Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 556-565
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105068

Hans汉斯

Double Weighted Estimates for the Commutator of Marcinkiewicz Integral with Some $L^{\delta}-(\log L)^{\rho}$ Kernel

Yingting Ji, Xiaoli Chen

College of Mathematics & Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: 1942455906@qq.com, *2491248900@qq.com

Received: Apr. 27th, 2020; accepted: May 20th, 2020; published: May 27th, 2020

Abstract

In this paper, we obtain that the commutator $\mu_{\Omega,b}$ generated by Marcinkiewicz integral μ_{Ω} with $L^{\delta}-(\log L)^{\rho}$ kernel and weighted Lipschitz function *b*, has $\left(H^{p}(\omega),L^{q}\left(\omega^{1-q}\right)\right)$ and $\left(H^{\frac{n}{n+\beta}}(\omega),L^{1,\infty}\right)$ boundedness.

Keywords

Commutator, Marcinkiewicz Integral, Weighted Lipschitz Function, $L^{\delta}-(\log L)^{\rho}$ Condition

具有某类$L^{\delta}-(\log L)^{\rho}$核函数的Marcinkiewicz积分交换子的双权估计

季颖婷，陈晓莉*

江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: 1942455906@qq.com, *2491248900@qq.com

收稿日期：2020年4月27日；录用日期：2020年5月20日；发布日期：2020年5月27日

*通讯作者。

文章引用: 季颖婷, 陈晓莉. 具有某类$L^{\delta}-(\log L)^{\rho}$核函数的Marcinkiewicz积分交换子的双权估计[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 556-565. DOI: 10.12677/pm.2020.105068

摘 要

本文证明核函数满足 $L^{\delta}-(\log L)^{\rho}$ 条件的Marcinkiewicz积分 μ_{Ω} 与加权Lipschitz函数b生成的交换子 $\mu_{\Omega,b}$ 具有 $\left(H^{p}(\omega),L^{q}(\omega^{1-q})\right)$ 和 $\left(H^{\frac{n}{n+\beta}}(\omega),L^{1,\infty}\right)$ 有界性。

关键词

交换子，Marcinkiewicz积分，加权Lipschitz函数，$L^{\delta}-(\log L)^{\rho}$ 条件

1. 引言

设 S^{n-1} 是 R^n 上的单位球面且具有标准的 Lebesgue 测度，$\Omega\in L^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$ 是 S^{n-1} 上的零次齐次函数且满足：对任意的 $x\neq 0, x'=\dfrac{x}{|x|}$，

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')\,\mathrm{d}\sigma(x')=0. \tag{1.1}$$

定义 Marcinkiewicz 积分算子为

$$\mu_{\Omega}(f)(x)=\left(\int_0^{\infty}\left|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)\,\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由 Marcinkiewicz 积分 μ_{Ω} 和适当的函数 b 生成的交换子定义为

$$\mu_{\Omega,b}(f)(x)=\left(\int_0^{\infty}\left|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\left[b(x)-b(y)\right]f(y)\,\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果存在常数 $C>0$ 和 $\rho>1$，使得对任意的 $y_1,y_2\in S^{n-1}$，有

$$\left|\Omega(y_1)-\Omega(y_2)\right|\le\frac{C}{\left(\log\dfrac{2}{|y_1-y_2|}\right)^{\rho}}, \tag{1.2}$$

则称 Ω 满足 log 型 Lipschitz 条件。

Marcinkiewicz 首先在文[1]中给出了一维 Marcinkiwicz 算子 μ_{Ω} 的定义，此时 $\Omega(t)=\operatorname{sign}(t)$ 。1958 年，Stein 在[2]中定义了高维的 Marcinkiewicz 积分，并证明当 $\Omega\in Lip_{\alpha}\left(S^{n-1}\right),0<\alpha\le 1$ 时，μ_{Ω} 是强 $(p,p)(1<p\le 2)$ 型和弱 $(1,1)$ 型的。2004 年，Lee 和 Rim 在[3]中引入 log 型 Lipschitz 条件(1.2)，并证明当

