967)$  在满足参数  $(b, c, d, \beta, n, k, s, k_2) = (1, -1.3249, 8.9424, 0.1, 20, 10, 0.4675, 0)$  下的不稳定极限环

### 5. Zero-Zero-Hopf 分叉

对于(8)可以考虑变形为以下微分形式:

$$\dot{X} = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, X, \varepsilon) \tag{26}$$

其中  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  且  $\varepsilon_0$  是充分小的正数,  $F_0, F_1, F_2$  是二阶连续偏导函数且各自定义域值域为  $F_0, F_1: R \times \Omega \rightarrow R^n, F_2: R \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow R^n$ ; 第一个变量为周期  $T, \Omega$  是  $R^n$  上的一个开集。根据平均理论, 研究系统(26)中  $T$  周期解的分叉问题, 其主要是假设无干扰系统

$$\dot{X} = F_0(t, x) \tag{27}$$

有一个子流形。假设  $X(t, X_0)$  是系统(27)在  $X(0, X_0) = X_0 = X(T, X_0)$  处的周期解, 那么其线性周期解  $X(T, X_0)$  可以记为

$$\dot{Y} = D_x F_0(t, X(t, X_0))Y \tag{28}$$

令  $M_{X_0}(t)$  为线性微分系统(28)的基本矩阵。假设存在一个开集  $V$  满足  $CI(v) \subset \Omega$ , 使得对于每一个  $X_0 \in CI(V)$ , 都有一个系统(27)的周期解  $X(t, X_0)$ 。其中集合  $CI(V)$  是系统(27)的周期解集合, 也被称之为系统(27)的同步集。因此, 关于  $T$  周期解的分叉问题周期解的  $X(t, X_0)$  全包含在集合  $CI(V)$  中, 这将由以下定理给出。

**定理 3 [26]** 假设有一个有界开集  $V$  满足  $CI(v) \subset \Omega$  使得对于每一个  $X_0 \in CI(V)$  的解  $X(t, X_0)$  是  $T$  周期的, 则以下函数

$$F(X_0) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{X_0}^{-1}(t, X_0) F_1(t, X(t, X_0)) dt, F: CI(V) \rightarrow R^n$$

满足陈述:

1) 若存在  $X^* \in V$  满足  $F(X^*) = 0$  且  $\det((\partial F/\partial X_0)(X^*)) \neq 0$  , 则存在一个系统(26)的周期解  $X(t, \varepsilon)$  使得当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时有  $X(t, \varepsilon) \rightarrow X^*$

2) 周期解  $X(t, \varepsilon)$  的稳定性类型由雅各比矩阵  $(\partial F/\partial X_0)(X^*)$  的特征值给出。

该定理证明过于繁琐, 具体可见[26]。

**定理 4** 令  $k_2 = 0, n = 0, s = -b + c, k = (-c - d)(c - b)b/c$  且  $b^2d/c - 2bd - c^2 < 0$  , 则坐标原点为广义发电系统(8)的 0-0-Hopf 平衡点。

**证明:** 易计算得系统(8)在  $S_0$  的特征方程为

$$P(\lambda) = -(\lambda + n)(bcs + bds + ck + (bc + bd - bs + cs - k)\lambda + (-b + c - s)\lambda^2 - \lambda^3)$$

当参数满足  $k_2 = 0, n = 0, s = -b + c, k = \frac{(-c - d)(c - b)b}{c}$  ,  $\frac{b^2d}{c} - 2bd - c^2 < 0$  时, 该方程的根依次为  $0, 0, \pm i\sqrt{-\left(\frac{b^2d}{c} - 2bd - c^2\right)}$  , 定理 4 得证。

