Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 488-492
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105059

Hans汉斯

The Finite Sum Problem of the Product of Toeplitz Operators on Weighted Bergman Spaces

Yin Guan, Shuning Cui, Huanran Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1025815700@qq.com

Received: Apr. 18th, 2020; accepted: May 8th, 2020; published: May 15th, 2020

Abstract

Function space operator theory has always been one of the important branches in functional analysis research. This paper studies Toeplitz operator in weighted Bergman space T_{φ}^{2}, in which $\varphi\left(re^{i\theta}\right)=e^{i\delta\theta}\varphi_{0}\left(r\right)$, and $\delta\in Z$, $\delta<0$; $\varphi_{\alpha}\left(r\right)\in\Re_{a}$ is a necessary condition for subnormal operator.

Keywords

Weighted Bergman Space, Toeplitz Operator, Subnormal, Mellin Transform

加权Bergman空间上Toeplitz算子的乘积的有限和问题

关　印，崔姝宁，王焕然

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 1025815700@qq.com

收稿日期：2020年4月18日；录用日期：2020年5月8日；发布日期：2020年5月15日

摘　要

函数空间算子理论一直是泛函分析研究中的一个重要分支之一。本文研究了加权Bergman空间上

文章引用: 关印, 崔姝宁, 王焕然. 加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的乘积的有限和问题[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 488-492. DOI: 10.12677/pm.2020.105059

Toeplitz算子 T_φ^2，其中 $\varphi(re^{i\theta})=e^{i\delta\theta}\varphi_0(r)$，且 $\delta\in Z$，$\delta<0$，$\varphi_\alpha(r)\in\mathfrak{R}_a$ 为亚正规算子的一个必要条件。

关键词

加权Bergman空间，Toeplitz算子，亚正规，Mellin变换

1. 引言

关于函数空间上以有界调和函数为符号的 Toeplitz 算子拟正规性的研究，主要集中在 Hardy 空间和 Bergman 空间上。文献[1]中给出了 Hardy 空间上以三角多项式为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性的结果，在 2013 年，Phukon 和 Hazarika [2]刻画了 Bergman 空间上 Toeplitz 算子 T_φ 是亚正规的必要条件。本文思考将某符号的 Toeplitz 算子亚正规性问题推广到加权 Bergman 空间上进行研究。

2. 预备知识

在这一部分中，我们介绍了 Mellin 变换我们将在下一节计算中运用这个公式。

定义 1.1 若 φ 是 $[0,1]$ 上的可积函数(即 $\int_{[0,1]}|\varphi(t)|\mathrm{d}t<\infty$)，可定义 Mellin 变换 $\hat{\varphi}$：

$$\hat{\varphi}(z)=\int_0^1\varphi(r)r^{z-1}\mathrm{d}r .$$

Mellin 变换是半平面 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上的有界解析函数。

定义 1.2 对于 $-1<p<+\infty$，$\alpha>-1$，D 上加权 Bergman 空间 A_α^2 是解析函数空间在 $L^2(D,\mathrm{d}A_\alpha)$ 上。此时，

$$\mathrm{d}A_\alpha(z)=(\alpha+1)\left(1-|z|^2\right)^\alpha\mathrm{d}A(z).$$

显而易见，A_α^2 是 Hilbert 空间 $L^2(D,\mathrm{d}A_\alpha)$ 中的闭子空间。

定义 1.3 设 $T\in B(H)$，若 $T^*T=TT^*$，称 T 为正规算子。若满足

$$T^*T-TT^*\geq 0,$$

引理 1.1 [3] 若 φ 为 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上的有界解析函数，在两两不相同的点列 $z_1,z_2,\cdots$ 上取值为零，若

1) $\inf\{|z_n|\}>0$，

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)=\infty$，

则 φ 在半平面 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上恒等于零。

注解：我们经常用到引理 1.1 的一种特殊情况：若 φ 为 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上的有界解析函数，若存在自然数序列 $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ 使得

$$\hat{\varphi}(n_k)=0 \text{ 且 } \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\infty,$$

则 $\varphi \equiv 0$。

重要的是，一个函数是由 Mellin 变换的零点决定的。

引理 1.2 [4] 设 $\varphi \in L^1([0,1], r\mathrm{d}r)$。如果存在 N_0， $p \in N$ 使得

$$\hat{\varphi}(n_0 + pk) = 0 \quad \forall k \in N,$$

则 $\varphi \equiv 0$。

3. 主要结果

引理 2.1 [5] $\varphi(re^{i\theta}) = e^{i\delta\theta}\varphi_0(r) \in L^\infty(D)$， $\delta \in Z$， $\varphi_0(r) \in \Re_a$，