Ω 满足(1.2)时 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 的 $\left(H^1, L^1\right),\left(L^\infty, BMO\right)$ 和 $\left(L^p, L^p\right)(1<p<\infty)$ 有界性。显然条件(1.2)比 Stein 定理中的 Lipschitz 条件更弱。关于 Marcinkiewicz 积分算子有界性的结果很多，范大山、陈杰诚、丁勇、陆善镇和 Yabuta 等人在这一领域做出了巨大贡献，文献较多就不一一枚举。

对于 Marcinkiewicz 积分交换子，Torchinsky 和 Wang 在[4]中证明当核函数满足 Lipschitz 条件时 Marcinkiewicz 积分和它的交换子在加权 $L^p(1<p<\infty)$ 上有界，Ding、Lu 和 Yabuta 在[5]中讨论带粗糙核的 Marcinkiewicz 积分与 BMO 函数生成的高阶交换子的加权有界性。Ding、Lu 和 Zhang [6]建立了 Marcinkiewicz 积分交换子的 $\left(L\log L, L^{1,\infty}\right)$ 有界性。2008 年，王、张和刘[7]给出核函数满足条件(1.2)时，Marcinkiewicz 积分交换子在 Hardy 空间上的端点估计。Lin、Liu 和 Wang [8]将[7]的结果推广到加权情形。另一方面，陆、吴和杨[9]研究了奇异积分算子和 Lipschitz 函数生成的交换子在 Hardy 空间上的端点估计。

如果存在常数 $C>0,\delta>0$ 和 $\rho>1$，使得对任意的 $y_1, y_2\in S^{n-1}$，有

$$\left|\Omega\left(y_1\right)-\Omega\left(y_2\right)\right|\leq\frac{C\left|y_1-y_2\right|^\delta}{\left(\log\frac{2}{\left|y_1-y_2\right|}\right)^\rho}, \tag{1.3}$$

则称 $\Omega(x)$ 满足 $L^\delta-(\log L)^\rho$ 条件。条件(1.3)比 log 型 Lipschitz 条件(1.2)弱。当 $\delta=0$ 时，$L^\delta-(\log L)^\rho$ 条件即为 log 型 Lipschitz 条件。Wang 在文[10]中讨论变量核的参数型 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω^ϱ，得到核函数满足消失性条件和 $L^\delta-(\log L)^\rho$ 条件时，μ_Ω^ϱ 在 Hardy 空间 $H^p\left(R^n\right)$ 和弱 Hardy 空间 $WH^p\left(R^n\right)$ 上的有界性。

受文献[7] [8]和[9]的启发，我们将研究核函数满足 $L^\delta-(\log L)^\rho$ 条件(1.3)时，Marcinkiewicz 积分算子和加权 Lipschitz 函数生成的交换子在加权 Hardy 空间上的有界性。具体地，即建立 Marcinkiewicz 积分交换子 $\mu_{\Omega,b}$ 的 $\left(H^p(\omega), L^q\left(\omega^{1-q}\right)\right)$ 和 $\left(H^{\frac{n}{n+\beta}}(\omega), L^{1,\infty}\right)$ 有界性。为此，首先给出本文的一些基本定义。

定义 1.1 设 ω 为一个权函数，$1\leq p<\infty$。若一个局部可积函数 $b(x)$ 满足

$$\sup_B\frac{1}{\omega(B)^{\beta/n}}\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B\left|b(x)-b_B\right|^p\omega(x)^{1-p}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leq C<\infty,$$

其中上确界取遍所有的球 $B\subset\mathrm{R}^n,\omega(B)=\int_B\omega(x)\mathrm{d}x$。则称 b 属于加权 Lipschitz 空间，记为 $b\in Lip_{\beta,\omega}^p$。上式中 C 的最小下确界称为 b 的 $Lip_{\beta,\omega}^p$ 范数，记为 $\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}^p}$。对不同的 p_1 和 p_2，函数 b 的 $\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}^{p_1}}$ 和 $\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}^{p_2}}$ 等价，因此通常可以记 b 的加权 Lipschitz 范数为 $\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}$，见文献[11]。

