Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 325-329
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104041

Hans汉斯

Some Research on L-Semi-Topology Space

Fei Li, Peiyong Zhu

School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan
Email: 3055619508@qq.com, zpy6940@uest.edu.cn

Received: Mar. 22nd, 2020; accepted: Apr. 9th, 2020; published: Apr. 17th, 2020

Abstract

Firstly, we explore the properties of point set on L-semi-topology space, discuss the properties of L-semi-topology subspace, and then get some results in the L-semi-topology space. On this basis, we discuss the comparison of L-semi-topology and L-semi-topology; thus, L-semi-topology theory is further enriched.

Keywords

L-Semi-Topology, L-Semi-Topology Subspace, L-Semi Topological Basis, L-Semi Topology Comparison

关于L-半拓扑空间上的一些探究

李　飞，朱培勇

电子科技大学数学科学学院，四川 成都
Email: 3055619508@qq.com, zpy6940@uest.edu.cn

收稿日期：2020年3月22日；录用日期：2020年4月9日；发布日期：2020年4月17日

摘　要

本文首先对L-半拓扑空间中的点集性质进行了研究，然后对L-半拓扑子空间的性质进行了研究，得到了L-半拓扑空间中的一些结果，在此基础上对L-半拓扑的比较、L-半拓扑基进行了讨论，从而进一步地丰富了L-半拓扑空间理论。

关键词

L-半拓扑，L-半拓扑子空间，L-半拓扑基，L-半拓扑的比较

文章引用: 李飞, 朱培勇. 关于L-半拓扑空间上的一些探究[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 325-329.
DOI: 10.12677/pm.2020.104041

1. 引言与预备知识

匈牙利数学家 A. Csaszar 2002 年在文献[1]中提出广义拓扑空间的概念，并且对广义拓扑空间的性质进行研究，此后不少学者也积极投入，例如文献[2]-[9]，在广义拓扑空间的点集性质、映射性质以及收敛性质等方面取得了一系列的研究成果。由于广义拓扑实际上是一类半拓扑，2015 年文献[10]把广义拓扑重新命名为上半拓扑，进而引入了下半拓扑的概念，并且获得了关于下半拓扑中的一些很有意义的结果，在此，一个问题自然地被提出：

问题 能否类比文献[10]，将拓扑定义中(O1)、(O2)、(O3)三个条件(参见文献[11])重新组合，将其重新分成两个半拓扑(左半拓扑和右半拓扑)，进而得到一些比拓扑空间理论更弱的一些数学结果？

关于这个问题，文献[12] [13] [14] [15]做了一些工作。本文将在文献[15]的基础上对 L-半拓扑进行更进一步研究。主要讨论了 L-半拓扑空间中的点集性质、L-半拓扑的比较、L-半拓扑基。

下面是文献[15]引入关于 L-半拓扑空间的一些基本概念。

1) 设 X 是任一非空集合，δ 是 X 的一些子集构成的集族，如果下列条件被满足：

(O1) $X\in\delta$；(O2) 若 $G_\lambda\in\delta(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\delta$ (其中 Λ 为任意指标集)。则称 δ 为集合 X 的 L-半拓扑，并且称有序偶 (X,δ) 为一个 L-半拓扑空间，集族 δ 中的每一个集合都称为 L-半拓扑空间 (X,δ) 的 L-开集。

2) 设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$x\in X,U\subset X$，如果 $\exists G\in\delta$，使得 $x\in G\subset U$，则称 U 为点 x 的一个 L-邻域，x 点邻域的全体称为点 x 的 L-邻域系，记作 $\mathcal{U}(x)$，并称 $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}(x)\mid x\in X\}$ 为由 L-半拓扑 δ 导出的 X 的 L-邻域系。

3) 设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$A\subset X$，若 $x\in A\in\mathcal{U}(x)$ (即 $\exists G\in\delta$，使得 $x\in G\subset A$)，则称点 x 为点集 A 的 L-内点。点集 A 的内点的全体称为 A 的内部，记为 A_l^0 或 $\operatorname{int}A$。

