Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(6), 599-604
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.106073

Hans汉斯

L'Hospital Theorem of *K*-Analytic Functions

Jianpeng Chen[1], Yanting Pan[1], Qinxiu Sun[2], Hongliang Li[1*]

[1]Department of Mathematics, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
[2]Department of Mathematics, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou Zhejiang
Email: [*]qinxsun@126.com

Received: May 30th, 2020; accepted: Jun. 21st, 2020; published: Jun. 28th, 2020

Abstract

The present paper gives the L'Hospital theorem of K-analytic functions, generalizing the existing results. It is an important tool to solve the limit of complex functions.

Keywords

Conjugate Analytic Function, *K*-Analytic Function, L'Hospital Theorem

K-解析函数的洛必达法则

陈剑鹏[1]，潘燕婷[1]，孙钦秀[2]，李宏亮[1*]

[1]浙江外国语学院数学系，浙江 杭州
[2]浙江科技学院数学系，浙江 杭州
Email: [*]qinxsun@126.com

收稿日期：2020年5月30日；录用日期：2020年6月21日；发布日期：2020年6月28日

摘　要

本文给出了*K*-解析函数的洛必达法则，推广了已有文献中的结论。其是解决复变函数极限的有力工具。

关键词

共轭解析函数，*K*-解析函数，洛必达法则

[*]通讯作者。

文章引用: 陈剑鹏, 潘燕婷, 孙钦秀, 李宏亮. *K*-解析函数的洛必达法则[J]. 理论数学, 2020, 10(6): 599-604.
DOI: 10.12677/pm.2020.106073

1. 引言

在解析函数的基础上，[1]引进了共轭解析函数，[2]得到了共轭解析函数中的洛必达法则。[3]将共轭解析函数概念进一步推广到 K-解析函数上，[4]、[5]得出 K-解析函数的一些分析性质。本文主要研究 K-解析函数的洛必达法则，推广解析函数、共轭解析函数的洛必达法则，使洛必达法则的应用更加广泛。

定义 1.1 [3]设 $x, y, k \in R, k \neq 0, z = x + iy$，则记 $z(k) = x + iky$。

定义 1.2 [3]设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 定义，z_0 在 D 内。若

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z(k)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z(k) - z_0(k)}$$

存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 处 K-可导，并记 $f(z)$ 在 z_0 处的 K-导数为

$$f_k'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z(k)}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z(k)}。$$

如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内 K-可导，则称在 z_0 处 K-解析。当 $f(z)$ 在区域 $\boldsymbol{D}$ 内的每点都 K-可导时，称 $f(z)$ 在区域 $\boldsymbol{D}$ 内 K-解析。

2. 主要结论

本部分给出 K-解析函数的洛必达法则的证明。

定理 2.1 若函数 f 和 g 在点 z_0 处满足：

i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$，$\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$；

ii) $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 某个去心邻域内 K-解析，且 $g'_{(k)}(z) \neq 0$，

则

$$\lim_{z \to z_0} \left[f(z)/g(z) \right] = \lim_{z \to z_0} \left[f'_{(k)}(z)/g'_{(k)}(z) \right]。$$

证明 1)设为 z_0 有限点。因为函数 $f(z)$、$g(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域内 K-解析，故 z_0 为 $f(z)$、$g(z)$ 的孤立奇点。

由于 z_0 为 $f(z)$、$g(z)$ 的有限孤立奇点，即 $|z_0| < \infty$，由条件(i)可知，$f(z)$、$g(z)$ 在 z_0 点主要部分为 0，根据([5]，定理 2.1)可知 z_0 为 $f(z)$、$g(z)$ 的可去奇点。现补充定义令 $f(z_0) = g(z_0) = 0$，则 $f(z)$、$g(z)$ 均在 z_0 点及其某邻域内 K-解析，且由([4]，定理 2.5)可知一定存在 z_0 的一个邻域，使得在这个邻域内，$f(z)$、$g(z)$ 没有不等于 z_0 的零点。设 $f(z)$、$g(z)$ 的零点的阶分别为 m_1、m_2，根据([4]，定理 2.4)可得以下表达式：

$$f(z) = (z - z_0)(k)^{m_1} \varphi(z)，\quad g(z) = (z - z_0)(k)^{m_2} \phi(z)，$$