在求出系统(8)在原点处有 0-0-Hopf 分叉后, 接下来则需要证明在该平衡处是否有周期解的存在, 定理 5 给出了周期解的存在性和稳定性的满足条件。

**定理 5** 令  $n(-b + c)(bcs + bds + ck)(b^2d - 2bcd - c^3) \neq 0$  且

$$\begin{aligned} D = & b^6d(c + d) - 4b^5cd(c + d) + b^4c(cs(-2c + s) + 2d^2(3c + s) + d(6c^2 + s^2 - 2k)) \\ & + 4c^4k(c^2 - cs + k) + 2b^3c^2(-(c + d)(2d(c + s) + s(-4c + 3s)) + (4d - c + s)k) \\ & + b^2c^2(10c^2s(-c + s) + d^2(c + s)^2 + cd(c^2 - 8cs + 11s^2) + 2c(4c - 5s)k - 2d(5c + s)k + k^2) \\ & + 2bc^3(2c(c + d)(c - s)s + (2d(c + s) + c(-5c + 7s))k - 2k^2) \end{aligned}$$

当  $D \neq 0$  时, 广义发电系统(8)在原点平衡处有一个 0-0-Hopf 分叉, 在这个平衡处有两个周期解, 且当  $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0, D_4 > 0$  时它们是稳定解; 其中  $D_i, i = 1, 2, 3, 4$  具体值可参见附录所示。

**证明:** 经过变形  $(n, s, k) \rightarrow \left(\varepsilon n_1, -b + c + \varepsilon s_1, \frac{(-c - d)(c - b)b}{c} + \varepsilon k_1\right)$  , 其中  $\varepsilon$  是充分小的正数,  $n_1, s_1, k_1$  是非零实数, 则广义发电系统(8)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = b(y - x) + (-c - d)(c - b)bw/c + \varepsilon k_1 w \\ \dot{y} = dx + cy + xz \\ \dot{z} = -\varepsilon n_1 z + bx(x - \beta z) \\ \dot{w} = -x + (b - c)w - \varepsilon s_1 w \end{cases} \quad (29)$$

此外, 进一步缩放变量, 令  $(x, y, z, w)^T = (\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon p, \varepsilon q)^T$  , 然后再次用  $X = (x, y, z, w)^T$  表示  $(u, v, p, q)^T$  , 则系统(29)变形为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) \\ &= \begin{pmatrix} b(y - x) + (-c - d)(c - b)bw/c \\ dx + cy \\ 0 \\ -x + (b - c)w \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} k_1 w \\ xz \\ -n_1 z + bx(x - \beta z) \\ -s_1 w \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

借助定理 3 中描述的平均方法，对系统(30)进行研究；  
考虑无扰动系统，

$$\dot{X} = F_0(t, x), \quad X = (x_0, y_0, z_0, w_0) \tag{31}$$

研究(31)的初值问题，得出其解为  $X(t, X_0) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$  满足

$$x(t) = \frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 w_0}{ca^2}, y(t) = \frac{a_4 x_0 + a_5 y_0 + a_6 w_0}{ca^2}, z(t) = z_0, w(t) = \frac{1}{ca^2}(a_7 x_0 + a_8 y_0 + a_9 w_0)$$

其中  $a = \sqrt{-(b^2 d/c - 2bd - c^2)}$ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= (b-c)c^2 - abc \sin(at) + b(bd - c^2 - 2cd)\cos(at), \\ a_2 &= (c-b)bc + abc \sin(at) + b(bc - c^2)\cos(at), \\ a_3 &= b(b-c)(c+d)(-c + a \sin(at) + c \cos(at)), \\ a_4 &= dc(c-b) + acd \sin(at) + cd(b-c)\cos(at), \\ a_5 &= bd(b-c) + ac^2 \sin(at) - c(bd - c^2)\cos(at), \\ a_6 &= (c+d)(b-c)bd - (c+d)(b-c)bd \cos(at), \\ a_7 &= c^2 - ac \sin(at) - c^2 \cos(at), \\ a_8 &= -bc + bc \cos(at), \\ a_9 &= -bc(c+d) + ac(b-c)\sin(at) + (b^2 d + bc^2 - bcd - c^3)\cos(at) \end{aligned}$$