其中

$$\Re_a = \left\{a : D \to C : a(z) = a(|z|), \text{且} \int_0^1 |a(r)|^2 r(1-r^2)^a \,\mathrm{d}r < \infty\right\},$$

那么有对于非负整数 n，有

1) $$T_\varphi = \begin{cases} \dfrac{(2n+2\delta+2)}{(n+\delta+1)!}\dfrac{\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+\delta+2)z^{n+\delta}, & n+\delta \ge 0 \\ 0, & n+\delta < 0 \end{cases}$$

2) $$T_{\bar{\varphi}}z^\alpha = \begin{cases} \dfrac{(2n-2\delta+2)}{(n-\delta+1)!}\dfrac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)z^{n-\delta}, & n-\delta \ge 0 \\ 0, & n-\delta < 0 \end{cases}$$

其中

$$\hat{\varphi}_{\alpha,0}(z) = \int_0^1 \varphi_0(r) r^{z-1}(1-r^2)^\alpha \,\mathrm{d}r \text{ 为 } \varphi_0(r)(1-r^2)^\alpha$$

的 Mellin 变换。

定理 2.1 $\varphi(re^{i\theta}) = e^{i\delta\theta}\varphi_0(r) \in L^\infty(D)$， $\delta \in Z$ 且 $\delta < 0$， $\varphi_\alpha(r) \in \Re_a$。若 T_φ^2 为亚正规算子，则

1) $-\delta \le n < -2\delta$ 时， $\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2) = 0$。

2) $n \ge -2\delta$ 时，
$$\begin{aligned} &\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+2\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)\right| \\ &\ge \frac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}\frac{(n+\delta)!}{(n-\delta)!}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma(n-2\delta+\alpha+2)}{\Gamma(n+2\delta+\alpha+2)}\frac{(n+2\delta)!}{(n-2\delta)!}} \\ &\times\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)\right| \end{aligned}$$
。

证明：由引理 2.1，当 $n+\delta \ge 0$ 时， $n \in N_0$。

$$T_\varphi z^n = \begin{cases} \dfrac{(2n+2\delta+2)}{(n+\delta+1)!}\dfrac{\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\dfrac{(2n+4\delta+2)}{(n+2\delta+1)!}\dfrac{\Gamma(n+2\delta+2+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} & n+\delta \ge 0 \text{且} n+2\delta \ge 0 \\ \hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+3\delta+2)z^{n+2\delta} & \\ 0 & n-2\delta < 0 \end{cases}$$

又 $n-\delta \ge 0$ 时， $T_\varphi z^n = \dfrac{(2n-2\delta+2)}{(n-\delta+1)!}\dfrac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)z^{n-\delta}$

$$T_{\bar{\varphi}} z^n = \begin{cases} \dfrac{(2n-2\delta+2)}{(n-\delta+1)!}\dfrac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\dfrac{(2n+4\delta+2)}{(n-2\delta+1)!}\dfrac{\Gamma(n-2\delta+2+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} & n-\delta \ge 0 \text{且} n-2\delta \ge 0 \\ \hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)z^{n-2\delta} & \\ 0 & n-2\delta < 0 \end{cases}$$

若 $\delta=0$，$\left\|T_{\varphi}^{2}z^{n}\right\|^{2}=\left\|T_{\bar{\varphi}}^{2}z^{n}\right\|^{2}$。

若 $\delta<0$，当 $0\le n\le -2\delta-1$ 时，$\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)=0$。进一步有 $\hat{\varphi}_{\alpha,0}(p)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(q)=0$，其中，

$$p\in M_0=\{2(n+1)-\delta:0\le n\le -2\delta-1,n\in N_0\},$$

$$q\in M_1=\{2(n+1-\delta)-\delta:0\le n\le -2\delta-1,n\in N_0\}.$$

选取 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，使得 f 的幂级数展开式中前 2δ 项为 0，则

$$\begin{aligned}&\left\langle T_{\varphi}^{2},T_{\varphi}^{2}\right\rangle-\left\langle T_{\bar{\varphi}}^{2},T_{\bar{\varphi}}^{2}\right\rangle\\&=\sum_{n=-2\delta}^{\infty}16|a_n|^2(\alpha+1)\left\{\left[\frac{\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}{(n+\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\right]^2\frac{\Gamma(n+2\delta+2+\alpha)}{(n+2\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+3\delta+2)^2\right|\right.\\&\left.-\left[\frac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{(n-\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\right]^2\frac{\Gamma(n-2\delta+2+\alpha)}{(n-2\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)\right|^2\right\}\end{aligned}$$