4) 设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$A\subset X,x\in X$，如果 $\forall U\in\mathcal{U}(x)$，有 $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$，则称 x 为点集 A 的 L-聚点，点集 A 的聚点的全体称为 A 的 L-导集，记为 A_l'。

5) 设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$A\subset X$，记 $\bar{A}_L=A\cup A'$，则称 $\bar{A}_L$ 为 A 的 L-闭包。

6) 设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$F\subset X$。若 $F^c=X-F\in\delta$，则称 F 为 X 的 L-闭集。

7) 设 A 为 X 中任意非空子集，并记 $\delta|_A=\{G\cap A\mid G\in\delta\}$，则 $\delta|_A$ 为 A 上的一个 L-半拓扑，为此，称 $\delta|_A=\{G\cap A\mid G\in\delta\}$ 为 X 上 L-半拓扑 δ 的一个子拓扑。其中 $(A,\delta|_A)$ 称为是 (X,δ) 的 L-半拓扑子空间，为了方便，常常简称 A 为 X 的 L-子空间。

如果没有特别声明，本文所涉及的一切概念、记号等都取自于文献[15]或者文献[11]。

2. 关于 L-半拓扑空间中的基本点集

首先，在文献[15]的基础上，我们有如下进一步的结果：

定理 2.1 集合 X 上的任意两个 L-半拓扑的交也是 X 上的一个 L-半拓扑；集合 X 上的任意两个 L-半拓扑的并不一定是 X 上的一个 L-半拓扑。

证明：因为 $X\in\delta_1$ 且 $X\in\delta_2$，则 $X\in\delta_1\cap\delta_2$；$\forall G_\lambda\in\delta_1\cap\delta_2$，有 $G_\lambda\in\delta_1$ 且 $G_\lambda\in\delta_2$，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\delta_1$ 且

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \in \delta_2$，故 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \in \delta_1 \cap \delta_2$。因此两个 L-半拓扑的交仍是 X 上的一个 L-半拓扑。

下面用反例说明：集合 X 上的任意两个 L-半拓扑的并不一定是 X 上的一个 L-半拓扑。

事实上，可取 $X=\{a,b,c\}$，$\delta_1=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$，$\delta_1=\{\{b\},\{c\},\{b,c\},X\}$，则 $\delta_1\cup\delta_2=\{\{a\},\{b\},\{c\}.\{a,b\},\{b,c\},X\}$。显然，$\{a\}\cup\{c\}=\{a,c\}\notin\delta_1\cap\delta_2$，故 $\delta_1\cup\delta_2$ 不是一个L-半拓扑。

定理2.2 设 (X,δ) 为L-半拓扑空间，$A\subset X$，则(1) $A\in\delta$ 当且仅当 $A=A^0$；(2) $\bar{A}_L$ 必为闭集；(3) $\bar{A}_L$ 等于包含A的一切L-闭集的交。

证明： 1) (必要性) 因为 $A\in\delta$，则对 $\forall x\in A$，$\exists G=A\in\delta$，使得 $x\in G\subset A$，故 x 是 A 的 L-内点，所以，$A\subset A^0$。又因 $A^0\subset A$，故有 $A=A^0$；(充分性) $\forall x\in A^0$，即 x 是 A 的 L-内点，故 $\exists G_x\in\delta$，使得 $x\in G_x\subset A$。因此，$A^0=\bigcup_{x\in A^0}\{x\}\subset\bigcup_{x\in A^0}G_x\subset A$。又因 $A=A^0$，故 $A=\bigcup_{x\in A^0}G_x\in\delta$。

2) 反证：若 $\bar{A}_L$ 不是闭集，则由文献[15]**定理 2.5**，有 $\bar{\bar{A}}_L\neq\bar{A}_L$；但又由文献[15]**定理 2.4** 的(LC3)，有 $\bar{\bar{A}}_L=\bar{A}_L$，这就产生矛盾。所以，$\bar{A}_L$ 必为闭集。