本文结果如下。

定理 1.1 设 $\omega\in A_1\left(R^n\right), b\in Lip_{\beta,\omega}, 0<\beta<\frac{1}{2}$ 以及 Ω 满足光滑性条件(1.3)。若 $\frac{n}{n+1}<p\leq1$ 且 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$。则 $\mu_{\Omega,b}$ 是 $H^p(\omega)$ 到 $L^q\left(\omega^{1-q}\right)$ 上的有界算子。

定理 1.2 设 $\omega\in A_1\left(R^n\right), b\in Lip_{\beta,\omega}, 0<\beta<\frac{1}{2}$ 以及 Ω 满足光滑性条件(1.3)且 $\delta\geq\beta$。则交换子 $\mu_{\Omega,b}$ 是 $H^{\frac{n}{n+\beta}}(\omega)$ 到 $L^{1,\infty}$ 有界的。即对任意的 $\lambda>0$，存在常数 $C>0$，使得

$$\left|\left\{x\in R^n:\left|\mu_\Omega(f)(x)\right|>\lambda\right\}\right|\leq C\lambda^{-1}\|f\|_{H^{\frac{n}{n+\beta}}(\omega)}.$$

2. 预备知识和相关引理

这节介绍一些我们所需的概念和引理。先给出 A_p 权的定义。

定义 2.1 设 $1<p<\infty$。如果对任意 $B\subset \mathrm{R}^n$，存在常数 $C>0$ 使得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\le C<\infty,$$

则称权函数 $\omega\in A_p$。如果存在常数 $C>0$，使得 $\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)\mathrm{d}x\le C\omega(x), a.e\ x\in \mathrm{R}^n$，则称权函数 $\omega\in A_1$。

下面介绍加权 Hardy 空间的概念及原子分解。

定义 2.2 记 S 为 Schwartz 函数类，S' 是它的对偶。设 $\varphi\in S,\int\varphi=1$，$\omega$ 为权函数。定义 $f\in S'$ 的极大函数 $M_\varphi f(x)=\sup\limits_{t>0}|\varphi_t * f(x)|$。加权 Hardy 空间定义为 $H^p(\omega)=\{f\in S'(R^n):M_\varphi f\in L^p(\omega)\}$ 且记 $\|f\|_{H^p(\omega)}=\|M_\varphi f\|_{L^p(\omega)}$。

定义 2.3 设 ω 是一个权函数，$\frac{n}{n+1}<p\le 1$。a 是一个有界的可测函数，如果它满足下面的条件

(i) 存在一个球 B 使得 $\mathrm{supp}a\subset B$；

(ii) $|a|_\infty\le\omega(B)^{-1/p}$；

(iii) $\int a(x)\mathrm{d}x=0$，

则称 a 为加权的 p-原子，球 B 为原子 a 的支集球。设 f 为缓增广义函数。如果在分布意义下 f 可以写成 $f=\sum\limits_{j=-N}^{N}\lambda_j a_j$，这里 a_j 是 p-原子，N 为任意的整数，$\lambda_j\in C$ 且 $\sum\limits_{j=-N}^{N}|\lambda_j|^p<\infty$，则称 f 属于原子加权 Hardy 空间 $H^p(\omega)$，并定义 $H^p(\omega)$ 中的半范为

$$\|f\|_{H^p(\omega)}=\inf_{\sum\limits_{j=-N}^{N}\lambda_j a_j=f}\left(\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|^p\right)^{1/p},$$

其中下确界“inf”是对 f 的一切分解取的。

引理 2.1 [12] 设 $\omega\in A_1$，则对于球 B 的任意可测子集 E，存在常数 $C_1,C_2>0$ 和 $0<\delta<1$，使得

$$C_1\frac{|E|}{|B|}\le\frac{\omega(E)}{\omega(B)}\le C_2\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^\delta$$

成立。如果 $\omega(x)$ 是常值函数，则 $\delta=1$；如果 $\omega(x)$ 不是常值函数，则 $0<\delta<1$。

引理 2.2 [5] 设 $\Omega\in L^q(S^{n-1})(q>1)$ 是一个零次齐次函数且满足条件(1.1)。若 p,q 和 ω 满足下列条件之一：

