Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 43-48
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102008

Hans汉斯

2-Local Homogeneous Derivations of Generalized Loop-Witt Algebras

Jie Huang, Xiandong Wang

College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1062411610@qq.com, wanxd1549@sina.com

Received: Jan. 10th, 2020; accepted: Jan. 30th, 2020; published: Feb. 6th, 2020

Abstract

In the present paper, 2-local derivations of the generalized Loop-Witt algebra were discussed. The concept of a 2-local homogeneous derivation was given and their properties were obtained. Finally, all the 2-local homogeneous derivations are determined to be derivations in case of the additive group of integers or additive group of rationals.

Keywords

Generalized Loop-Witt Algebras, Derivation, 2-Local Derivation, 2-Local Homogeneous Derivation

广义Loop-Witt代数的2-局部齐次导子

黄　杰，王宪栋

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 1062411610@qq.com, wanxd1549@sina.com

收稿日期：2020年1月10日；录用日期：2020年1月30日；发布日期：2020年2月6日

摘　要

讨论了广义Loop-Witt代数$W_L(\Gamma)$的2-局部导子的结构；给出了2-局部齐次导子的概念，并研究了它们的性质；证明了当Γ是整数加法群或有理数加法群时，广义Loop-Witt代数上的所有2-局部齐次导子均为导子。

文章引用: 黄杰, 王宪栋. 广义 Loop-Witt 代数的 2-局部齐次导子[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 43-48.
DOI: 10.12677/pm.2020.102008

关键词

广义的Loop-Witt代数，导子，2-局部导子，2-局部齐次导子

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

众所周知，Virasoro 代数是一类非常重要的无限维李代数，它在数学、物理等众多领域有着重要应用，曾有大量文献对 Virasoro 代数及其广义、超代数(N = 1 共形代数)情形，类似及其中间序列模等进行研究[1]-[6]。同时，也存在不同的广义(无中心)的 Virasoro 代数[7] [8]，文[7]研究了 Loop-Virasoro 代数，给出了在 Loop-Virasoro 代数上不可约 Harish-Chandra 模的分类。文[8]研究了广义 Loop 无中心的 Virasoro 代数的导子代数，自同构群和第二同调群。对李代数导子的研究是李理论中一个重要的课题，李代数的导子结构是李代数结构研究方向之一，对无限维 Virasoro 代数的导子也是如此，本文主要研究特征为零的代数闭域上广义 Loop-Witt 代数上的 2-局部齐次导子的性质。

设 $\mathcal{A}$ 是结合环或结合代数，$\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是线性映射，若对任意的 $x,y\in\mathcal{A}$ 有 $\delta(xy)=\delta(x)y+x\delta(y)$，则称 δ 为 $\mathcal{A}$ 的导子；如果存在 $x\in\mathcal{A}$ 使得对任意的 $y\in\mathcal{A}$ 有 $\delta(xy)=xy-yx$，则称 δ 为代数 $\mathcal{A}$ 上的内导子，记为 $\delta=adx$。另外，许多代数存在着不是内导子的导子，一些与导子相关的线性映射被发现，1990 年，Kadison (分别地，Larson 和 Sourour)在文[9]中引入了一类重要的映射——局部导子，$\mathcal{A}$ 上的线性映射 $T:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 称为局部导子，如果对给定的 $x\in\mathcal{A}$，有 $\mathcal{A}$ 的导子 δ_x (这里 δ_x 依赖于 x)使得 $T(x)=\delta_x(x)$。通过对局部导子的研究，相应的给出 2-局部导子的概念，1997 年，Semrl 在文[10]中将局部导子定义中的线性去掉，最先给出 2-局部导子的定义。称 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ (这里 φ 不一定是线性的)，如果对任意的 $x,y\in\mathcal{A}$，存在一个导子 $\varphi_{x,y}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ (这里 $\varphi_{x,y}$ 依赖于 x 和 y)，使得 $\varphi(x)=\varphi_{x,y}(x)$ 且 $\varphi(y)=\varphi_{x,y}(y)$，则称 φ 为 $\mathcal{A}$ 上的 2-局部导子。