3) 因为 $\bar{A}_L$ 是 L-闭集并且 $A\subset A\cup A'_L=\bar{A}_L$，则 $\bigcap\{F\text{闭于}X\text{且}A\subset F\}\subset\bar{A}_L$；反过来，还需证明：$\bar{A}_L\subset\bigcap\{F\text{闭于}X\text{且}A\subset F\}$，即需证：任何包含 A 的 L-闭集 F，必有 $\bar{A}_L\subset F$。事实上，如果存在 L-闭集 $F\supset A$，但 $F\not\supset\bar{A}_L=A\cup A'$，则 $F\not\supset A'$。取 $x\in A'-F$，因为 $F^C\in\mathcal{U}(x)$，所以 $F^C\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$，故 $F^C\cap A\neq\varnothing$。这与 $A\subset F$ 矛盾。即 $\bar{A}_L\subset\bigcap\{F\text{闭于}X\text{且}A\subset F\}$，从而 $\bar{A}_L=\bigcap\{F\text{闭于}X\text{且}A\subset F\}$。

下面是关于子空间的一个结果：

定理 2.3 设 A 为 X 的 L-子空间，B 为 A 的 L-子空间，则 B 为 X 的 L-子空间。

证明： 设 δ 为 X 上的一个 L-半拓扑并且 $B\subset A\subset X$，我们只需证明 $(\delta_A)|_B=\delta|_B$。事实上 $\forall U\in(\delta|_A)|_B$，$\exists V\in\delta|_A$，使得 $U=V\cap B$。又对于 $V\in\delta|_A$，$\exists W\in\delta$，使得 $V=W\cap A$。从而 $U=V\cap B=(W\cap A)\cap B=W\cap(A\cap B)=W\cap B\in\delta|_B$。所以 $(\delta|_A)|_B\subset\delta|_B$。

反过来，$\forall U\in\delta|_B$，$\exists W\in\delta$，使得 $U=W\cap B=(W\cap A)\cap B$，即 $\exists V=W\cap A\in\delta|_A$ 使得 $U=V\cap B$，即 $U\in(\delta_A)|_B$。从而 $\delta|_B\subset(\delta|_A)|_B$。因此 $(B,(\delta_A)|_B)=(B,\delta|_B)$ 是 (X,δ) 的 L-子空间。

作为这一节最后，我们用下面例子说明：点 x 的 L-邻域，未必一定是包含 x 的 L-开集：

例 2.4 设 $X=\{a,b,c\},\delta=\{\{a,b\},\{a\},X\}$，容易验证：$\delta$ 是 X 上一个 L-半拓扑，且 $U=\{a,c\}$ 为点 a 的一个邻域，但 U 不是 L-半拓扑空间 (X,δ) 中的 L-开集。

3. L-半拓扑的比较

定义 3.1 设 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，如果 $\delta_1\subset\delta_2$，则称 δ_1 是比 δ_2 更粗的 L-半拓扑，或称 δ_2 是比 δ_1 更细的 L-半拓扑。

定理 3.1 设 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，$\mathcal{U}_1(x)$ 与 $\mathcal{U}_2(x)$ 分别为 x 关于 δ_1 与 δ_2 的邻域系，则 δ_1 是比 δ_2 更粗的拓扑当且仅当 $\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_1(x)$，$\exists V\in\mathcal{U}_2(x)$ 使得 $V\subset U$。

证明： (必要性) 设 $\delta_1\subset\delta_2$，$\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_1(x)$，$\exists V\in\delta_1$，使 $x\in V\subset U$，因为 $x\in V\in\delta_2$，故 $V\in\mathcal{U}_2(x)$，有 $V\subset U$。