(i) $q'<p<\infty$ 和 $\omega\in A_{p/q'}$；

(ii) $1<p<q$ 和 $\omega^{1-p'}\in A_{p/q'}$；

(iii) $1<p<\infty$ 和 $\omega^{q'}\in A_p$，

则 μ_Ω 在 L^p_ω 上有界。

引理 2.3 [13] 设 $\omega\in A_1, b\in Lip_{\beta,\omega}$，则

$$\left(\int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_B|^s\omega(y)^{1-s}\mathrm{d}y\right)^{1/s}\le Ck2^{(k+1)\left(\beta+\frac{n}{s}\right)}\omega(B)^{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{s}}\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}.$$

引理 2.4 设 $\omega\in A_1, b\in Lip_{\beta,\omega}$，则

$$\int_{2^{k+1}B}\left|b(y)-b_B\right|\mathrm{d}y\le Ck\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}2^{(k+1)(\beta+n)}\omega(B)^{\frac{\beta}{n}+1}.$$

证明 利用 Hölder 不等式，引理 2.3 和引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}&\int_{2^{k+1}B}\left|b(x)-b_B\right|\mathrm{d}x\\&\le\left(\int_{2^{k+1}B}\left|b(x)-b_B\right|^2\omega(x)^{-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2^{k+1}B}\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le k\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}2^{(k+1)\left(\beta+\frac{n}{2}\right)}\omega(B)^{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{2}}\omega\left(2^{k+1}B\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le Ck\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}2^{(k+1)\left(\beta+\frac{n}{2}\right)}\omega(B)^{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{2}}2^{(k+1)\frac{n}{2}}\omega(B)^{\frac{1}{2}}\\&\le Ck\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}2^{(k+1)(\beta+n)}\omega(B)^{\frac{\beta}{n}+1}.\end{aligned}$$

引理 2.5 [14] 设 $\omega\in A_1\left(R^n\right), b\in Lip_{\beta,\omega}, 0<\beta<1$。设 $1<r<\frac{n}{\beta}$ 且 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$，则 $\mu_{\Omega,b}$ 是 $L^r(\omega)$ 到 $L^q\left(\omega^{1-q}\right)$ 上的有界算子。

3. Marcinkiewicz 积分交换子在加权 Hardy 空间上的有界性

下面给出 Marcinkiewicz 积分交换子的 $\left(H^p(\omega), L^q\left(\omega^{-q}\right)\right)$ 和 $\left(H^{\frac{n}{n+\beta}}(\omega), L^{1,\infty}\right)$ 有界性证明。

定理 1.1 的证明 由于 $\mu_{\Omega,b}$ 是次线性算子，所以只需要证明对每一个加权 p-原子 a_j，有不等式

$$\left|\mu_{\Omega,b}\left(a_j\right)\right|_{L^q\left(\omega^{1-q}\right)}\le C. \tag{3.1}$$

若(3.1)成立，由于 $\frac{n(n+\beta)}{n^2+n\beta+\beta^2}<p\le1, q>1$，则对 f 的任意分解 $f=\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j a_j\in H^p(\omega)$，利用定义 2.3 (ii)可得

$$\begin{aligned}\left\|\mu_{\Omega,b}(f)\right\|_{L^q\left(\omega^{1-q}\right)}&\le\sum_{j=-N}^{N}\left|\lambda_j\right|\left\|\mu_{\Omega,b}\left(a_j\right)\right\|_{L^q\left(\omega^{1-q}\right)}\le C\sum_{j=-N}^{N}\left|\lambda_j\right|\\&\le C\left(\sum_{j=-N}^{N}\left|\lambda_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le C\|f\|_{H^p(\omega)}.\end{aligned}$$