近几年，2-局部导子的讨论是代数中比较活跃的研究领域，对 2-局部导子的研究主要集中在局部导子是否是导子[11] [12]。文[11]证明了特征为零代数闭域上有限维半单李代数的 2-局部导子都是导子，并且给出了维数大于 3 的幂零李代数不是导子的 2-局部导子的例子，文[12]得到了无限维 Witt 代数上的 2-局部导子都是导子的结论，并给出无限维李代数 2-局部导子不是导子的例子。本文将研究在特征为零的代数闭域上无限维广义 Loop-Witt 代数上定义的 2-局部齐次导子是否为导子的问题。

本文的第 1 部分给出了 Loop-Witt 代数的定义、符号和一些基本结果；第 2 部分证明在 Loop-Witt 代数上定义的每一个 2-局部齐次导子都是导子。

2. 预备知识

设 F 是特征为零的代数闭域，Γ 是域 F 的加法子群，且有 $1\in\Gamma$，$F[\Gamma]$ 是可换群 Γ 的群代数，它带有一组无限基 $\{d_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$，也记为 $W_L(\Gamma)$；$F[t,t^{-1}]$ 是域 F 上所有 Laurent 多项式构成的交换代数。

定义 2.1：令 $W_L(\Gamma)=W(\Gamma)\otimes F[t,t^{-1}]=Span_F\{d_\alpha\otimes t^i \mid \alpha\in\Gamma, i\in\mathbb{Z}\}$，称其为 F 上的广义 Loop-Witt 代数；它是 Γ-阶化的李代数：$W_L(\Gamma)=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}W_L(\Gamma)_\alpha$，其中子空间 $W_L(\Gamma)_\alpha=span\{d_\alpha\otimes t^i=d_\alpha t^i \mid i\in\mathbb{Z}\}$，并带有如下括积运算：

$$\left[d_\alpha t^i, d_\beta t^j\right] = (\beta-\alpha) d_{\alpha+\beta} t^{i+j}, \forall \alpha, \beta \in \Gamma,\ i, j \in \mathbb{Z}.$$

定义 2.2：设有线性映射 $D: W_L(\Gamma) \to W_L(\Gamma)$，如果对任意的 $x, y \in W_L(\Gamma)$，都有 $D([x,y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$，则称 D 为导子，所有导子构成的集合记为 $DerW_L(\Gamma)$；对 $z \in W_L(\Gamma)$，线性映射 $ad_z: W_L(\Gamma) \to W_L(\Gamma)$， $x \to ad_z(x) = [z, x]$ 是一个导子，称为内导子，所有内导子构成的集合记为 $adW_L(\Gamma)$。

定义 2.3：李代数 $W_L(\Gamma)$ 到其自身的映射 T (这里 T 不必是线性的)称为 $W_L(\Gamma)$ 的一个 2-局部导子，如果对任意的 $x, y \in W_L(\Gamma)$，都存在导子 $D_{x,y}$ （只与 x, y 有关)，使得 $T(x) = D_{x,y}(x)$， $T(y) = D_{x,y}(y)$。

根据文献[8]中给出的结果，有以下引理：

引理 2.1：对阶化李代数 $W_L(\Gamma)$，有 $DerW_L(\Gamma) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} (DerW_L(\Gamma))_\alpha$，其中 $(DerW_L(\Gamma))_\alpha = \left\{D \in DerW_L(\Gamma) \mid D\left(W_L(\Gamma)_\beta\right) \subset W(\Gamma)_{\alpha+\beta}; \forall \beta \in \Gamma\right\}$。

特别，当 $\alpha \neq 0$ 时，有包含关系： $(DerW_L(\Gamma))_\alpha \subset adW_L(\Gamma)$；

当 $\alpha = 0$ 时，有 $(DerW_L(\Gamma))_0 \simeq Hom_{\mathbb{Z}}\left(\Gamma, F\left[t, t^{-1}\right]\right) \oplus F\left[t, t^{-1}\right]\frac{d}{dt}$。