其中 $\varphi(z)$、$\phi(z)$ 在点 z_0 的邻域 K-解析且 $\varphi(z_0) \neq 0$，$\phi(z_0) \neq 0$。于是

$$f'_{(k)}(z) = m_1 (z - z_0)(k)^{m_1 - 1} \varphi(z) + (z - z_0)(k)^{m_1} \varphi'_{(k)}(z)，$$

$$g'_{(k)}(z)=m_2(z-z_0)(k)^{m_2-1}\phi(z)+(z-z_0)(k)^{m_2}\phi'_{(k)}(z)\text{。}$$

因此

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(k)^{m_1}\varphi(z)}{(z-z_0)(k)^{m_2}\phi(z)}=\begin{cases}\dfrac{\varphi(z_0)}{\phi(z_0)} & \text{当} m_1=m_2\\ 0 & \text{当} m_1>m_2\\ \infty & \text{当} m_1<m_2\end{cases}$$

另一方面，

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'_{(k)}(z)}{g'_{(k)}(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(k)^{m_1-1}\left[m_1\varphi(z)+(z-z_0)(k)\varphi'_{(k)}(z)\right]}{(z-z_0)(k)^{m_2-1}\left[m_2\phi(z)+(z-z_0)(k)\phi'_{(k)}(z)\right]}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\varphi(z_0)}{\phi(z_0)} & \text{当} m_1=m_2\\ 0 & \text{当} m_1>m_2\\ \infty & \text{当} m_1<m_2\end{cases}$$

故

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)/g(z)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[f'_{(k)}(z)/g'_{(k)}(z)\right]\text{。}$$

2) 设 $z_0=\infty$。令 $z=\left(\dfrac{1}{\xi(k)}\right)\left(\dfrac{1}{k}\right)$，则 $z\to\infty$ 等价于 $\xi\to 0$。因此利用上面的(1)及 K-解析函数的复合函数求导法可知

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{\xi\to 0}\frac{f\left(\left(\dfrac{1}{\xi(k)}\right)\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)}{g\left(\left(\dfrac{1}{\xi(k)}\right)\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)}=\lim_{\xi\to 0}\frac{f'_{(k)}\left(\left(\dfrac{1}{\xi(k)}\right)\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)\left(-\dfrac{1}{\xi(k)^2}\right)}{g'_{(k)}\left(\left(\dfrac{1}{\xi(k)}\right)\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)\left(-\dfrac{1}{\xi(k)^2}\right)}$$

$$=\lim_{\xi\to 0}\frac{f'_{(k)}\left(\left(\dfrac{1}{\xi(k)}\right)\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)}{g'_{(k)}\left(\left(\dfrac{1}{\xi(k)}\right)\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'_{(k)}(z)}{g'_{(k)}(z)}$$

故定理得证。

若函数 f 和 g 在 z_0 处 K-解析，那么上述定理可以简化为：

定理 2.1' 若函数 f 和 g 在有限点 z_0 处满足：

i) $f(z_0)=g(z_0)=0$；

ii) $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 处 K-解析，且 $g'_{(k)}(z)\neq 0$，

则

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)/g(z)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[f'_{(k)}(z)/g'_{(k)}(z)\right]\text{。}$$

定理 2.2 若函数 f 和 g 在点 z_0 处满足：

iii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=\infty$；

iv) $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域内 K-解析，且 $g'_{(k)}(z)\neq 0$；

则

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)/g(z)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[f'_{(k)}(z)/g'_{(k)}(z)\right]。$$

