Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 96-99
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102015

Hans汉斯

Periodicity of Entire Functions Concerning Difference

Bingmao Deng[1], Shiwen Yang[2]

[1]School of Financial Mathematics and Statics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
[2]Institute of Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: dbmao2012@163.com, yangseawell@foxmail.com

Received: Jan. 24th, 2020; accepted: Feb. 12th, 2020; published: Feb. 19th, 2020

Abstract

This paper studied the periodicity of entire functions with its difference, and proved: Let $f(z)$ be a transcendental entire function of finite order, and d be a Picard exceptional value of $f(z)$. If $f(z)\Delta_c f(z)$ is a periodic function, then $f(z)$ is also a periodic function.

Keywords

Entire Function, Picard Exceptional Value, Periodic Function

与差分相关的整函数周期性问题

邓炳茂[1]，杨世伟[2]

[1]广东金融学院，金融数学与统计学院，广东 广州
[2]华南农业大学，应用数学研究所，广东 广州
Email: dbmao2012@163.com, yangseawell@foxmail.com

收稿日期：2020年1月24日；录用日期：2020年2月12日；发布日期：2020年2月19日

摘 要

本文主要研究了有穷级整函数与差分相关的周期性问题，主要证明了：如果 $f(z)$ 是有穷级超越整函数，d 是 $f(z)$ 的一个Picard例外值，如果 $f(z)\Delta_c f(z)$ 是周期函数，则 $f(z)$ 也是周期函数。

文章引用: 邓炳茂, 杨世伟. 与差分相关的整函数周期性问题[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 96-99.
DOI: 10.12677/pm.2020.102015

关键词

整函数，Picard例外值，周期函数

1. 引言及主要结果

假设读者熟悉亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的基本内容及相关标准符号(见参考文献[1] [2] [3])。特别的，$\rho(f)$表示整函数f的级，当$\rho(f)<\infty$时，称f为有穷级整函数。

设$f(z)$是复平面上的整函数，定义其差分算子为

$$\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z),\ \Delta_c^n f(z)=\Delta_c\left(\Delta_c^{n-1}f(z)\right).$$

2018 年，王琼、扈培础[4]研究了杨重俊提出的如下猜想：

猜想 1：如果$f(z)$是超越整函数，对某个正整数k，如果$f(z)f^{(k)}(z)$是周期函数，则$f(z)$也是周期函数。

王琼、扈培础[4]证明了以下特殊情形，猜想 1 是正确的，他们证明了：

定理 1：如果$f(z)$是超越整函数，对某个正整数k，如果$\left(f^2(z)\right)^{(k)}$是周期函数，则$f(z)$也是周期函数。

注 1：显然$\left(f^2(z)\right)'=2f(z)f'(z)$，即定理 1 说明猜想 1 当$k=1$时是正确的。

2019 年，刘凯等人[5]研究了在$f(z)$有非零 Picard 例外值的情形，猜想 1 是正确的。

定理 2：如果$f(z)$是超越整函数，$d\neq 0$是$f(z)$的一个 Picard 例外值，对某个正整数k，如果$f(z)f^{(k)}(z)$是周期函数，则$f(z)$也是周期函数。

对于定理 2，要求$d\neq 0$，自然会问，当$d=0$时，定理 2 结论是否成立？本文研究了该问题，证明了以下结论。

定理 3：如果$f(z)$是有穷级超越整函数，0 是$f(z)$的一个 Picard 例外值，对某个正整数k，如果$f(z)f^{(k)}(z)$是以c为周期的函数，则$f(z)=\mathrm{e}^{az+b}$，其中$a\neq 0,b$是两个常数，并且$\mathrm{e}^{2ac}=1$，即$f(z)$是以$2c$周期的周期函数。

另外，我们将定理 2 中的导数替换成差分，证明了如下结论。

定理 4：如果$f(z)$是有穷级超越整函数，d是$f(z)$的一个 Picard 例外值，如果$f(z)\Delta_c f(z)$是周期函数，则$f(z)$也是周期函数。