下面证明(3.1)。设 $\operatorname{supp}a_j\subset B=B\left(x_0,r\right)$，则

$$\begin{aligned}&\left\|\mu_{\Omega,b}\left(a_j\right)\right\|_{L^q\left(\omega^{1-q}\right)}\\&\le\left(\int_{2B}\left|\mu_{\Omega,b}\left(a_j\right)\right|^q\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\right)^{1/q}+\left(\int_{(2B)^c}\left|\mu_{\Omega,b}\left(a_j\right)\right|^q\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&:=I_1+I_2.\end{aligned}$$

取 $p_1>1, 1<q<q_1<\infty$ 且 $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{p_1}-\frac{\beta}{n}$。利用 Hölder 不等式，引理 2.5 和定义 2.3 (ii)可得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_{2B}\left|\mu_{\Omega,b}\left(a_j\right)\right|^q \omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \\
&\le \left(\int_{2B}\left|\mu_{\Omega,b}\left(a_j\right)\right|^{q_1} \omega(x)^{1-q_1}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_{2B}\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \\
&\le C\left\|a_j\right\|_{L^{p_1}(\omega)}\omega(B)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \le C\left\|a_j\right\|_{\infty}\omega(B)^{\frac{1}{p_1}}\omega(B)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \\
&\le C\omega(B)^{-\frac{1}{p}}\omega(B)^{\frac{1}{p_1}}\omega(B)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \le C.
\end{aligned}
$$

对于 I_2，有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left(\int_{(2B)^c}\left|\left[b,\mu_\Omega\left(a_j\right)\right](x)\right|^q \omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \\
&\le \left(\int_{(2B)^c}\left|\left(b(x)-b_B\right)\mu_\Omega\left(a_j\right)(x)\right|^q \omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \\
&\quad+\left(\int_{(2B)^c}\left|\mu_\Omega\left(\left(b-b_B\right)a_j\right)(x)\right|^q \omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \\
&:= \left(II_1\right)^{\frac{1}{q}}+\left(II_2\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

而对于 II_1，有

$$
\begin{aligned}
II_1 &\le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\left|b(x)-b_B\right|^q\left(\int_0^\infty\left|F_{\Omega,t}\left(a_j\right)(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{q}{2}}\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\left|b(x)-b_B\right|^q\left(\int_0^{|x-x_0|+2r}\left|F_{\Omega,t}\left(a_j\right)(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{q}{2}}\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x \\
&\quad+\Sigma\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\left|b(x)-b_B\right|^q\left(\int_{|x-x_0|+2r}^{\infty}\left|F_{\Omega,t}\left(a_j\right)(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{q}{2}}\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x \\
&:= II_{11}+II_{12}.
\end{aligned}
$$

接下来首先估计 II_{11}。当 $x\in B, y\in R^n\setminus\tilde{B}$ 时有 $|x-y|\sim|x_0-y|\sim|x_0-y|+2r$，因此有

$$
\left|\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{\left(|x_0-y|+2r\right)^2}\right|\le\frac{Cr}{|x-y|^3},\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right|\le\frac{Cr}{|x-x_0|}, \tag{3.2}
$$

且

$$
\begin{aligned}
\left|\Omega(x-y)-\Omega(x-x_0)\right| &= \left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)-\Omega\left(\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right)\right| \\
&\le \left(\frac{r}{|x-x_0|}\right)^{\delta}\frac{C}{\left(\log\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{\rho}}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

因此有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_0-y)}{|x_0-y|^{n-1}}\right|\\&\le\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x_0-y)|}{|x_0-y|^{n-1}}+|\Omega(x-y)|\left|\frac{1}{|x-y|^{n-1}}-\frac{1}{|x_0-y|^{n-1}}\right|\\&\le\frac{C\left(\frac{r}{|x-x_0|}\right)^{\delta}}{|x_0-y|^{n-1}\left(\log\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{\rho}}+\frac{r}{|x_0-y|^{n}}\le\frac{C\left(\frac{r}{|x-x_0|}\right)^{\delta}}{|x_0-y|^{n-1}\left(\log\frac{|x_0-y|}{r}\right)^{\rho}}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

