Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 540-548
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105066

Seven Different Types of Coloring Formulas for Regular Polyhedrons

Renbing Xiao

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1341053221@qq.com

Received: Apr. 25th, 2020; accepted: May 18th, 2020; published: May 25th, 2020

Abstract

In this paper we obtain the coloring formulas of vertex, edge, surface, point edge, point surface, edge surface, and point edge surface of regular polyhedrons by using Pólya theorem. Our method is to use the knowledge of permutation groups. First we determine the rotation groups of all regular polyhedrons, and then we determine the permutation types and the numbers of elements in the induced permutation groups. Then the formulas are obtained by considering the actions of the groups on the set.

Keywords

Regular Polyhedron, Rotation Group, Coloring Formula, Pólya Theorem

正多面体的七种不同类型的着色公式

肖仁兵

云南师范大学数学学院，云南 昆明
Email: 1341053221@qq.com

收稿日期：2020年4月25日；录用日期：2020年5月18日；发布日期：2020年5月25日

摘 要

本文我们研究正多面体的顶点、边、面、点边、点面、边面和点边面的着色公式。我们通过考虑正多面体的自同构群(旋转群)在正多面体点、边、面等个体集合上的作用，先求出所有正多面体的旋转群，进而得到这些旋转群在正多面体点、边、面等个体集合上的诱导作用及旋转群中元素的置换类型及个数，然后利用**Pólya**定理得出正多面体的顶点、边、面、点边、点面、边面和点边面的着色公式。

文章引用: 肖仁兵. 正多面体的七种不同类型的着色公式[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 540-548.
DOI: 10.12677/pm.2020.105066

关键词

正多面体，旋转群，着色公式，Pólya定理

1. 引言

图着色问题是图论和组合数学中的一个经典问题，着色问题的研究极大地促进了图论和组合数学的发展。近年来，用代数方法研究图着色问题是解决这一古老问题的重要途径。所谓正多面体的顶点着色问题如下：用 m 种颜色给对一个正多面体的顶点着色，如果两种着色方法经过对正多面体进行一次对称旋转能互相重合，则认为这两种着色本质上是一样的，问本质上有多少种不同的着色？定义详见文献[1]，同时文献[1]中还给出了正六面体的着色公式。此外叶载良，韩冬在文献[2]中利用 Burnside 定理给出了其它四种正多面体的顶点着色公式，本文我们利用 Pólya 定理给出五种正多面体的顶点、边、面、点边、点面、边面和点边面的着色公式。

2. 预备知识

这一节中我们先给出本文需要的一些预备知识，本文中涉及图着色的概念可参见文献[1]，涉及置换群与群作用的概念和内容可参见文献[3]。

定义 **1.1** [4]设 A 是一个 n 元集，G 是 A 上的一个置换群，$g \in G$，如果 g 的轮换分解式中含有 $b_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 个长为 i 的轮换($b_1+2b_2+\cdots+nb_n=n$)，则称 g 是一个型为($b_1,b_2,\cdots,b_n$)的 n 元置换，或称 g 是一个型为 $1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}$ 的 n 元置换。

定义 **1.2** [4]设 G 是 n 元集 A 上的一个置换群，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个未定元，对每个 $g \in G$，以 $b_i\left(g\right)$ ($i=1,2,\cdots,n$)表示 g 的轮换分解式所含有的长为 i 的轮换的个数，令

$$P_G\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x_1^{b_1(g)}x_2^{b_2(g)}\cdots x_n^{b_n(g)}$$

$P_G\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 称为 A 上的置换群(G，。)的轮换指标。

定理 1 (Pólya 定理) [5]设有限群作用在 n 个对象组成的集合 W 上。G 中元素 g 在上的置换表示记作 $\hat{g}$。用 m 种颜色给 W 里的 n 个对象染色，则真正不同的染色方案的个数 r 为：

$$r=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}m^{r(\hat{g})}$$

其中 $r\left(\hat{g}\right)$ 是 $\hat{g}$ 的轮换表示中轮换的个数(包括 1-轮换)。

定理 2 (Burnside 引理) [5]设有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，用 $F(g)$表示 g 的不动点集，即

$$F\left(g\right)=\left\langle x\in\Omega \middle| g\circ x=x\right\rangle$$

则轨道条数 r 为

$$r=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|F\left(g\right)\right|$$

即轨道条数等于平均被 G 的一个元素保持不动的点的数目。

参考文献[6]，三维空间中总共有五个正多面体，分别为：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体，具体如下表 1。

Table 1. Number of vertices, sides, number of faces and shape of regular polyhedron
表 1. 正多面体的顶点数，边数，面数和面的形状

正多面体	顶点数	边数	面数	每个面的形状
正四面体	4	6	4	正三角形
正六面体	8	12	6	正方形
正八面体	6	12	8	正三角形
正十二面体	20	30	12	正五边形
正二十面体	12	30	20	正三角形