由于 $2n+\delta+2=2(n+1+\delta)-\delta$，$2n+3\delta+2=2(n+1+\delta+\delta)-\delta$。那么有

$$\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)=0.$$

在 $-2\delta\le n\le -4\delta-1$ 时，故有

$$\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)=0.$$

如此下去，$\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)=0$。$\forall n\in N_0$。而 $2n-3\delta+2=2(n+1-\delta)-\delta$，$2n-\delta+2=2(n+1)-\delta$，$n=p\cdot 2\delta+q$，故 $\varphi_0=0$。

若 $\delta<0$，

$$\begin{aligned}&\left\langle T_{\varphi}^{2}f,T_{\varphi}^{2}\right\rangle-\left\langle T_{\bar{\varphi}}^{2}f,T_{\bar{\varphi}}^{2}\right\rangle\\&=\sum_{n=0}^{2\delta-1}16|a_n|^2(\alpha+1)\left[\frac{\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}{(n+\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\right]^2\frac{\Gamma(n+2\delta+2+\alpha)}{(n+2\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+3\delta+2)\right|^2\\&+\sum_{n=2\delta}^{+\infty}16|a_n|^2(\alpha+1)\left\{\left[\frac{\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}{(n+\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\right]^2\frac{\Gamma(n+2\delta+2+\alpha)}{(n+2\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+3\delta+2)\right|^2\right.\\&\left.-\left[\frac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{(n-\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\right]^2\frac{\Gamma(n-2\delta+2+\alpha)}{(n-2\delta)!\Gamma(1+\alpha)}\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)\right|^2\right\}\end{aligned}$$

则 T_{φ}^{2} 亚正规当且仅当

$$\begin{aligned}&\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+3\delta+2)\right|\\&\ge\frac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}\frac{(n+\delta)!}{(n-\delta)!}\frac{\Gamma(n-2\delta+\alpha+2)}{\Gamma(n+2\delta+\alpha+2)}\frac{(n+2\delta)!}{(n-2\delta)!}\\&\times\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)\right|\end{aligned}$$

4. 结论

本文研究了加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子 T_{φ}^{2}，其中 $\varphi(re^{i\theta})=e^{i\delta\theta}\varphi_0(r)$，且 $\delta\in Z$，$\delta<0$，

$\varphi_\alpha(r)\in\Re_a$ 为亚正规算子的一个必要条件：

若 T_φ^2 为亚正规算子，则有

1) $-\delta\le n<-2\delta$ 时，$\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)=0$。

2) $n\ge-2\delta$ 时，
$$\begin{aligned}&\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+2\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)\right|\\ &\ge\frac{\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}\frac{(n+\delta)!}{(n-\delta)!}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma(n-2\delta+\alpha+2)}{\Gamma(n+2\delta+\alpha+2)}\frac{(n+2\delta)!}{(n-2\delta)!}}\\ &\times\left|\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-3\delta+2)\right|\end{aligned}$$
。

显然上述讨论结果对于这样函数的线性组合仍然成立。我们希望得出加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的乘积有限和为亚正规算子的更普遍的结论，但是由于其广泛性和复杂性，目前只能得到上述结论。

参考文献

[1] Hwang, I.S. (2005) Hyponormal Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **42**, 387-403. https://doi.org/10.4134/jkms.2005.42.2.387

[2] Phukon, A. and Hazarika, M. (2013) Necessary Conditions for Hyponormality of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *International Journal of Mathematical Analysis*, **7**, 485-490. https://doi.org/10.12988/ijma.2013.13044

[3] Remmert, R. (1997) Classical Topics in Complex Funtion Theory. Graduate Texts in Mathematics.

[4] Louhichi, I., Strouse, E. and Zakariasy, L. (2006) Products of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Integral Equations Operator Theory*, **54**, 525-539. https://doi.org/10.1007/s00020-005-1369-1

[5] Lu, Y. and Liu, C. (2009) Commutativity and Hyponormality of Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **46**, 621-642. https://doi.org/10.4134/jkms.2009.46.3.621