值得注意的是，系统(31)所有满足  $X_0 \neq 0$  解  $X(t, X_0)$  都是周期的，含有相同周期  $T = 2\pi/a$ ，对于系统(31)的解  $X(t, X_0)$ ，可以将线性化系统  $\dot{Y} = D_x F_0(t, X(t, X_0))$  的基本矩阵  $M_{X_0}(t)$  写成如下形式：

$$M_{X_0}(t) = \frac{1}{ca^2} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & a_5 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & ca^2 & 0 \\ a_7 & a_8 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$$

其中  $a_0 = 2acs \sin(at)$ ，计算定理 3 中所建立的函数

$$F(X_0) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{X_0}^{-1}(t, X_0) F_1(t, X(t, X_0)) dt = (F_1(X_0), F_2(X_0), F_3(X_0), F_4(X_0))^T$$

其中  $F_1(X_0), F_2(X_0), F_3(X_0), F_4(X_0)$  数值可见附录。

解非线性方程  $F(X_0) = 0$ ，得到三个解：

$$S_0 = (0, 0, 0, 0), \quad S_{\pm} = \left( \pm(b-c)S_{w_0}, \pm \frac{d(c-b)}{c} S_{w_0}, \frac{bcs_1 + bds_1 + ck_1}{b(b-c)}, \pm S_{w_0} \right)$$

解  $S_0 = (0, 0, 0, 0)$  对应于在原点的平衡  $E_0$ ，对于另外两个解  $S_{\pm}$  满足：

$$F(S_+) = F(S_-) = 0$$

$$\det((\partial F / \partial X_0)(S_+)) = \det((\partial F / \partial X_0)(S_-)) = -\frac{n(b(c+d)s + ck)D}{2(b-c)^2(b^2 d - 2bcd - c^3)} \neq 0$$

因此, 根据定理 3, 系统(30)存在两个周期为  $T = 2\pi/a$  的解  $X_+(t, \varepsilon)$  和  $X_-(t, \varepsilon)$  使得当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时有  $X_+(0, \varepsilon) \rightarrow S_+$  和  $X_-(0, \varepsilon) \rightarrow S_-$  成立。因为系统(30)是系统(29)的变形, 所以系统(30)的周期解  $X_{\pm}(t, \varepsilon)$  对应于系统(29)的周期解  $\varepsilon X_{\pm}(t, \varepsilon)$ 。

最后为了确定这两个周期解的稳定性类型, 需要计算雅各比矩阵  $(\partial F/\partial X_0)(S_{\pm})$ , 不难得出矩阵  $(\partial F/\partial X_0)(S_{\pm})$  的特征多项式为

$$P(S_{\pm}) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 \quad (32)$$

其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  数值可见附录。

令

$$D_1 = c_1, D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}, D_4 = c_4 D_3$$

根据 Routh-Hurwitz 准则, 在  $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$  和  $D_4 > 0$  情况下, 该特中多项式(32)的所有根均为负实部, 即两个周期解  $X_+(0, \varepsilon) \rightarrow S_+$  和  $X_-(0, \varepsilon) \rightarrow S_-$  在原点生成是稳定的, 定理 5 得证。