利用 Minkowski 不等式，(3.2)式，零次其次函数 $\Omega\in L^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$ 和引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}II_{11}&\le\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|^q\left(\int_{R^n}\frac{|\Omega(x-y)||a_j|}{|x-y|^{n-1}}\left(\int_{|x-y|\le t\le|x_0-y|+2r}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac12}\mathrm{d}y\right)^q\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|^q\left(\int_{B}\frac{|\Omega(x-y)||a_j|}{|x-y|^{n-1}}\frac{Cr^{\frac12}}{|x-y|^{\frac32}}\mathrm{d}y\right)^q\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|^q\,\|a_j\|_{\infty}\,2^{-k\left(n+\frac12\right)q}\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\omega(B)^{-\frac{q}{p}}2^{-k\left(n+\frac12\right)q}\int_{2^{k+1}B}|b(x)-b_B|^q\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\omega(B)^{-\frac{q}{p}}2^{-k\left(n+\frac12\right)q}k\omega(B)^{\frac{q\beta}{n}+1}\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}^q2^{(k+1)(n+q\beta)}\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}k2^{-kn(q-1)}2^{-kq\left(\frac12-\beta\right)}\le C.\end{aligned}$$

接着估计 II_{12}。利用原子 a_j 的消失性，Minkowski 不等式，(3.4)和引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}II_{12}&\le\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|^q\left(\int_{R^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right||a_j|\left(\int_{|x_0-y|+2r}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac12}\mathrm{d}y\right)^q\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|^q\left(\int_{B}\frac{|a_j(y)|\left(\frac{r}{|x-x_0|}\right)^{\delta}}{|x-x_0|^{n-1}\left(\log\frac{|x-y|}{r}\right)^{\rho}}\frac{1}{|x-x_0|}\mathrm{d}y\right)^q\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\\&\le Cr^{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(B)^{-\frac{q}{p}}2^{-k(n+\delta)q}\left(\log 2^k\right)^{-\rho q}\int_{2^{k+1}B}|b(x)-b_B|^q\omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x\\&\le Cr^{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(B)^{-\frac{q}{p}}2^{-k(n+\delta)q}k^{-\rho q}k\omega(B)^{\frac{q\beta}{n}+1}\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}^q2^{(k+1)(n+q\beta)}\\&\le Cr^{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-\rho q}2^{-kn(q-1)}2^{-kq(\delta-\beta)}\le C,\end{aligned}$$

这里最后一个不等式用到 $q>1$ 和 $\delta>\beta$，从而级数收敛。最后估计 II_2。利用引理 2.2 (i)，定义 1.2，定义 2.3 (ii)以及 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$ 可得

$$
\begin{aligned}
II_2 &\le \int_{R^n}\left|\mu_\Omega\left(\left(b-b_B\right)a_j\right)(x)\right|^q \omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_B \left|b-b_B\right|^q \left|a_j(x)\right|^q \omega(x)^{1-q}\,\mathrm{d}x \\
&\le \omega(B)^{-\frac{q}{p}}\omega(B)^{\frac{q\beta}{n}+1}\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}^q \le C.
\end{aligned}
$$

结合 I_1,I_2 的估计可得(3.1)。定理证毕。

定理 1.3 的证明 记 $f=\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j a_j$，其中 a_j 是 $\omega-\left(\frac{n}{n+\beta},\infty\right)$ 原子且满足 $\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j<\infty,\operatorname{supp}a_j\subset B=B\left(x_0,r\right)$。则

$$
\begin{aligned}
&\left|\mu_{\Omega,b}f(x)\right| \\
&=\left|\left[b,\mu_\Omega\left(\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j a_j\right)\right](x)\right| \\
&\le \left|\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j\left(b(x)-b_B\right)\mu_\Omega\left(a_j\right)(x)\chi_{4B}(x)\right| \\
&\quad+\left|\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j\left(b(x)-b_B\right)\mu_\Omega\left(a_j\right)(x)\chi_{(4B)^c}(x)\right| \\
&\quad+\left|\mu_\Omega\left(\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j\left(b-b_B\right)a_j\right)(x)\right| \\
&:=J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}
$$