3. 主要结果

我们的讨论的主要依赖于对正多面体的旋转轴的分类。下面我们依次对正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体确定其旋转轴的类型，然后确定在相应子图上的诱导作用，最后利用 Pólya 定理得到这些正多面体的着色公式。

1) 正四面体：由表 1 知正四面体的顶点数、边数及面数分别为 4，6，4。图形结构如图 1 所示。我们给图形顶点标上数字标号，4 个顶点如图依次记为 1，2，3，4；6 条边依次记为：$e_1(1\,2)$，$e_2(1\,3)$，$e_3(1\,4)$，$e_4(2\,3)$，$e_5(2\,4)$，$e_6(3\,4)$。4 个面依次记为：$u_1(123)$，$u_2(124)$，$u_3(134)$，$u_4(2\,3\,4)$。

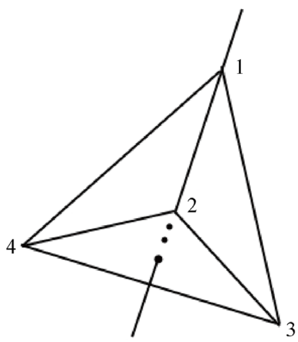

Figure 1. Regular tetrahedron structure diagram
图 1. 正四面体结构图

正四面体的旋转轴可分为两类：

I 类为过一顶点与底面中心的连线为轴，旋转 120°和 240°，取旋转群中元素为通过顶点 1 和其对面 $u_4(2\,3\,4)$ 中心的连线旋转 120°，其点置换 $(1)\,(2\,3\,4)$ 是 $1^1 3^1$ 型置换，对应的边置换为 $(e_1e_2e_3)\,(e_4e_6e_5)$ 是 3^2 型置换，对应的面置换为 $(u_4)\,(u_1u_2u_3)$ 是 $1^1 3^1$ 型置换，有四条类似轴，两种转角，共 8 个元素；

II 类为过两条对边中点连线的轴，旋转 180°，以 $e_1(1\,2)$ 与其对边 $e_6(3\,4)$ 的中点连线为轴旋转 180°为例，其点置换 $(1\,2)\,(3\,4)$ 是 2^2 型置换，求得对应的边置换为 $(e_1)\,(e_6)\,(e_2e_5)\,(e_3e_4)$ 是 $1^2 2^2$ 型置换，对应的面置换为 $(u_1u_2)\,(u_3u_4)$ 是 2^2 型置换，有三组对边，一种转角，共 3 个元素。

加上单位元，点置换群 V_4 有 1^4 型 1 个，$1^1 3^1$ 型 8 个，2^2 型 3 个；边置换群 E_4 有 1^6 型 1 个，3^2 型 8

个，$1^2 2^2$ 型 3 个；面置换群 U_4 有 1^4 型 1 个，$1^1 3^1$ 型 8 个，2^2 型 3 个；对每个类型置换计算不动点数，由 Pólya 定理即可得到正四面体的 m 种颜色的顶点、边、面着色公式为：

$$N_{V_4}=\frac{1}{12}\left(m^4+11m^2\right),\quad N_{E_4}=\frac{1}{12}\left(m^6+3m^4+8m^2\right),\quad N_{U_4}=\frac{1}{12}\left(m^4+11m^2\right)$$

如果我们考虑正四面体旋转群 G 作用在包含正四面体顶点和边的集合 $W=\{1,2,3,4,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ 上，导出的群称为点边置换群 VE_4，则 I 类旋转为过一顶点与底面中心的连线为轴，旋转 120°和 240°，取 G 中元素 g_1 为通过顶点 1 和其对面 u_4 (2 3 4)中心的连线旋转 120°，作用在集合 W 上，得到的置换表示称为点边置换，得到 $\hat{g}_1=(1)(2\,3\,4)\ (e_1e_2e_3)\ (e_4e_6e_5)$ 是 $1^1 3^3$ 型置换，有四条类似轴，两种转角，共 8 个元素；II 类旋转为过两条对边中点连线的轴，旋转 180°，取 G 中元素 g_2 为以 $e_1(1\,2)$ 与其对边 $e_6(3\,4)$ 的中点连线为轴旋转 180°，得到 $\hat{g}_2=(1\,2)(3\,4)\ (e_1)\ (e_6)\ (e_2e_5)\ (e_3e_4)$ 是 $1^2 2^4$ 型置换，有三组对边，一种转角，共 3 个元素；加上单位元，则点边置换群 VE_4 有 1^{10} 型 1 个，$1^1 3^3$ 型 8 个，$1^2 2^4$ 型 3 个。由 Pólya 定理即可得到正四面体的 m 种颜色的点边着色公式为：

$$N_{VE_4}=\frac{1}{12}\left(m^{10}+3m^6+8m^4\right)$$

所以我们可以类似的得出正四面体的点面置换群 VU_4 有 1^8 型 1 个，$1^2 3^2$ 型 8 个，2^4 型 3 个；边面置换群 EU_4 有 1^{10} 型 1 个，$1^1 3^3$ 型 8 个，$1^2 2^4$ 型 3 个；点边面置换群 VEU_4 有 1^{14} 型 1 个，$1^2 3^4$ 型 8 个，$1^2 2^6$ 型 3 个；由 Pólya 定理即可得到正四面体的 m 种颜色的点面、边面和点边面着色公式分别为：

$$N_{VU_4}=\frac{1}{12}\left(m^8+11m^4\right),\quad N_{EU_4}=\frac{1}{12}\left(m^{10}+3m^6+8m^4\right),\quad N_{VEU_4}=\frac{1}{12}\left(m^{14}+3m^8+8m^6\right)$$