2. 一些引理

引理 2.1 ([6])设$f(z)$是一个有穷级亚纯函数，c是非零常数，则有

$$T\left(r,f(z+c)\right)=T(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.2 ([2])设$f_i(z)(1\leq i\leq n)(n\geq 3)$除$f_n$之外是非常值亚纯函数，并且满足$\sum_{i=1}^{n}f_i(z)\equiv 1$，和存在一

个常数 $\lambda<1$，对任意的，$1\le k\le n$ 时，均有

$$\sum_{i=1}^{n}N\left(r,\frac{1}{f_j}\right)+(n-1)\sum_{i=1}^{n}\overline{N}(r,f_j)<(\lambda+o(1))T(r,f_k),\quad r\to\infty,\quad r\notin E,$$

其中 $E\subset(1,\infty)$ 是测度有穷的集合。

则 $f_n(z)\equiv 1$。

3. 定理 3 的证明

由 0 是 $f(z)$ 的 Picard 例外值，且 $f(z)$ 是有穷级超越整函数，因此存在非常数多项式 $p(z)$，使得 $f(z)=\mathrm{e}^{p(z)}$，显然 $T(r,p)=S(r,f)$。经简单计算，可得 $f^{(k)}(z)=H(p(z))\mathrm{e}^{p(z)}$，其中 $H(p(z))$ 是关于 $p(z)$ 的微分多项式。显然 $H(p(z))\not\equiv 0$，否则 $f^{(k)}(z)\equiv 0$，得 $f(z)$ 是一个次数不超过 $k-1$ 的多项式，这与 $f(z)$ 是超越整函数矛盾。引理 2.1 可得 $T(r,H(p(z)))=S(r,f)$，$T(r,H(p(z+c)))=S(r,f)$。

另外，因为 $ff^{(k)}$ 是周期函数，不妨设其周期为 c，则有

$$f(z)f^{(k)}(z)=f(z+c)f^{(k)}(z+c).\tag{1}$$

将 $f(z)=\mathrm{e}^{p(z)}$，$f^{(k)}(z)=H(p(z))\mathrm{e}^{p(z)}$ 代入(1)式，可得

$$H(p(z))\mathrm{e}^{2p(z)}=H(p(z+c))\mathrm{e}^{2p(z+c)}.$$

从而有

$$\mathrm{e}^{2\Delta_c p(z)}=\frac{H(p(z))}{H(p(z+c))}.$$

当 $\deg p(z)\ge 2$ 时，$\deg\Delta_c p(z)=\deg p(z)-1\ge 1$.

$$T\left(r,\mathrm{e}^{\Delta_c p(z)}\right)=T\left(r,\frac{H(p(z))}{H(p(z+c))}\right)=S\left(r,\mathrm{e}^{\Delta_c p(z)}\right),$$

矛盾。

所以 $\deg p(z)=1$，令 $p(z)=az+b$，其中 $a\ne 0$. 则 $f(z)=\mathrm{e}^{az+b}$，$f^{(k)}(z)=a^k\mathrm{e}^{az+b}$，代入(1)式，可得 $a^k\mathrm{e}^{2az+2b}=a^k\mathrm{e}^{2az+2ac+2b}$，所以 $\mathrm{e}^{2ac}=1$，即得 $f(z+2c)=\mathrm{e}^{az+2ac+b}=\mathrm{e}^{ac+b}=f(z)$。

定理 3 证明完毕。

4. 定理 4 的证明

由 d 是 $f(z)$ 的 Picard 例外值，且 $f(z)$ 是有穷级超越整函数，因此存在非常数多项式 $p(z)$，使得 $f(z)=d+\mathrm{e}^{p(z)}$，显然 $T(r,p)=S(r,f)$。经简单计算，可得 $\Delta_c f(z)=\mathrm{e}^{p(z+c)}-\mathrm{e}^{p(z)}$，若 $\Delta_c f(z)\equiv 0$，则显然 $f(z)$ 是以 c 为周期的周期函数，以下考虑 $\Delta_c f(z)\not\equiv 0$ 的情形。

另一方面，因为 $f(z)\Delta_c f(z)$ 是周期函数，不访设其周期为 η，则有

$$f(z)\Delta_c f(z)=f(z+\eta)\Delta_c f(z+\eta).\tag{2}$$

将 $f(z)=d+\mathrm{e}^{p(z)}$，$\Delta_c f(z)=\mathrm{e}^{p(z+c)}-\mathrm{e}^{p(z)}$ 代入(2)式，