## 参考文献

- [1] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [2] Sparrow, C. (1982) *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5767-7>
- [3] Hirsch, M., Smale, S. and Devaney, R. (2008) *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier, Singapore.
- [4] Robinson, C. (2000) Nonsymmetric Lorenz Attractors from a Homoclinic Bifurcation. *SIAM, Journal on Mathematical Analysis*, **32**, 119-141. <https://doi.org/10.1137/S0036141098343598>
- [5] Yang, Q., Chen, G. and Huang, K. (2007) Chaotic Attractors of the Conjugate Lorenz-Type System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **17**, 3929-3949. <https://doi.org/10.1142/S0218127407019792>
- [6] Yang, Q. and Chen, G. (2008) A Chaotic System with One Saddle and Two Stable Node-Foci. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **18**, 1393-1414. <https://doi.org/10.1142/S0218127408021063>
- [7] Yang, Q. and Chen, Y. (2014) Complex Dynamics in the Unified Lorenz-Type System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**, Article ID: 1450055. <https://doi.org/10.1142/S0218127414500552>
- [8] Chen, Y. and Yang, Q. (2014) Dynamics of a Hyperchaotic Lorenz-Type System. *Nonlinear Dynamics*, **77**, 569-581. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1318-0>
- [9] Hastings, S. and Troy, W. (1994) A Proof That the Lorenz Equations Have a Homoclinic Orbit. *Journal of Differential Equations*, **113**, 166-188. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1119>
- [10] Hastings, S. and Troy, W. (1996) A Shooting Approach to Chaos in the Lorenz Equations. *Journal of Differential Equations*, **127**, 41-53. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0060>
- [11] Bullard, E.C. (1955) The Stability of a Homopolar Dynamo. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**, 744-760. <https://doi.org/10.1017/S0305004100030814>
- [12] Allan, D.W. (1962) On the Behaviour of Systems of Coupled Dynamos. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **58**, 671-693. <https://doi.org/10.1017/S0305004100040718>
- [13] Cook, A.E. and Roberts, P.H. (1970) The Rikitake Two-Disc Dynamo System. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **68**, 547-569. <https://doi.org/10.1017/S0305004100046338>
- [14] Ito, K. (1980) Chaos in the Rikitake Two-Disc Dynamo System. *Earth and Planetary Science Letters*, **51**, 451-456. [https://doi.org/10.1016/0012-821X\(80\)90224-1](https://doi.org/10.1016/0012-821X(80)90224-1)
- [15] Robbins, K.A. (1977) A New Approach to Subcritical Instability and Turbulent Transitions in a Simple Dynamo. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **82**, 309-325. <https://doi.org/10.1017/S0305004100053950>

- 
- [16] Moffatt, H.K. (1979) A Self-Consistent Treatment of Simple Dynamo Systems. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **14**, 147-166. <https://doi.org/10.1080/03091927908244536>
- [17] Wiggins, S. (1990) Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, New York, 200-253. [https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7_4)
- [18] Wang, J.Z., Zhang, Q. and Chen, Z.Q. (2014) Local Bifurcation Analysis and Ultimate Bound of a Novel 4D Hyper-Chaotic System. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 2517-2531. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1607-7>
- [19] Wu, W.J., Chen, Z.Q. and Yuan, Z.Z. (2008) Local Bifurcation Analysis of a Four-Dimensional Hyperchaotic System. *Chinese Physics B*, **17**, 2420-2432. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/7/015>
- [20] Li, X. and Wang, P. (2013) Hopf Bifurcation and Heteroclinic Orbit in a 3D Autonomous Chaotic System. *Nonlinear Dynamics*, **73**, 621-632. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-0815-x>
- [21] Wang, Z.L., Zhou, L.L., Chen, Z.Q. and Wang, J.Z. (2015) Local Bifurcation Analysis and Topological Horseshoe of a 4D Hyperchaotic System. *Nonlinear Dynamics*, **83**, 2055-2066. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2464-8>
- [22] Li, D., Lu, J., Wu, X. and Chen, G. (2006) Estimating the Ultimate Bound and Positively Invariant Set of the Lorenz System and a Unied Chaotic System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **323**, 844-853. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.008>
- [23] Wang, P., Li, D. and Hu, Q. (2010) Bounds of the Hyper-Chaotic Lorenz-Stenflo System. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 2514-2520. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.09.015>
- [24] Zhang, F., Mu, C. and Li, X. (2012) On the Boundness of Some Solutions of the Lü System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **22**, 1250015-1250050. <https://doi.org/10.1142/S0218127412500150>
- [25] Zhang, F., Mi, C., Wang, L., Wang, X. and Yao, X. (2014) Estimations for Ultimate Boundary of a New Hyperchaotic System and Its Simulation. *Nonlinear Dynamics*, **75**, 529-537. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-1082-6>
- [26] Wang, P., Li, D., Wu, X., Yu, X., *et al.* (2011) Ultimate Bound Estimation of a Class of High Dimensional Quadratic Autonomous Dynamical Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**, 2679-2694. <https://doi.org/10.1142/S0218127411030027>