利用 Hölder 不等式，引理 2.2 (i)，定义 1.1，a_j 是 $\omega-\left(\frac{n}{n+\beta},\infty\right)$ 原子和引理 2.3 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|J_1\right\|_{L^1} \\
&\le C\sum_{j=-N}^{N}\left|\lambda_j\right|\left(\int_{4B}\left|b(x)-b_B\right|^2\omega(x)^{-1}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{4B}\left|\mu_\Omega\left(a_j\right)(x)\right|^2\omega(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\le C\sum_{j=-N}^{N}\left|\lambda_j\right|\left(\int_{4B}\left|b(x)-b_B\right|^2\omega(x)^{-1}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{4B}\left|a_j(x)\right|^2\omega(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\le C\sum_{j=-N}^{N}\left|\lambda_j\right|2^{2\left(\beta+\frac{n}{2}\right)}\omega(B)^{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{2}}\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}\omega(B)^{-\frac{n+\beta}{n}}\omega(B)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\sum_{j=-N}^{N}\left|\lambda_j\right|.
\end{aligned}
$$

对于 J_2，有

$$
\begin{aligned}
\|J_2\|_{L^1} &\le \sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|\left\|\left(b(x)-b_B\right)\mu_\Omega\left(a_j\right)(x)\chi_{(4B)^c}(x)\right\|_{L^1} \\
&\le \sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|\int_{R^n\setminus 4B}|b(x)-b_B|\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}a_j(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{1/2}\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|\int_{R^n\setminus 4B}|b(x)-b_B|\left(\int_0^{|x-x_0|+4r}\left|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}a_j(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{1/2}\mathrm{d}x \\
&\quad+\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|\int_{R^n\setminus 4B}|b(x)-b_B|\left(\int_{|x-x_0|+4r}^\infty\left|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}a_j(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{1/2}\mathrm{d}x \\
&:= \sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|(K_1+K_2).
\end{aligned}
$$

接下来我们分别估计 K_1 和 K_2。首先对于 K_1，我们利用 Minkowski 不等式，(3.2)式，定义 2.3 (ii)和引理 2.4 可得

$$
\begin{aligned}
K_1 &\le \sum_{k=2}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}|a_j(y)|\left(\int_{|x-y|\le t\le|x-x_0|+4r}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{1/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=2}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|\int_B\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}|a_j(y)|\frac{Cr^{\frac{1}{2}}}{|x-y|^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\le C\sum_{k=2}^{\infty}\omega(B)^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}r^{-n}2^{-k\left(n+\frac{1}{2}\right)}|B|\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|\mathrm{d}x \\
&\le C\sum_{k=2}^{\infty}\omega(B)^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}2^{-k\left(n+\frac{1}{2}\right)}k\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}2^{(k+1)(\beta+n)}\omega(B)^{\frac{\beta}{n}+1} \\
&\le C\sum_{k=2}^{\infty}k2^{-k\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\le C.
\end{aligned}
$$

接着估计 K_2，利用原子 a_j 的消失性，Minkowski 不等式，(3.4)和引理 2.3 可得

$$
\begin{aligned}
K_2 &\le \sum_{k=2}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|\int_{R^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right||a_j(y)|\left(\int_{|x-x_0|+4r}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{1/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=2}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}|b(x)-b_B|\int_B\frac{|a_j(y)|\left(\frac{r}{|x-x_0|}\right)^{\delta}}{|x-x_0|^{n-1}\left(\log\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{\rho}}\frac{1}{|x-x_0|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\le C\sum_{k=2}^{\infty}\left(2^kr\right)^{-n}2^{-k\delta}r^{\delta}\left(\log 2^k\right)^{-\rho}\omega(B)^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}|B|\int_{2^{k+1}B}|b(x)-b_B|\mathrm{d}x \\
&\le Cr^{\delta}\sum_{k=2}^{\infty}2^{-kn}2^{-k\delta}k^{-\rho}\omega(B)^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}k\|b\|_{Lip,\beta}\,\omega(B)^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}2^{(k+1)(n+\beta)} \\
&\le Cr^{\delta}\sum_{k=2}^{\infty}k^{1-\rho}2^{-k(\delta-\beta)}\le C,
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式利用了 $\delta > \beta$ 从而级数收敛。因此