2) 正六面体：由表 1 知正六面体的顶点数、边数及面数分别为 8，12，6。图形结构如图 2 所示。我们给图形顶点标上数字标号，8 个顶点如图依次记为 $1,2,\cdots,8$ 表示。12 条边依次记为：$e_1(1\,2)$，$e_2(2\,3)$，$e_3(3\,4)$，$e_4(1\,4)$，$e_5(5\,6)$，$e_6(6\,7)$，$e_7(7\,8)$，$e_8(5\,8)$，$e_9(1\,5)$，$e_{10}(2\,6)$，$e_{11}(3\,7)$，$e_{12}(4\,8)$。6 个面依次记为：$u_1(1\,2\,3\,4)$，$u_2(5\,6\,7\,8)$，$u_3(1\,2\,5\,6)$，$u_4(3\,4\,7\,8)$，$u_5(1\,4\,5\,8)$，$u_6(2\,3\,6\,7)$。

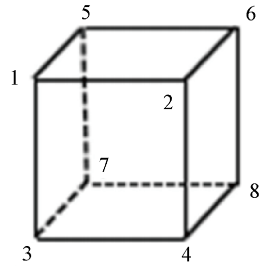

Figure 2. Regular hexahedron structure diagram
图 2. 正六面体结构图

正六面体的旋转轴可分为三类：

I 类为过对面中心的连线为轴，旋转 90°、180°和 270°，(a) 取旋转群中元素为通过面 $u_1(1\,2\,3\,4)$ 和其对面 $u_2(5\,6\,7\,8)$ 中心的连线旋转 90°，其点置换 $(1\,2\,3\,4)\ (5\,6\,7\,8)$ 是 4^2 型置换，边置换为 $(e_1e_2e_3e_4)\ (e_5e_6e_7e_8)\ (e_9e_{10}e_{11}e_{12})$ 是 4^3 型置换，对应的面置换为 $(u_1)\ (u_2)\ (u_3u_6u_4u_5)$ 是 $1^2 4^1$ 型置换，有三组对面，90°、270°两种转角，共 6 个元素；(b) 取旋转群中元素为通过面 $u_1(1\,2\,3\,4)$ 和其对面 $u_2(5\,6\,7\,8)$ 中心的连线旋转 180°时，其点置换 $(1\,3)\ (2\,4)\ (5\,7)\ (6\,8)$ 是 2^4 型置换，边置换为 $(e_1e_3)\ (e_2e_4)\ (e_5e_7)\ (e_6e_8)\ (e_9e_{11})\ (e_{10}e_{12})$ 是 2^6

型置换，对应的面置换为$(u_1)(u_2)(u_3u_4)(u_5u_6)$是$1^22^2$型置换，有三组对面，180°两种转角，共3个元素；

II类为过对角点连线为轴，旋转120°和240°，取旋转群中元素为$(1\,7)$为对角点的连线为轴顺时针旋转120°，其点置换$(1)(7)(2\,4\,5)(3\,8\,6)$是1^23^2型置换，诱导出对应的边置换为$(e_1e_4e_9)(e_6e_{11}e_7)(e_2e_{12}e_5)(e_3e_8e_{10})$是$3^4$型置换，对应的面置换为$(u_1u_5u_3)(u_2u_6u_4)$是$3^2$型置换，有六组对角点，120°和240°两种转角，共8个元素；

III类为对边中点的连线为旋转轴，旋转180°，取旋转群中元素为边$e_9(1\,5)$和其对边$e_{11}(3\,7)$中点连线为轴旋转180°，其点置换$(1\,5)(3\,7)(2\,8)(4\,6)$是2^4型置换，诱导出对应的边置换$(e_9)(e_{11})(e_1e_8)(e_2e_7)(e_3e_6)(e_4e_5)(e_{10}e_{12})$是$1^22^5$型置换，对应的面置换为$(u_1u_2)(u_3u_5)(u_4u_6)$是$2^3$型置换，有6组对边，1种转角，共6个元素。