(充分性) $\forall U\in\delta_1$ 若 $U\neq\varnothing$，则 $\forall x\in U$ 有 $U\in\mathcal{U}_1(x)$。由已知，$\exists V_x\in\mathcal{U}_2(x)$，有 $V_x\subset U$。因此 $\exists W_x\in\delta_2$，使得 $x\in W_x\subset V_x\subset U$，所以 $U=\bigcup_{x\in U}W_x\in\delta_2$，从而 $\delta_1\subset\delta_2$。

推论 3.2 设 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，若 $\delta_1\subset\delta_2$，$\mathcal{F}_{\delta_1}$ 和 $\mathcal{F}_{\delta_2}$ 分别是关于 δ_1 和 δ_2 的全体闭集构成的集族，则 δ_1 是比 δ_2 更粗的 L-半拓扑当且仅当 $\mathcal{F}_{\delta_1}\subset\mathcal{F}_{\delta_2}$。

证明：(必要性) $\forall F\in\mathcal{F}_{\delta_1}$，有 $X-F\in\delta_1$，因 $\delta_1\subset\delta_2$，则 $X-F\in\delta_2$，故 $X-(X-F)=F\in\mathcal{F}_{\delta_2}$，从而 $\mathcal{F}_{\delta_1}\subset\mathcal{F}_{\delta_2}$。

(充分性) 对于 $\forall G\in\delta_1$，有 $X-G\in\mathcal{F}_{\delta_1}$，因 $\mathcal{F}_{\delta_1}\subset\mathcal{F}_{\delta_2}$，则 $X-G\in\mathcal{F}_{\delta_2}$，故 $X-(X-G)=G\in\delta_2$，因此 $\delta_1\subset\delta_2$，故 δ_1 是比 δ_2 更粗的 L-半拓扑。

定理 3.3 设 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，若 $\delta_1\subset\delta_2$，则 $\forall x\in X$，有 $\mathcal{U}_1(x)\subset\mathcal{U}_2(x)$。反之，结论不成立。

证明：1) 设 $\delta_1\subset\delta_2$，对于 $\forall x\in X$，$\forall U\in\mathcal{U}_1(x)$，$\exists G\in\delta_1$，使得 $x\in G\subset U$。因为 $\delta_1\subset\delta_2$，则 $G\in\delta_2$ 并且 $x\in G\subset U$，故 $U\in\mathcal{U}_2(x)$，所以 $\mathcal{U}_1(x)\subset\mathcal{U}_2(x)$。

2) 反之，可取 $X=\{1,2\}$，$\delta_1=\{\varnothing,X,\{1\},\{2\}\}$，$\delta_2=\{X,\{1\},\{2\}\}$，则 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，由 L-半拓扑空间中邻域的定义有 $\mathcal{U}_1(1)=\{\{1\},X\}$，$\mathcal{U}_2(1)=\{\{1\},X\}$，故 $\mathcal{U}_1(1)\subset\mathcal{U}_2(1)$ 又 $\mathcal{U}_1(2)=\{\{2\},X\}$，$\mathcal{U}_2(2)=\{\{2\},X\}$，故 $\mathcal{U}_1(2)\subset\mathcal{U}_2(2)$，因此 $\mathcal{U}_1(x)\subset\mathcal{U}_2(x)$，但是 $\delta_1\not\subset\delta_2$。

推论 3.4 设 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，若 $\delta_1\subset\delta_2$，则 $\forall A\subset X$，有 $A^O_{\delta_1}\subset A^O_{\delta_2}$。反之，结论不成立。

证明：1) $\forall x\in A^O_{\delta_1}$，$\exists G\in\delta_1$，使得 $x\in G\subset A$，又 $\delta_1\subset\delta_2$，因此 $\exists G\in\delta_2$，使得 $x\in G\subset A$，则 $x\in A^O_{\delta_2}\Rightarrow A^O_{\delta_1}\subset A^O_{\delta_2}$。

2) 反之可取 $X=\{a,b\}$，$\delta_1=\{\{a\},\{b\},X\}$，$\delta_2=\{\{a\},X\}$，$A=\{a\}$，则 $A^O_{\delta_1}=\{a\}$，$A^O_{\delta_2}=\{a\}$，有 $A^O_{\delta_1}\subset A^O_{\delta_2}$，但 $\delta_1\not\subset\delta_2$，故反之结论不成立。