## 附录

$$F_1(X_0) = \frac{1}{2a^4c^2} \left( b(b-c)(c+d)s_1 \left( (b^3d - 4b^2cd + b(d-4c)c^2 + 2c^4)w_0 + (-b^2d + 2bcd + 4c^3)x_0 - 3bc^2y_0 \right) \right. \\ \left. + k_1 \left( b(b-c)(c+d)(b^2d - 2bcd - 4c^3)w_0 + c \left( (-b^3d + b^2cd - 2c^4 + 2bc^2(2c+d))x_0 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + b(b^2d + 2c^3 - bc(3c+2d))y_0 \right) \right) + b \left( b(b-c)(c+d)(b^2d + 2c^3 - bc(3c+2d))w_0 \right. \\ \left. + c \left( (-2b^3d + 2c^4 - 2bc^2(2c+d) + b^2d(3c+5d))x_0 + b(b^2(d-3c) - 2b(d-3c)c - 4c^3)y_0 \right) \right) z_0 \Bigg)$$

$$F_2(X_0) = -\frac{1}{2a^4c^2} \left( -cb(3b^2cd - b^2d^2 - 4bc^2d + 2bcd^2 - 2c^4)x_0z_0 + cb^2(2b^2d - 2bcd - c^3 - c^2d)y_0z_0 \right. \\ \left. + cb(c+d)(b-c)(3b^2d - 3bcd - 2c^3)w_0z_0 + dc(3b^2c^2s_1 + 3b^2c ds_1 - 3bc^3s_1 - 3bc^2 ds_1 \right. \\ \left. - b^2dk_1 + 3bc^2k_1 + 2bcdk_1 - 2c^3k_1)x_0 - 3bcd(b-c)(bcs_1 + bds_1 + ck_1)y_0 \right. \\ \left. - bd(c+d)(b-c)(b^2ds_1 + 3bc^2s_1 + bc ds_1 - c^3s_1 + 3c^2k_1)w_0 \right)$$

$$F_3(X_0) = -\frac{1}{2a^4c^2} \left( c^2d(2c^3 + b(b-2c)(3c+d))x_0^2 + (2b^4cd - 4b^3c^2d + 3b^2c^3d + b^2c^4)y_0^2 \right. \\ \left. + 3b^2cd(b-c)^2(c+d)^2w_0^2 - 2bc^2(2b^2d - 4bcd + c^2(c+3d))x_0y_0 \right. \\ \left. + 2bc(b-c)(c+d)w_0(3bd(c-b)x_0 + (2b^2d - bcd + c^3)y_0) \right. \\ \left. + (2b^4d^2 - 8b^3cd^2 + 8b^2c^2d^2 - 4b^2c^3d + 8bc^4d + 2c^6)n_1z_0 \right)$$

$$F_4(X_0) = \frac{1}{2a^4c^2} \left( cb(b^2d - 3bc^2 - 2bcd + 2c^3)x_0z_0 + 3b^2c^2(b-c)y_0z_0 + 3b^2c^2(c+d)(b-c)w_0z_0 \right. \\ \left. - c(b^3ds_1 - 4b^2c ds_1 - 4bc^3s_1 + bc^2 ds_1 + 2c^4s_1 + b^2dk_1 - 2bcdk_1 - 4c^3k_1)x_0 \right. \\ \left. - cb(b^2ds_1 + 3bc^2s_1 + bc ds_1 - c^3s_1 + 3c^2k_1)y_0 + (b^4c ds_1 - b^4d^2s_1 - 6b^3c^2 ds_1 \right. \\ \left. + 2b^3cd^2s_1 - 4b^2c^4s_1 + 5b^2c^3 ds_1 - 3b^2c^2d^2s_1 + 4bc^5s_1 - 4bc^4 ds_1 - 2c^6s_1 \right. \\ \left. + b^3cdk_1 - 4b^2c^2dk_1 - 4bc^4k_1 + bc^3dk_1 + 2c^5k_1)w_0 \right)$$