加上单位元，点置换群有1^8型1个，1^23^2型8个，4^2型6个，2^4型9个；边置换群有1^{12}型1个，3^4型8个，4^3型6个，2^6型3个，1^22^5型6个；面置换群有1^6型1个，3^2型8个，1^24^1型6个，1^22^2型3个，2^3型6个；对每个类型置换计算不动点数，由Pólya定理即可得到正六面体的m种颜色的点、边和面着色公式分别为：

$$N_{V_6}=\frac{1}{24}\left(m^8+17m^4+6m^2\right),\quad N_{E_6}=\frac{1}{24}\left(m^{12}+6m^7+3m^6+8m^4+6m^3\right),$$

$$N_{U_6}=\frac{1}{24}\left(m^6+3m^4+12m^3+8m^2\right)$$

由点、边、面的置换群类型及个数，可得出正六面体的点边置换群VE_6有1^{20}型1个，4^5型6个，2^{10}型3个，1^23^6型8个，1^22^9型6个；点面置换群VU_6有1^{14}型1个，1^24^3型6个，1^23^4型8个，1^22^6型3个，2^7型6个；边面置换群EU_6有1^{18}型1个，1^24^4型6个，1^22^8型9个，3^6型8个；点边面置换群VEU_6有1^{26}型1个，1^24^6型6个，1^22^{12}型9个，1^23^8型8个；由Pólya定理即可得到正六面体的m种颜色的点边、点面、边面和点边面着色公式分别为：

$$N_{VE_6}=\frac{1}{24}\left(m^{20}+6m^{11}+3m^{10}+8m^8+6m^5\right),\quad N_{VU_6}=\frac{1}{24}\left(m^{14}+3m^8+6m^7+8m^6+6m^5\right)$$

$$N_{EU_6}=\frac{1}{24}\left(m^{18}+9m^{10}+14m^6\right),\quad N_{VEU_6}=\frac{1}{24}\left(m^{26}+9m^{14}+8m^{10}+6m^8\right)$$

3) 正八面体：由表1知正八面体的顶点数、边数及面数分别为6，12，8。图形结构如图3所示。我们给图形顶点标上数字标号，6个顶点如图依次记为$1,2,\cdots,6$。12条边依次记为：$e_1(1\,3)$，$e_2(1\,4)$，$e_3(1\,5)$，$e_4(1\,6)$，$e_5(2\,3)$，$e_6(2\,4)$，$e_7(2\,5)$，$e_8(2\,6)$，$e_9(3\,4)$，$e_{10}(4\,5)$，$e_{11}(5\,6)$，$e_{12}(3\,6)$。8个面依次记为：$u_1(1\,3\,4)$，$u_2(1\,4\,5)$，$u_3(1\,5\,6)$，$u_4(1\,3\,6)$，$u_5(2\,3\,4)$，$u_6(2\,4\,5)$，$u_7(2\,5\,6)$，$u_8(2\,3\,6)$。

正八面体的轴旋转可分为三类：

I类为过对面中心的连线为轴，旋转120°和240°，取旋转群中元素为通过面$u_1(1\,3\,4)$和其对面$u_7(2\,5\,6)$中心的连线为轴旋转120°，其点置换$(1\,3\,4)(2\,5\,6)$是3^2型置换，诱导出对应的边置换为$(e_1e_9e_2)(e_7e_{11}e_8)(e_3e_{12}e_6)(e_4e_5e_{10})$是$3^4$型置换，对应的面置换为$(u_1)(u_7)(u_2u_4u_5)(u_3u_8u_6)$是$1^23^2$型置换，有四组对面，两种转角，共8个元素；

II类为过对顶点的连线为轴，旋转90°、180°和270°，(a) 取旋转群中元素为(1 2)为对顶点的连线为轴顺时针旋转90°，其点置换$(1)(2)(3\,4\,5\,6)$是1^24^1型置换，诱导出对应的边置换为$(e_1e_2e_3e_4)(e_5e_6e_7e_8)(e_9e_{10}e_{11}e_{12})$是$4^3$型置换，对应的面置换为$(u_1u_2u_3u_4)(u_5u_6u_7u_8)$是$4^2$型置换，有三组对顶点，90°和270°两种转角，共6个元素；(b) 以$(1\,2)$为对顶点的连线为轴旋转180°为例，其点置换$(1)(2)(3\,5)(4\,6)$是

$1^2 2^2$ 型置换，对应的边置换为$(e_1 e_3)(e_2 e_4)(e_5 e_7)(e_6 e_8)(e_9 e_{11})(e_{10} e_{12})$是 2^6 型置换，对应的面置换为$(u_1 u_3)(u_2 u_4)(u_5 u_7)(u_6 u_8)$是 2^4 型置换，有三组对顶点，一种转角，共 3 个元素；

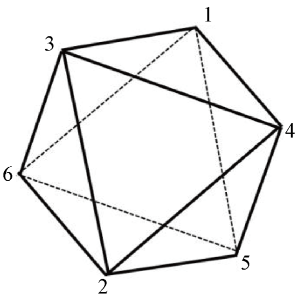

Figure 3. Regular octahedral structure
图 3. 正八面体结构图

III 类为对边中点的连线为旋转轴，旋转 180°，取旋转群中元素为边 $e_{12}(3\,6)$ 和其对边 $e_{10}(4\,5)$ 的中点连线为轴旋转 180°，则其点置换$(3\,6)(4\,5)(1\,2)$是 2^3 型置换，诱导出对应的边置换$(e_{10})(e_{12})(e_1 e_8)(e_2 e_7)(e_3 e_6)(e_4 e_5)(e_9 e_{11})$是 $1^2 2^5$ 型置换，诱导出对应的面置换为$(u_1 u_7)(u_2 u_6)(u_3 u_5)(u_4 u_8)$是 2^4 型置换，有 6 组对边，1 种转角，共 6 个元素。