为了研究阶化李代数 $W_L(\Gamma)$ 的 2-局部导子，我们引入下列定义：

定义 2.4：对 $\forall n \in \Gamma$，称李代数 $W_L(\Gamma)$ 到其自身的映射 Δ （不一定是线性的)为 2-局部 n 次齐次导子，如果对任意的 $x, y \in W_L(\Gamma)$ 都能找到 $D_{x,y} \in Der(W_L(\Gamma))_n$，使得 $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$， $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$。

由引理 2.1 可知，当 $n \neq 0$ 时，广义 Loop-Witt 代数的导子都是内导子，从而 $W_L(\Gamma)$ 的 2-局部 n 次齐次导子($n \neq 0$) Δ 可以描述为：对任意的 $x, y \in W_L(\Gamma)$，必存在元素 $a_{x,y} \in W_L(\Gamma)_n$ （依赖于 x, y)，使得

$$\Delta(x) = \left[a_{x,y}, x\right],\ \Delta(y) = \left[a_{x,y}, y\right].$$

当 $n = 0$ 时，广义 Loop-Witt 代数 $W_L(\Gamma)$ 的零次导子都可以通过向量空间 $Hom_{\mathbb{Z}}\left(\Gamma, F\left[t, t^{-1}\right]\right) \oplus F\left[t, t^{-1}\right]\frac{d}{dt}$ 中的元素所诱导(见文献[8])。特别，对任意群同态 $\phi \in Hom_{\mathbb{Z}}\left(\Gamma, F\left[t, t^{-1}\right]\right)$，定义相应的 I-型零次导子：

$$D_\phi: W_L(\Gamma) \to W_L(\Gamma),\ d_\alpha t^i \to D_\phi\left(d_\alpha t^i\right) = \phi(\alpha) d_\alpha t^i,\ \forall \alpha \in \Gamma, i \in \mathbb{Z}.$$

对任意导子 $\rho \in F\left[t, t^{-1}\right]\frac{d}{dt}$，定义 II-型零次导子：

$$D^\rho: W_L(\Gamma) \to W_L(\Gamma),\ d_\alpha t^i \to D^\rho\left(d_\alpha t^i\right) = d_\alpha \rho\left(t^i\right),\ \forall \alpha \in \Gamma, i \in \mathbb{Z}.$$

3. 主要结果

现在给出本文的主要结果：广义 Loop-Witt 代数 $W_L(\Gamma)$ 的任何 2-局部齐次导子都是导子，其证明分两种情形进行讨论如下：

引理 3.1：设 Δ 是 $W_L(\Gamma)$ 的 2-局部 n 次齐次导子，且 $n \neq 0$。如果对某个单项式元素 $d_0 t^i \in W_L(\Gamma), i \in \mathbb{Z}$，有 $\Delta\left(d_0 t^i\right) = 0$，那么，映射 $\Delta \equiv 0$。

证明：任取元素 $x = \sum_{\alpha,i} k_{\alpha,i} d_\alpha t^i$，根据 2-局部 n 次齐次导子($n \neq 0$)的定义，必存在元素 $a_{d_0 t^i, x} \in (W_L(\Gamma))_n$，使得

$$\Delta\left(d_0 t^i\right) = \left[a_{d_0 t^i, x}, d_0 t^i\right],\ \Delta(x) = \left[a_{d_0 t^i, x}, x\right].$$

不妨设 $a_{d_0 t^i, x} = \sum_j k_j d_n t^j$ ，根据给定的条件得到

$$0 = \Delta\left(d_0 t^i\right) = \left[\sum_j k_j d_n t^j, d_0 t^i\right] = \sum_j k_j \left(-n\right) d_n t^{i+j},$$

从而有 $k_j = 0$ ， $\forall j \in \mathbb{Z}$ ，于是 $a_{d_0 t^i, x} = \sum_j k_j d_n t^j = 0$ 。因此，有

$$\Delta\left(x\right) = \left[a_{d_0 t^i, x}, x\right] = \left[\sum_j k_{n,j} d_n t^j, x\right] = 0,$$

由于元素 $x = \sum_{\alpha,i} k_{\alpha,i} d_\alpha t^i$ 是任意的，必有 $\Delta \equiv 0$ 。

定理 3.2：设 Δ 是广义 Loop-Witt 代数 $W_L\left(\Gamma\right)$ 的 2-局部 n 次齐次导子($n \neq 0$)，则存在元素 $x \in W_L\left(\Gamma\right)$ ，使得 $\Delta = ad_x$ 。