$$\|J_2\|_{L^1} \le C\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|.$$

最后，利用引理 2.7，定义 2.1 和定义 2.3 (ii)，有

$$\begin{aligned}\left|\left\{x\in R^n : |J_3| > \frac{\lambda}{3}\right\}\right| &\le C\lambda^{-1}\left\|\sum_{j=-N}^{N}\lambda_j\left(b-b_B\right)a_j\left(x\right)\right\|_{L^1}\\ &\le C\lambda^{-1}\omega(B)^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|\int_B|b(x)-b_B|\mathrm{d}x\\ &\le C\lambda^{-1}\omega(B)^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|\omega(B)^{1+\frac{\beta}{n}}\|b\|_{Lip_{\beta,\omega}}\\ &\le C\lambda^{-1}\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|.\end{aligned}$$

综上，由 J_1, J_2 和 J_3 的估计可得

$$\left|\left\{x\in R^n : \left|\mu_{\Omega,b}f(x)\right| > \lambda\right\}\right| \le C\lambda^{-1}\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j| \le C\lambda^{-1}\left(\sum_{j=-N}^{N}|\lambda_j|^{\frac{n}{n+\beta}}\right)^{\frac{n+\beta}{n}},$$

再对 f 的所有原子分解取下确界，即可完成定理的证明。

基金项目

江西省自然科学基金(项目编号: 20192BAB201003)。

参考文献

[1] Marcinkiewicze, J. (1938) Sur quelques intégrals de type de Dini. *Annales Polonici Mathematici*, **17**, 42-50.

[2] Stein, E.M. (1958) On the Function of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicze. *Transactions of the American Mathematical Society*, **88**, 430-466.

[3] Lee, J. and Rim, K.S. (2004) Estimates of Marcinkiewicze Integral with Bounded Homogeneous Kernel of Degree Zero. *Integral Equations and Operator Theory*, **48**, 213-223. https://doi.org/10.1007/s00020-001-1193-1

[4] Torchinsky, A. and Wang, S. (1990) A Note on the Marcinkiewicze Integral. *Colloquium Mathematicum*, **60/61**, 235-243.

[5] Ding, Y., Lu, S.Z. and Yabuta, K. (2002) On Commutator of Marcinkiewicze Integral with Rough Kernel. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **275**, 60-68.

[6] Ding, Y., Lu, S.Z. and Zhang, P. (2004) Weighted Weak Type Estimates for Commutators of Marcinkiewicz Integrals. *Science in China*, **47**, 83-95. https://doi.org/10.1360/03ys0084

[7] 王洪彬, 张小瑾, 刘宗光. 一类 Marcinkiewicz 积分交换子的端点估计[J]. 数学学报 A 辑, 2008, 51(2): 265-274.

[8] Lin, Y., Liu, Z.G. and Wang, D. (2012) Weighted Endpoint Estimate for Commutator of Marcinkiewicze Integral. *Pan-American Mathematical Journal*, **22**, 105-116.

[9] 陆善镇, 吴强, 杨大春. 交换子在 Hardy 空间上的有界性[J]. 中国科学 A 辑, 2002, 32(2): 232-244.

[10] Wang, H. (2016) Estimates of Some Integral Operators with Bounded Variable Kernels on the Hardy and Weak Hardy Spaces over R^n. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **32**, 411-438. https://doi.org/10.1007/s10114-016-4617-1

[11] Carcia-Cuerva, J. and Rudio De Francia, J.L. (1958) Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland Math, Amsterdam. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(08)73086-x

[12] Garca-Cuerva, J. (1979) Weighted H^p Space. *Dissertation Summaries in Mathematics*, **162**, 1-63.

[13] 黄菲. Marcinkiewicz~积分交换子和多线性平方算子交换子的有界性[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西师范大学, 2017.

[14] 李爽. Marcinkiewicz 积分及其交换子的加权范数不等式[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西师范大学, 2018.