加上单位元，点置换群有 1^6 型 1 个，3^2 型 8 个，$1^2 4^1$ 型 6 个，$1^2 2^2$ 型 3 个，2^3 型 6 个；边置换群有 1^{12} 型 1 个，3^4 型 8 个，4^3 型 6 个，2^6 型 3 个，$1^2 2^5$ 型 6 个；面置换群有 1^8 型 1 个，$1^2 3^2$ 型 8 个，4^2 型 6 个，2^4 型 9 个；对每个类型置换计算不动点数，由 Pólya 定理即可得到正八面体的 m 种颜色的顶点、边、面着色公式为：

$$N_{V_8}=\frac{1}{24}\left(m^6+3m^4+12m^3+8m^2\right),\quad N_{E_8}=\frac{1}{24}\left(m^{12}+6m^7+3m^6+8m^4+6m^3\right),$$

$$N_{U_8}=\frac{1}{24}\left(m^8+17m^4+6m^2\right)$$

由点、边、面的置换群类型及个数，可得出正八面体的点边置换群 VE_8 有 1^{18} 型 1 个，$1^2 4^4$ 型 6 个，$1^2 2^8$ 型 9 个，3^6 型 8 个；点面置换群 VU_8 有 1^{14} 型 1 个，$1^2 4^3$ 型 6 个，$1^2 3^4$ 型 8 个，$1^2 2^6$ 型 3 个，2^7 型 6 个；边面置换群 EU_8 有 1^{20} 型 1 个，4^5 型 6 个，2^{10} 型 3 个，$1^2 3^6$ 型 8 个，$1^2 2^9$ 型 6 个；点边面置换群 VEU_8 有 1^{26} 型 1 个，$1^2 4^6$ 型 6 个，$1^2 2^{12}$ 型 9 个，$1^2 3^8$ 型 8 个；由 Pólya 定理即可得到正八面体的 m 种颜色的点边、点面、边面和点边面着色公式分别为：

$$N_{VE_8}=\frac{1}{24}\left(m^{18}+9m^{10}+14m^6\right),\quad N_{VU_8}=\frac{1}{24}\left(m^{14}+3m^8+6m^7+8m^6+6m^5\right)$$

$$N_{EU_8}=\frac{1}{24}\left(m^{20}+6m^{11}+3m^{10}+8m^8+6m^5\right),\quad N_{VEU_8}=\frac{1}{24}\left(m^{26}+9m^{14}+8m^{10}+6m^8\right)$$

4) 正十二面体：由表 1 知正十二面体的顶点数、边数及面数分别为 20，30，12。图形结构如图 4 所示。我们给图形顶点标上数字标号，20 个顶点如图依次记为$1,2,\cdots,20$。30 条边依次记为：$e_1(1\,2)$，$e_2(18\,19)$，$e_3(2\,3)$，$e_4(19\,20)$，$e_5(34)$，$e_6(16\,20)$，$e_7(45)$，$e_8(16\,17)$，$e_9(5\,1)$，$e_{10}(17\,18)$，$e_{11}(2\,7)$，$e_{12}(14\,19)$，$e_{13}(16)$，$e_{14}(13\,18)$，$e_{15}(5\,10)$，$e_{16}(17\,12)$，$e_{17}(4\,9)$，$e_{18}(11\,16)$，$e_{19}(3\,8)$，$e_{20}(15\,20)$，$e_{21}(6\,11)$，$e_{22}(9\,13)$，$e_{23}(6\,15)$，$e_{24}(8\,13)$，$e_{25}(15\,10)$，$e_{26}(8\,12)$，$e_{27}(14\,10)$，$e_{28}(7\,12)$，$e_{29}(9\,14)$，$e_{30}(7\,11)$。12 个面依次记为：$u_1(1\,2\,3\,4\,5)$，$u_2(16\,17\,18\,19\,20)$，$u_3(1\,2\,7\,6\,11)$，$u_5(13\,18\,19\,14\,9)$，

$u_5(1\,5\,10\,15\,6)$，$u_6(8\,12\,17\,18\,13)$，$u_7(5\,4\,9\,14\,10)$，$u_8(7\,11\,16\,17\,12)$，$u_9(3\,4\,9\,13\,8)$，$u_{10}(16\,20\,15\,6\,11)$，$u_{11}(2\,3\,8\,12\,7)$，$u_{12}(10\,14\,19\,20\,15)$。