$$c_1 = \frac{1}{(b^2d - 2bcd - c^3)^2} \left( (b^4d^2 - 4b^3cd^2 - 2b^2c^3d + 4b^2c^2d^2 + 4bc^4d + c^6)(n_1 + s_1) + (-bc^5 + 3bc^4d)s_1 - c^5k_1 \right)$$

$$c_2 = \frac{(b^2d - 2bcd - c^3)^2}{4(b-c)^2a^8c^4} \left( b^6cd + b^6d^2 - 8b^5c^2d - 8b^5cd^2 - b^4c^4 + 21b^4c^3d + 23b^4c^2d^2 + b^4cd^3 + 2b^3c^5 \right. \\ \left. - 22b^3c^4d - 26b^3c^3d^2 - 2b^3c^2d^3 + 9b^2c^5d + 9b^2c^4d^2 \right) s_1^2 + (b^4cd - 6b^3c^2d - b^2c^4 + 12b^2c^3d + 2bc^5 \\ - 8bc^4d)k_1^2 + (4b^6d^2 + 8b^5c^2d - 16b^5cd^2 - 40b^4c^3d + 20b^4c^2d^2 - 12b^3c^5 + 60b^3c^4d - 8b^3c^3d^2 + 28b^2c^6 \\ - 32b^2c^5d - 20bc^7 + 4bc^6d + 4c^8)s_1n_1 + (2b^5cd - 14b^4c^2d - 2b^4cd^2 - 2b^3c^4 + 34b^3c^3d + 8b^3c^2d^2 + 4b^2c^5 \\ - 32b^2c^4d - 8b^2c^3d^2 + 10bc^5d)s_1k_1 + (8b^4c^2d - 32b^3c^3d - 12b^2c^5 + 40b^2c^4d + 24bc^6 - 16bc^5d - 12c^7)k_1n_1$$

$$c_3 = \frac{n_1(b^2d - 2bcd - c^3)^3}{4(b-c)^2c^6a^2} \left( (b^8cd^2 + b^8d^3 - 2b^7c^2d^2 - 2b^7cd^3 - 2b^6c^4d - 12b^6c^3d^2 - 9b^6c^2d^3 + b^6cd^4 - 4b^5c^5d + 32b^5c^4d^2 + 32b^5c^3d^3 - 4b^5c^2d^4 - 7b^4c^7 + 23b^4c^6d - 10b^4c^5d^2 - 36b^4c^4d^3 + 4b^4c^3d^4 + 22b^3c^8 - 18b^3c^7d - 24b^3c^6d^2 + 16b^3c^5d^3 - 24b^2c^9 - 9b^2c^8d + 15b^2c^7d^2 + 8bc^{10} + 8bc^9d)s_1^2 + (b^6cd^2 - 8b^5c^2d^2 - 2b^4c^4d + 24b^4c^3d^2 + 10b^3c^5d - 32b^3c^4d^2 - 7b^2c^7 - 16b^2c^6d + 16b^2c^5d^2 + 14bc^8 + 8bc^7d - 8c^9)k_1^2 + (2b^7cd^2 - 10b^6c^2d^2 - 2b^6cd^3 - 4b^5c^4d + 14b^5c^3d^2 + 12b^5c^2d^3 + 6b^4c^5d + 6b^4c^4d^2 - 24b^4c^3d^3 - 14b^3c^7 + 6b^3c^6d - 30b^3c^5d^2 + 16b^3c^4d^3 + 36b^2c^8 - 16b^2c^7d + 20b^2c^6d^2 - 32bc^9 + 6bc^8d + 8c^{10})k_1s_1 \right)$$