推论 3.5 设 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，若 $\delta_1\subset\delta_2$，则 $\forall A\subset X$，有 $A'_{\delta_2}\subset A'_{\delta_1}$。反之，结论不成立。

证明：1) $\forall x\in A'_{\delta_2}$，对于 $\forall U\in\mathcal{U}_{\delta_2}(x)$，有 $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$，又 $\mathcal{U}_{\delta_1}(x)\subset\mathcal{U}_{\delta_2}(x)$，故 $\forall U\in\mathcal{U}_{\delta_1}(x)$，有 $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$，则 $x\in A'_{\delta_1}$，因此 $A'_{\delta_2}\subset A'_{\delta_1}$。

2) 反之可取 $X=\{a,b,c\}$，$\delta_1=\{\{a,b\},\{b,c\},X,\varnothing\}$，$\delta_2=\{\{a,b\},\{b,c\},X\}$，$A=\{a,b\}$，则 $A'_{\delta_1}=\{a,c\}$，$A'_{\delta_2}=\{a,c\}$ 显然有 $A'_{\delta_2}\subset A'_{\delta_1}$，但 $\delta_1\not\subset\delta_2$，故反之结论不成立。

推论 3.6 设 δ_1,δ_2 是 X 上的两个 L-半拓扑，若 $\delta_1\subset\delta_2$，则 $\forall A\subset X$，有 $\overline{A}_{\delta_2}\subset\overline{A}_{\delta_1}$。反之，结论不成立。

证明：由**推论 3.5** 可知若 $\delta_1\subset\delta_2$，则有 $A'_{\delta_2}\subset A'_{\delta_1}$，又 $\overline{A}_{\delta_2}=A'_{\delta_2}\cup A$，$\overline{A}_{\delta_1}=A'_{\delta_1}\cup A$，由此可得 $\overline{A}_{\delta_2}\subset\overline{A}_{\delta_1}$。

反之可取 $X=\{a,b,c\}$，$\delta_1=\{\{a,b\},\{b,c\},X,\varnothing\}$，$\delta_2=\{\{a,b\},\{b,c\},X\}$，$A=\{a,b\}$，则 $\overline{A}_{\delta_2}=\{a,b,c\}$，$\overline{A}_{\delta_1}=\{a,b,c\}$ 显然有 $\overline{A}_{\delta_2}\subset\overline{A}_{\delta_1}$，但 $\delta_1\not\subset\delta_2$，故反之结论不成立。

4. 关于 L-半拓扑基以及 L-半拓扑基的一些性质

定义 4.1 设 (X,δ) 是 L-半拓扑空间，$\mathfrak{B}\subset\delta$，如果 $\forall G\in\delta$，存在 $\{B_\lambda/\lambda\in\Lambda\}\subset\mathfrak{B}$，使得 $G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，则称$\mathfrak{B}$为 L-半拓扑 δ 的一个基，$\mathfrak{B}$ 为 X 的一个 L-拓扑基。

定理 4.1 设 (X,δ) 是一个 L-半拓扑空间，$\mathfrak{B}$ 为 L-半拓扑 δ 的一个基当且仅当 $\forall G\in\delta$，$\forall x\in G$，$\exists B\in\mathfrak{B}$，使得 $x\in B\subset G$。

证明 (必要性) 设 $\mathfrak{B}$ 为 δ 的一个基，即 $\forall G\in\delta$，$\forall x\in G$，$\exists\{B_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subset\mathfrak{B}$，使得 $G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，故 $\forall x\in G$，$\exists B\in\mathfrak{B}$，使得 $x\in B\subset G$。

(充分性) $\forall G\in\delta$，因为 $\forall x\in G$，$\exists B_x\in\mathfrak{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$，故 $G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_x$，由定义可知 $\mathfrak{B}$ 为 δ