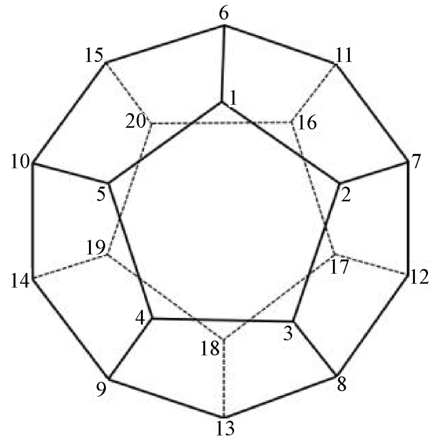

Figure 4. Regular dodecahedron structure diagram

图 4. 正十二面体结构图

正十二面体的旋转轴可分为三类：

I 类为过对面中心的连线为旋转轴，旋转 72°、144°、216°和 288°，取正十二面体旋转群中元素为通过面 $u_1(1\,2\,3\,4\,5)$ 和其对面 $u_2(16\,17\,18\,19\,20)$ 的中心的连线为轴旋转 72°，则其点置换 $(1\,2\,3\,4\,5)$ $(6\,7\,8\,9\,10)$ $(11\,12\,13\,14\,15)$ $(16\,17\,18\,19\,20)$ 是 5^4 型置换，诱导出对应的边置换为 $(e_1e_3e_5e_7e_9)$ $(e_2e_4e_6e_8e_{10})$ $(e_{11}e_{19}e_{17}e_{15}e_{13})$ $(e_{12}e_{20}e_{18}e_{16}e_{14})$ $(e_{21}e_{28}e_{24}e_{29}e_{25})$ $(e_{30}e_{26}e_{22}e_{27}e_{23})$ 是 5^6 型置换，对应的面置换为 (u_1) (u_2) $(u_3u_{11}u_9u_7u_5)$ $(u_4u_{12}u_{10}u_8u_6)$ 是 1^25^2 型置换，有六组对面，四种转角，共 24 个元素；

II 类为过对角点连线为轴，旋转 120°和 240°，取旋转群中元素为(6 13)对顶点连线为轴旋转 120°，点置换 (6) (13) $(11\,1\,15)$ $(5\,7\,20)$ $(3\,14\,17)$ $(10\,12\,16)$ $(8\,9\,18)$ $(4\,12\,19)$ 1^23^6 型置换，边置换 $(e_1e_{18}e_{25})$ $(e_2e_{17}e_{16})$ $(e_3e_8e_{27})$ $(e_4e_7e_{28})$ $(e_5e_{16}e_{12})$ $(e_6e_{15}e_{11})$ $(e_9e_{30}e_{20})$ $(e_{19}e_{10}e_{29})$ $(e_{13}e_{21}e_{23})$ $(e_{14}e_{22}e_{24})$ 是 3^{10} 型置换，边置换为 $(u_1u_9u_7u_5u_3)$ $(u_2u_{10}u_8u_6u_4)$ $(u_{18}u_{11}u_{15}u_{19}u_{14})$ $(u_{20}u_{13}u_{17}u_{12}u_{10})$ 是 5^4 型置换，有十组对顶点，两种转角，共 20 个元素；

III 类为对边中点的连线为旋转轴，旋转 180°，取旋转群中元素边 $e_1(1\,2)$ 和其对边 $e_4(19\,20)$ 中点连线为轴旋转 180°，其点置换 $(1\,2)$ $(19\,20)$ $(3\,5)$ $(4\,6)$ $(7\,8)$ $(9\,11)$ $(10\,12)$ $(13\,14)$ $(15\,17)$ $(16\,18)$ 是 2^{10} 型置换，类似可得对应的边置换是 1^22^{14} 型置换，求得对应的面置换为是 2^6 型置换，有 15 组对边，一种转角，共 15 个元素。

加上单位元，点置换群有 1^{20} 型 1 个，1^23^6 型 20 个，5^4 型 24 个，2^{10} 型 15 个；边置换群有 1^{30} 型 1 个，3^{10} 型 20 个，5^6 型 24 个，1^22^{14} 型 15 个；面置换群有 1^{12} 型 1 个，3^4 型 20 个，1^25^2 型 24 个，2^6 型 15 个对每个类型置换计算不动点数，由 Pólya 定理即可得到正二十面体的 m 种颜色的顶点、边、面着色公式为：

$$N_{V_{12}}=\frac{1}{60}\left(m^{20}+15m^{10}+20m^{8}+24m^{4}\right),\ N_{E_{12}}=\frac{1}{60}\left(m^{30}+15m^{16}+20m^{10}+24m^{6}\right),$$

$$N_{U_{12}}=\frac{1}{60}\left(m^{12}+15m^{6}+44m^{4}\right)$$

由点、边、面的置换群类型及个数，可得出正十二面体的点边置换群VE_{12}有1^{50}型 1 个，$1^2 3^{16}$型 20 个，5^{10}型 24 个，$1^2 2^{24}$型 15 个；点面置换群VU_{12}有1^{32}型 1 个，$1^2 3^{10}$型 20 个，$1^2 5^6$型 24 个，$1^2 5^6$型 20 个，2^{16}型 15 个；边面置换群EU_{12}有1^{42}型 1 个，3^{14}型 20 个，$1^2 5^8$型 24 个，$1^2 2^{20}$型 15 个；点边面置换群VEU_{12}有1^{62}型 1 个，$1^2 5^{12}$型 24 个，$1^2 3^{20}$型 20 个，$1^2 2^{30}$型 15 个；由 Pólya 定理即可得到正二十面体的 m 种颜色的点边、点面、边面和点边面着色公式分别为：