$$c_4 = \frac{bn_1(b^2d - 2bcd - c^3)^5(bcs_1 + bds_1 + ck_1)}{2(b-c)^2a^{16}c^7} \left( (b^3cd - 6b^2c^2d - bc^4 + 12bc^3d + 2c^5 - 8c^4d)k_1^2 + (b^5cd + b^5d^2 - 8b^4c^2d - 8b^4cd^2 - b^3c^4 + 21b^3c^3d + 23b^3c^2d^2 + b^3cd^3 + 2b^2c^5 - 22b^2c^4d - 26b^2c^3d^2 - 2b^2c^2d^3 + 9bc^5d + 9bc^4d^2)s_1^2 + (2b^4cd - 14b^3c^2d - 2b^3cd^2 - 2b^2c^4 + 34b^2c^3d + 8b^2c^2d^2 + 4bc^5 - 32bc^4d - 8bc^3d^2 + 10c^5d)k_1s_1 \right)$$

$$D_1 = \frac{1}{(b^2d - 2bcd - c^3)^2 \varepsilon} (b^5d^2 - 5b^4cd^2 + b^4d^2n + b^4d^2s - 2b^3c^3d + 8b^3c^2d^2 - 4b^3cd^2n - 4b^3cd^2s + 6b^2c^4d - 4b^2c^3d^2 - 2b^2c^3dn - 2b^2c^3ds + 4b^2c^2d^2n + 4b^2c^2d^2s + bc^6 - 4bc^5d - bc^5s + 4bc^4dn + 3bc^4ds - c^7 + c^6n + c^6s - c^5k)$$

$$D_2 = -\frac{1}{4\varepsilon^3(b^2d - 2bcd - c^3)^3(b-c)^2} (b^{10}cd^3 + b^{10}d^4 - 8b^9c^2d^3 - 8b^9cd^4 - 2b^8c^4d^2 + 24b^8c^3d^3 + 6b^8c^3d^2s + 26b^8c^2d^4 + 8b^8c^2d^3s + b^8c^2d^2s^2 + 2b^8cd^4s + b^8cd^3s^2 + 12b^7c^5d^2 - 32b^7c^4d^3 - 40b^7c^4d^2s - 44b^7c^3d^4 - 52b^7c^3d^3s - 2b^7c^3d^2s^2 - 12b^7c^2d^4s - 2b^7c^2d^3s^2 + b^6c^7d - 27b^6c^6d^2 - 14b^6c^6ds + 13b^6c^5d^3 - 2b^6c^5ds^2 + 41b^6c^4d^4 + 126b^6c^4d^3s - 12b^6c^4d^2s^2 + 26b^6c^3d^4s - 9b^6c^3d^3s^2 + b^6c^2d^4s^2 - 4b^5c^8d + 68b^5c^7ds + 12b^5c^6d^3 - 48b^5c^6d^2s - 4b^5c^6ds^2 - 20b^5c^5d^4 - 140b^5c^5d^3s + 32b^5c^5d^2s^2 - 24b^5c^4d^4s + 32b^5c^4d^3s^2 - 4b^5c^3d^4s^2 + 6b^4c^9d + 8b^4c^9s - 12b^4c^8d^2 - 110b^4c^8ds - 7b^4c^8s^2 - 14b^4c^7d^3 - 56b^4c^7d^2s + 23b^4c^7ds^2 + 4b^4c^6d^4 + 70b^4c^6d^3s - 10b^4c^6d^2s^2 + 8b^4c^5d^4s - 36b^4c^5d^3s^2 + 4b^4c^4d^4s^2 - 4b^3c^{10}d + 64b^3c^9ds + 22b^3c^9s^2 + 4b^3c^8d^3 + 76b^3c^8d^2s - 18b^3c^8ds^2 - 12b^3c^7d^3s - 24b^3c^7d^2s^2 + 16b^3c^6d^3s^2 + 24b^2c^{11}s + b^2c^{10}d^2 - 24b^2c^{10}s^2 - 24b^2c^9d^2s - 9b^2c^9ds^2 + 15b^2c^8d^2s^2 - 8bc^12s - 8bc^11ds + 8bc^11s^2 + 8bc^{10}ds^2 - 2b^8cd^3k + 6b^7c^3d^2k + 16b^7c^2d^3k + 2b^7c^2d^2ks - 36b^6c^4d^2k - 50b^6c^3d^3k - 10b^6c^3d^2ks - 2b^6c^2d^3ks - 14b^5c^6dk + 80b^5c^5d^2k - 4b^5c^5dks + 76b^5c^4d^3k + 14b^5c^4d^2ks + 12b^5c^3d^3ks + 66b^4c^7dk - 80b^4c^6d^2k + 6b^4c^6dks - 56b^4c^5d^3k + 6b^4c^5d^2ks - 24b^4c^4d^3ks + 8b^3c^9k - 112b^3c^8dk - 14b^3c^8ks + 34b^3c^7d^2k + 6b^3c^7dks + 16b^3c^6d^3k - 30b^3c^6d^2ks + 16b^3c^5d^3ks - 24b^2c^{10}k + 82b^2c^9dk)$$