证明：根据 2-局部 n 次齐次导子的定义，对 $d_0 t^i, d_\alpha t^j \in W_L\left(\Gamma\right)$ ，能找到相应的元素 $D_{d_0 t^i, d_\alpha t^j} \in Der\left(W_L\left(\Gamma\right)\right)_n$ ，使得

$$\Delta\left(d_0 t^i\right) = D_{d_0 t^i, d_\alpha t^j}\left(d_0 t^i\right), \quad \Delta\left(d_\alpha t^j\right) = D_{d_0 t^i, d_\alpha t^j}\left(d_\alpha t^j\right).$$

令 $\Delta_1 = \Delta - D_{d_0 t^i, d_\alpha t^j}$ ，则 Δ_1 也是一个 2-局部 n 次齐次导子，且有

$$\Delta_1\left(d_0 t^i\right) = \Delta_1\left(d_\alpha t^j\right) = 0,$$

应用引理 3.1，直接推出：$\Delta_1 \equiv 0$ 。因此，$\Delta = D_{d_0 t^i, d_\alpha t^j}$ 是一个导子且为内导子。即存在元素 $x \in W_L\left(\Gamma\right)$ ，使得 $\Delta = ad_x$ 。

引理 3.3：设 Δ 是 $W_L\left(\Gamma\right)$ 的 2-局部零次齐次导子，Γ 是由 1 生成的加法子群.如果对某个 $\alpha \in \Gamma - \{0\}$ ，$j \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ，有 $\Delta\left(d_\alpha t^j\right) = 0$ ，则 $\Delta \equiv 0$ 。

证明：任取元素 $x = \sum_{n,i} k_{n,i} d_n t^i, d_\alpha t^j \in W_L\left(\Gamma\right), j \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ，若存在 I -型零次齐次导子 D_ϕ ，它只与 $d_\alpha t^j$ 和 x 有关，使得下式成立：

$$\Delta\left(d_\alpha t^j\right) = D_\phi\left(d_\alpha t^j\right), \Delta\left(x\right) = D_\phi\left(x\right).$$

根据给定的条件，有

$$0 = \Delta\left(d_\alpha t^j\right) = D_\phi\left(d_\alpha t^j\right) = \phi\left(\alpha\right) d_\alpha t^j,$$

必有， $\phi\left(\alpha\right) = 0$ 。再根据引理的条件，对任意的 $n \in \Gamma$ ，有 $\phi\left(n\right) = 0$ ，从而

$$\Delta\left(x\right) = D_\phi\left(\sum_{n,i} k_{n,i} d_n t^i\right) = \sum_{n,i} \phi\left(n\right) k_{n,i} d_n t^i = 0. \tag{3.1}$$

若存在 II-型零次齐次导子 D^ρ ，它只与 $d_\alpha t^j$ 和 x 有关，使得

$$\Delta\left(d_\alpha t^j\right) = D^\rho\left(d_\alpha t^j\right), \Delta\left(x\right) = D^\rho\left(x\right),$$

令 $\rho = tf\left(t\right)\frac{d}{dt} \in Der\left(F\left[t, t^{-1}\right]\right)$ ，根据给定的条件，有

$$0 = \Delta\left(d_\alpha t^j\right) = D^\rho\left(d_\alpha t^j\right) = d_\alpha \rho\left(t^j\right) = f\left(t\right) j d_\alpha t^j.$$

因为 $j \neq 0$，必有 $f(t)=0$。从而有下列式子：

$$\Delta(x)=D^{\rho}\left(\sum_{n,i}k_{n,i}d_n t^i\right)=\sum_{n,i}k_{n,i}f(t)id_n t^i=0. \tag{3.2}$$

由(3.1)和(3.2)可知，不管是哪种情况，总有 $\Delta \equiv 0$。

定理 3.4：设 Δ 是 $W_L(\Gamma)$ 的 2-局部零次齐次导子，Γ 是由 1 生成的加法子群，则存在导子 $D \in Der(W_L(\Gamma))_0$，使得 $\Delta = D$。