$$N_{VE_{12}}=\frac{1}{60}\left(m^{50}+15m^{26}+20m^{18}+24m^{10}\right),\quad N_{VU_{12}}=\frac{1}{60}\left(m^{32}+15m^{16}+20m^{12}+24m^{8}\right)$$

$$N_{EU_{12}}=\frac{1}{60}\left(m^{42}+15m^{22}+20m^{14}+24m^{10}\right),\quad N_{VEU_{12}}=\frac{1}{60}\left(m^{62}+15m^{32}+20m^{22}+24m^{14}\right)$$

5) 正二十面体：由表 1 知正十二面体的顶点数、边数及面数分别为 12，30，20。图形结构如图 5 所示。我们给图形顶点标上数字标号，12 个顶点如图依次记为$1,2,\cdots,12$。30 条边依次记为：$e_1(1\,2)$，$e_2(10\,12)$，$e_3(1\,3)$，$e_4(11\,12)$，$e_5(2\,3)$，$e_6(10\,11)$，$e_7(1\,4)$，$e_8(9\,12)$，$e_9(2\,4)$，$e_{10}(9\,10)$，$e_{11}(1\,8)$，$e_{12}(6\,12)$，$e_{13}(4\,8)$，$e_{14}(6\,9)$，$e_{15}(1\,5)$，$e_{16}(7\,12)$，$e_{17}(5\,8)$，$e_{18}(6\,7)$，$e_{19}(3\,5)$，$e_{20}(7\,11)$，$e_{21}(5\,9)$，$e_{22}(4\,7)$，$e_{23}(5\,10)$，$e_{24}(2\,7)$，$e_{25}(8\,11)$，$e_{26}(3\,6)$，$e_{27}(3\,9)$，$e_{28}(4\,11)$，$e_{29}(8\,10)$，$e_{30}(2\,6)$。20 个面依次记为：$u_1(1\,2\,3)$，$u_2(10\,11\,12)$，$u_3(1\,2\,4)$，$u_4(9\,10\,12)$，$u_5(1\,4\,8)$，$u_6(6\,9\,12)$，$u_7(1\,5\,8)$，$u_8(6\,7\,12)$，$u_9(1\,3\,5)$，$u_{10}(7\,11\,12)$，$u_{11}(3\,5\,9)$，$u_{12}(4\,7\,11)$，$u_{13}(5\,9\,10)$，$u_{14}(2\,4\,7)$，$u_{15}(5\,8\,10)$，$u_{16}(2\,6\,7)$，$u_{17}(8\,10\,11)$，$u_{18}(2\,3\,6)$，$u_{19}(4\,8\,11)$，$u_{20}(3\,6\,9)$。

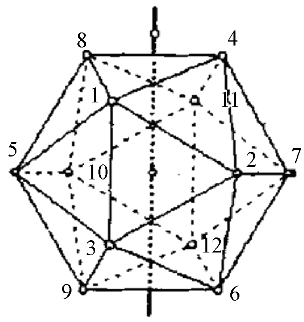

Figure 5. Regular dodecahedron body structure
图 5. 正十二面体体结构图

正二十面体的轴旋转可分为三类：

I 类为过对面中心的连线，旋转 120°和 240°，以通过面$u_5(1\,4\,8)$和其对面$u_6(6\,9\,12)$中心的连线旋转 120°为例，其点置换$(1\,4\,8)\,(12\,9\,6)\,(5\,2\,11)\,(7\,10\,3)$是$3^4$型置换，求得对应的边置换为$(e_1e_{17}e_{28})\,(e_2e_{18}e_{27})\,(e_3e_{29}e_{22})\,(e_4e_{30}e_{21})\,(e_5e_{23}e_{20})\,(e_6e_{24}e_{19})\,(e_7e_{11}e_{13})\,(e_8e_{12}e_{14})\,(e_9e_{15}e_{25})\,(e_{10}e_{16}e_{26})$是$3^{10}$型置换，对应的面置换为$(u_5)\,(u_6)\,(u_1u_{12}u_{15})\,(u_2u_{11}u_{16})\,(u_3u_{19}u_7)\,(u_4u_{20}u_8)\,(u_9u_{14}u_{17})\,(u_{10}u_{13}u_{18})$是$1^2 3^6$型置换，有十组对面，两种转角，共 20 个元素；