$$\begin{aligned}
& +36b^2c^9ks - 4b^2c^8d^2k - 16b^2c^8dks + 20b^2c^7d^2ks + 24bc^{11}k - 22bc^{10}dk \\
& - 32bc^{10}ks + 6bc^9dks - 8c^{12}k + 8c^{11}ks + b^6c^2d^2k^2 - 8b^5c^3d^2k^2 - 2b^4c^5dk^2 \\
& + 24b^4c^4d^2k^2 + 10b^3c^6dk^2 - 32b^3c^5d^2k^2 - 7b^2c^8k^2 - 16b^2c^7dk^2 \\
& + 16b^2c^6d^2k^2 + 14bc^9k^2 + 8bc^8dk^2 - 8c^{10}k^2)
\end{aligned}$$

$$D_3 = c_1c_2c_3 - c_1^2c_4 - c_3^2$$

$$\begin{aligned}
D_4 = & \frac{b^2n^2(bcs + bds + ck)^2 D_3}{2\varepsilon^8(b^2d - 2bcd - c^3)^3(b-c)^2} (b^7cd^2 + b^7d^3 - 6b^6c^2d^2 - 6b^6cd^3 - b^5c^4d + 13b^5c^3d^2 - 2b^5c^3ds \\
& + 14b^5c^2d^3 + b^5c^2ds^2 + 2b^5cd^3s + b^5cd^2s^2 + 4b^4c^5d - 12b^4c^4d^2 + 12b^4c^4ds - 16b^4c^3d^3 + 4b^4c^3d^2s \\
& - 8b^4c^3ds^2 - 8b^4c^2d^3s - 8b^4c^2d^2s^2 - 6b^3c^6d + 3b^3c^5d^2 - 26b^3c^5ds - b^3c^5s^2 + 9b^3c^4d^3 - 16b^3c^4d^2s \\
& + 21b^3c^4ds^2 + 10b^3c^3d^3s + 23b^3c^3d^2s^2 + b^3c^2d^3s^2 + 4b^2c^7d + 2b^2c^6d^2 + 24b^2c^6ds + 2b^2c^6s^2 \\
& - 2b^2c^5d^3 + 20b^2c^5d^2s - 22b^2c^5ds^2 - 4b^2c^4d^3s - 26b^2c^4d^2s^2 - 2b^2c^3d^3s^2 - bc^8d - bc^7d^2 - 8bc^7ds \\
& - 8bc^6d^2s + 9bc^6ds^2 + 9bc^5d^2s^2 - 2b^5cd^2k - 2b^4c^3dk + 12b^4c^2d^2k + 2b^4c^2dks + 14b^3c^4dk \\
& - 26b^3c^3d^2k - 14b^3c^3dks - 2b^3c^2d^2ks - 32b^2c^5dk - 2b^2c^5ks + 24b^2c^4d^2k + 34b^2c^4dks + 8b^2c^3d^2ks \\
& + 30bc^6dk + 4bc^6ks - 8bc^5d^2k - 32bc^5dks - 8bc^4d^2ks - 10c^7dk + 10c^6dks + b^3c^2dk^2 - 6b^2c^3dk^2 \\
& - bc^5k^2 + 12bc^4dk^2 + 2c^6k^2 - 8c^5dk^2)^2
\end{aligned}$$