证明：根据 2-局部零次齐次导子的定义，对 $d_\alpha t^j, d_\beta t^k \in W_L(\Gamma), \alpha \neq 0, j \neq 0$，可以找到相应的零次导子 $D \in Der(W_L(\Gamma))_0$，使得

$$\Delta(d_\alpha t^j)=D(d_\alpha t^j), \Delta(d_\beta t^k)=D(d_\beta t^k).$$

令 $\Delta_1=\Delta-D$，则 Δ_1 也是一个 2-局部零次齐次导子，且有

$$\Delta_1(d_\alpha t^j)=\Delta_1(d_\beta t^k)=0.$$

应用引理 3.3，直接推出：$\Delta_1 \equiv 0$。因此，$\Delta = D$ 是一个零次导子。

注记 3.5：在定理 3.4 中，当 Γ 是整数加法群时，条件自动成立。此时，广义 Loop-Witt 代数 $W_L(\Gamma)$ 的任何 2-局部齐次导子都是导子；类似可说明，对有理数加法群，此结论同样成立。

致　谢

本论文是在王宪栋教授的悉心指导下完成的，感谢王老师一直以来的培养和教诲。王老师对学科前沿敏锐的洞察力和渊博的学识给我留下了深刻的印象，此外，他严谨的教学态度、一丝不苟的作风和踏踏实实的精神深深影响了我，这些都使我终身受益。

我还要感谢所有关心我、支持我和帮助过我的同学、老师和亲人。

最后，我要感谢国家自然科学基金项目的资助。

基金项目

本文受到国家自然科学基金项目(11472144)资助。

参考文献

[1] Su, Y.C. (2003) Classification of Harish-Chandra Modules over the Higher Rank Virasoro Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **240**, 217-231. https://doi.org/10.1007/s00220-003-0898-1

[2] Hu, N.H. (1999) q-Witt Algebras, q-Virasoro Algebra, q-Lie Algebras, q-Holomorph Structure and Representations. *Algebra Colloquium*, **6**, 51-70.

[3] Hu, N.H. (1998) Quantum Group Structure of the q-Deformed Virasoro Algebra. Letters in Mathematical Physics. *A Journal for the Rapid Dissemination of Short Contributions in the Field of Mathematical Physics*, **44**, 99-103. https://doi.org/10.1023/A:1007475521529

[4] Su, Y.C. and Zhao, K.M. (2002) Generalized Virasoro and Super-Virasoro Algebras and Modules of the Intermediate Series. *Journal of Algebra*, **252**, 1-19. https://doi.org/10.1016/S0021-8693(02)00021-2

[5] Mazorchuk, V. (2004) On Simple Mixed Modules over the Virasoro Algebra. *Matematychni Studii*, **22**, 21-128.

[6] Mazorchuk, V. and Zhao, K. (2007) Classification of Simple Weight Virasoro Modules with a Finite-Dimensional Weight Space. *Journal of Algebra*, **307**, 209-214. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.05.007

[7] Zhao, K., Lu, R. and Guo, X. (2011) Simple Harish-Chandra Modules, Intermediate Series Modules, and Verma Modules over the Loop-Virasoro Algebra. *Forum Mathematicum*, **23**, 1029-1052. https://doi.org/10.1515/form.2011.036

[8] Wu, H.N., Song, W. and Yue, X.Q. (2014) Structures of Generalized Loop Virasoro Algebras. *Communications in Al-*

gebra, **42**, 1545-1558. https://doi.org/10.1080/00927872.2012.744029

[9] Kadison, R. (1990) Local Derivations. *Journal of Algebra*, **130**, 494-509. https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90095-6

[10] Semrl, P. (1997) Local Automorphisms and Derivations on Beta (H). *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**, 2677-2680. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04073-2

[11] Ayupov, S. and Kudaybergenov, K. (2015) 2-Local Derivations on Finite-Dimensional Lie Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, **474**, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.01.016

[12] Ayupov, S. and Yusupov, B. (2019) 2-Local Derivations on Infinite-Dimensional Lie Algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, **1**, 1-9. https://doi.org/10.1142/S0219498820501005