II 类为过对顶点连线为轴，旋转 72°、144°、216°和 288°，以(1 12)为对顶点的连线为轴顺时针旋转 72°为例，其点置换$(1)\,(12)\,(2\,3\,5\,8\,4)\,(7\,6\,9\,10\,11)$是$1^2 5^2$型置换，诱导出对应的边置换为$(e_1e_3e_{15}e_{11}e_7)\,(e_5e_{19}e_{17}e_{13}e_9)\,(e_2e_4e_{16}e_{12}e_8)\,(e_6e_{20}e_{18}e_{14}e_{10})\,(e_{30}e_{27}e_{23}e_{25}e_{22})\,(e_{26}e_{21}e_{29}e_{28}e_{24})$是$5^6$型置换，对应的面置换为$(u_1u_9u_7u_5u_3)\,(u_2u_{10}u_8u_6u_4)\,(u_{18}u_{11}u_{15}u_{19}u_{14})\,(u_{20}u_{13}u_{17}u_{12}u_{10})$是$5^4$型置换，有六组对顶点，四种转角，共 24 个元素；

III 类为对边中点的连线为旋转轴，旋转 180°，以边 $e_{13}(4\,8)$ 和其对边 $e_{14}(6\,9)$ 中点连线为轴旋转 180° 为例，其点置换 $(4\,8)(9\,6)(1\,11)(3\,12)(5\,7)(2\,10)$ 是 2^6 型置换，求得对应的边置换 $(e_{13})(e_{14})(e_1e_6)(e_2e_5)(e_3e_4)(e_7e_{25})(e_8e_{26})(e_9e_{29})(e_{10}e_{30})(e_{11}e_{28})(e_{12}e_{27})(e_{15}e_{20})(e_{16}e_{19})(e_{17}e_{22})(e_{18}e_{21})(e_{23}e_{24})$ 是 $1^2 2^{14}$ 型置换，求得对应的面置换为 $(u_1u_2)(u_3u_{17})(u_4u_{18})(u_5u_{19})(u_6u_{20})(u_7u_{12})(u_8u_{11})(u_9u_{10})(u_{13}u_{16})(u_{14}u_{15})$ 是 2^{10} 型置换，有 15 组对边，一种转角，共 15 个元素。

加上单位元，点置换群有 1^{12} 型 1 个，3^4 型 20 个，$1^2 5^2$ 型 24 个，2^6 型 15 个；边置换群有 1^{30} 型 1 个，3^{10} 型 20 个，5^6 型 24 个，$1^2 2^{14}$ 型 15 个；面置换群有 1^{20} 型 1 个，$1^2 3^6$ 型 20 个，5^4 型 24 个，2^{10} 型 15 个；对每个类型置换计算不动点数，由 Pólya 定理即可得到正二十面体的 m 种颜色的顶点、边、面着色公式为：

$$N_{V_{20}} = \frac{1}{60}\left(m^{12} + 15m^6 + 44m^4\right), \quad N_{E_{20}} = \frac{1}{60}\left(m^{30} + 15m^{16} + 20m^{10} + 24m^6\right),$$

$$N_{U_{20}} = \frac{1}{60}\left(m^{20} + 15m^{10} + 20m^8 + 24m^4\right)$$

由点、边、面的置换群类型及个数，可得出正二十面体的点边置换群 VE_{20} 有 1^{42} 型 1 个，3^{14} 型 20 个，$1^2 5^8$ 型 24 个，$1^2 2^{20}$ 型 15 个；点面置换群 VU_{20} 有 1^{32} 型 1 个，$1^2 3^{10}$ 型 20 个，$1^2 5^6$ 型 24 个，$1^2 5^6$ 型 20 个，2^{16} 型 15 个；边面置换群 EU_{20} 有 1^{50} 型 1 个，$1^2 3^{16}$ 型 20 个，5^{10} 型 24 个，$1^2 2^{24}$ 型 15 个；点边面置换群 VEU_{20} 有 1^{62} 型 1 个，$1^2 5^{12}$ 型 24 个，$1^2 3^{20}$ 型 20 个，$1^2 2^{30}$ 型 15 个；由 Pólya 定理即可得到正二十面体的 m 种颜色的点边、点面、边面和点边面着色公式分别为：

$$N_{VE_{20}} = \frac{1}{60}\left(m^{42} + 15m^{22} + 20m^{14} + 24m^{10}\right), \quad N_{VU_{20}} = \frac{1}{60}\left(m^{32} + 15m^{16} + 20m^{12} + 24m^8\right)$$

$$N_{EU_{20}} = \frac{1}{60}\left(m^{50} + 15m^{26} + 20m^{18} + 24m^{10}\right), \quad N_{VEU_{20}} = \frac{1}{60}\left(m^{62} + 15m^{32} + 20m^{22} + 24m^{14}\right)$$

参考文献

[1] 胡冠章. 应用近世代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
[2] 叶载良, 韩冬. 正多面体的顶点着色公式[J]. 商洛师范专科学校学报, 2005, 19(3): 89-93.
[3] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1996) Permutation Groups. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.
[4] 曹汝成. 组合数学[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2000.
[5] 丘维声. 抽象代数基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
[6] 徐俊明. 图论及应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.