当 $c+\eta\ne 0$ 时，有

$$d\left(e^{\Delta_c p}-1-e^{\Delta_{c+\eta} p}+e^{\Delta_\eta p}\right)e^{p}+\left(e^{\Delta_c p}-1-e^{\Delta_\eta p+\Delta_{c+\eta} p}+e^{2\Delta_\eta p}\right)e^{2p}\equiv 0. \tag{3}$$

可断言：

$$d\left(e^{\Delta_c p}-1-e^{\Delta_{c+\eta} p}+e^{\Delta_\eta p}\right)\equiv 0, \tag{4}$$

$$e^{\Delta_c p}-1-e^{\Delta_\eta p+\Delta_{c+\eta} p}+e^{2\Delta_\eta p}\equiv 0. \tag{5}$$

若不然，由(3)式及引理 2.1，引理 2.2，可得

$$T\left(r,e^{p}\right)=T\left(r,\frac{d\left(e^{\Delta_c p}-1-e^{\Delta_{c+\eta} p}+e^{\Delta_\eta p}\right)}{e^{\Delta_c p}-1-e^{\Delta_\eta p+\Delta_{c+\eta} p}+e^{2\Delta_\eta p}}\right)=S\left(r,e^{p}\right).$$

矛盾。

令 $p(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$， $n\ge 1$， $a_n\ne 0$。

情形 1。$n\ge 2$。则 $\Delta_c p(z)=na_n c z^{n-1}+P_1(z)$， $\Delta_{c+\eta}p(z)=2na_n(c+\eta)z^{n-1}+P_2(z)$。其中 P_1,P_2 是次数不超过 $n-2$ 的多项式。可知 $\Delta_c p,\Delta_\eta p+\Delta_{c+\eta}p,\Delta_\eta p$ 均是次数为 $n-1$ 的多项式。由(5)式及引理 2.2，可得 $e^{\Delta_c p}\equiv 1$，或者 $e^{\Delta_\eta p+\Delta_{c+\eta} p}\equiv 1$，或者 $e^{2\Delta_\eta p}\equiv 1$，矛盾。

情形 2。$n=1$。则 $p(z)=a_1 z+a_0$， $\Delta_c p(z)=a_1 c$， $\Delta_{c+\eta}p(z)=a_1(c+\eta)$，代入(5)式，可得 $e^{a_1 c}-1-e^{a_1 c+2a_1\eta}+e^{2a_1\eta}\equiv 0$，即 $\left(e^{a_1 c}-1\right)\left(1-e^{2a_1\eta}\right)\equiv 0$ 解方程，有 $e^{a_1 c}=1$，或 $e^{2a_1\eta}=1$。即 $f(z)$ 是以 c 或 2η 为周期的周期函数。进一步的，若 $d\ne 0$，结合(4)式，可得 $e^{a_1 c}=1$，或 $e^{a_1\eta}=1$，即 $f(z)$ 是以 c 或 η 为周期的周期函数。

当 $c+\eta=0$ 时，有

$$d\left(e^{\Delta_c p}-2+e^{\Delta_\eta p}\right)e^{p}+\left(e^{\Delta_c p}-1-e^{\Delta_\eta p}+e^{2\Delta_\eta p}\right)e^{2p}\equiv 0. \tag{6}$$

与上述讨论类似，可得 $f(z)$ 是以 c 或 η 为周期的周期函数。

定理 4 证明完毕。

基金项目

国家自然科学基金青年资助项目(11901119, 11701188)；广东教育厅科研项目(2017KTECX130)。

参考文献

[1] 杨乐. 值分布及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 5-13.

[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing, 1-13. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8_1

[3] Hayman, W.K. (1964) Mermorphic Functions. Clarendon Press, Oxford, 4-10.

[4] 王琼, 扈培础. 关于整函数零点和周期性的研究[J]. 数学物理学报, 2018, 38(2): 209-204.

[5] Liu, K. and Yu, P.Y. (2019) A Note on the Periodicity of Entire Functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **100**, 290-296. https://doi.org/10.1017/S0004972719000030

[6] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of f(z+η) and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1