的一个基。

在一般拓扑空间中有：

定理 4.2 [11]设$(X,\mathcal{T})$是一个拓扑空间，$\mathfrak{B}$为$\mathcal{T}$的一个基，则$\mathfrak{B}$满足下面两个条件：(B_1) $\bigcup\mathfrak{B}=X$；(B_2) $\forall B_1,B_2\in\mathfrak{B}$，$\forall x\in B_1\cap B_2$，必$\exists B\in\mathfrak{B}$，使得$x\in B\subset B_1\cap B_2$。

这两条性质在一般拓扑空间中成立，但在L-半拓扑空间中(B_1)成立，(B_2)不成立。

在L-半拓扑空间中，(B_1)成立是不言而喻的。但是，(B_2)是不成立的，下面举例子说明这个问题：

取$X=\{1,2,3,4\}$，$\delta=\{X,\{1\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$，则$\mathfrak{B}=\{X,\{1\},\{1,2\},\{2,3\}\}$，存在$B_1=\{1,2\}$，$B_2=\{2,3\}$，$2\in B_1\cap B_2=\{2\}$，即不存在$B\in\mathfrak{B}$，使得$x\in B\subset B_1\cap B_2$，故($B_2$)不成立。

5. 小结

本文首先引入L-半拓扑的概念，然后讨论了L-半拓扑空间的中点集理论、L-半拓扑子空间的性质、L-半拓扑基的性质以及L-半拓扑的比较，并且获得了一些相应的成果，从而，使L-半拓扑的基本性质得到推广。同时，也通过反例举出了在拓扑空间上成立而在L-半拓扑空间中不成立的一些结果。

参考文献

[1] Csaszar, A. (2002) Generalized Topology, Generalized Continuity. *Acta Mathematica Hungarica*, **96**, 351-357. https://doi.org/10.1023/A:1019713018007

[2] Csaszar, A. (2005) Generalized Open Sets in Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **106**, 53-66. https://doi.org/10.1007/s10474-005-0005-5

[3] Csaszar, A. (2009) Products of Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **123**, 127-132. https://doi.org/10.1007/s10474-008-8074-x

[4] Csaszar, A. (2004) Separation Axioms for Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **104**, 63-69. https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000034362.97008.c6

[5] Sarsak, M.S. (2011) Weak Separation Axioms in Generalized Topological Spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **131**,110-121. https://doi.org/10.1007/s10474-010-0017-7

[6] Shen, R. (2009) Remarks on Products of Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **124**, 363-369. https://doi.org/10.1007/s10474-009-8207-x

[7] Min, W.K. (2010) Remarks on Separation Axioms on Generalized Topological Space. *Chungcheong Mathematical Society*, **23**, 293-298.

[8] Min, W.K. (2010) Generalized Continuous Functions Defined by Generalized Open Sets on Generalized Topological Spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **128**, 299-306. https://doi.org/10.1007/s10474-009-9037-6

[9] Min, W.K. (2009) Almost Continuity on Generalized Topologicalspace. *Acta Mathematica Hungarica*, **125**, 121-125. https://doi.org/10.1007/s10474-009-8230-y

[10] 胡西超，朱培勇．一类新型半拓扑空间及其分离性质[J]．理论数学, 2015, 5(4): 129-135.

[11] 朱培勇，雷银彬．拓扑学导论[M]．北京：科学出版社, 2009: 33-43.

[12] 钟健，陈道富，朱培勇．关于右半拓扑空间上的一些结果[J]．理论数学, 2016, 6(3): 217-222.

[13] 靳敏倩，朱培勇． 关于R-半拓扑空间的一些探究[J]．理论数学, 2016, 6(6): 459-463.

[14] 宋颖潇，丁猛，朱培勇．广义拓扑的比较[J]．四川理工学院学报：自然科学版, 2015, 28(4): 86-88.

[15] 陈道富，钟健，朱培勇．关于L-半拓扑空间的一些注记[J]．理论数学, 2015, 5(6): 272-277.