证明 1) 设为 z_0 有限点。因为函数 $f(z)$、$g(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域内 K-解析，因此 z_0 为 $f(z)$、$g(z)$ 的孤立奇点。

因为 z_0 为 $f(z)$、$g(z)$ 的有限孤立奇点，即 $|z_0|<\infty$，根据([5]，定理 2.3)可知 z_0 为 $f(z)$、$g(z)$ 的极点。设 $f(z)$、$g(z)$ 极点的阶分别为 m_3、m_4，则由([5]，定理 2.2) $f(z)$、$g(z)$ 在点 z_0 的某去心邻域内成立：

$$f(z)=\lambda_3(z)\big/(z-z_0)(k)^{m_3}\text{，}\quad g(z)=\lambda_4(z)\big/(z-z_0)(k)^{m_4}\text{ 。}$$

其中 $\lambda_3(z)$、$\lambda_4(z)$ K-解析，且 $\lambda_3(z_0)\neq 0$，$\lambda_4(z_0)\neq 0$。对两个式子进行微分，可以得到

$$\begin{aligned}f'_{(k)}(z)&=-m_3(z-z_0)(k)^{-(m_3+1)}\lambda_3(z)+(z-z_0)(k)^{-m_3}(\lambda_3)'_{(k)}(z)\\&=(z-z_0)(k)^{-(m_3+1)}\left[-m_3\lambda_3(z)+(z-z_0)(k)(\lambda_3)'_{(k)}(z)\right]\end{aligned}\text{，}$$

$$\begin{aligned}g'_{(k)}(z)&=-m_4(z-z_0)(k)^{-(m_4+1)}\lambda_4(z)+(z-z_0)(k)^{-m_4}(\lambda_4)'_{(k)}(z)\\&=(z-z_0)(k)^{-(m_4+1)}\left[-m_4\lambda_4(z)+(z-z_0)(k)(\lambda_4)'_{(k)}(z)\right]\end{aligned}\text{，}$$

因此

$$\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z)=\lim_{z\to z_0}\lambda_3(z)\big/(z-z_0)(k)^{m_3}\times(z-z_0)(k)^{m_4}\big/\lambda_4(z)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda_3(z_0)}{\lambda_4(z_0)} & \text{当}m_3=m_4\\ \infty & \text{当}m_3>m_4\\ 0 & \text{当}m_3<m_4\end{cases}$$

另一方面，

$$\lim_{z\to z_0} f'_{(k)}(z)/g'_{(k)}(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(k)^{-(m_3+1)}\left[-m_3\lambda_3(z)+(z-z_0)(k)(\lambda_3)'_{(k)}(z)\right]}{(z-z_0)(k)^{-(m_4+1)}\left[-m_4\lambda_4(z)+(z-z_0)(k)(\lambda_4)'_{(k)}(z)\right]}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda_3(z_0)}{\lambda_4(z_0)} & \text{当}m_3=m_4\\ \infty & \text{当}m_3>m_4\\ 0 & \text{当}m_3<m_4\end{cases}$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)/g(z)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[f'_{(k)}(z)/g'_{(k)}(z)\right]。$$

2) 对于 $z_0=\infty$ 的情况类似于定理 2.1 的(2)的方法可以得到。

注 显然上述三个定理不仅是实洛必达法则的推广，且是解析函数、共轭解析函数洛必达法则[2]的推广。

3. 应用

这一部分举例说明 *K*-解析函数洛必达法则在求极限时的应用。

例 求下列极限。

1) 求 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\tan z(k)-z(k)}{z(k)-\sin z(k)}$。

解：利用定理 2.1 可知

$$\lim_{z\to 0}\frac{\tan z(k)-z(k)}{z(k)-\sin z(k)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sec^2(z(k))-1}{1-\cos(z(k))}=\lim_{z\to 0}\frac{\tan^2(z(k))}{2\sin^2\frac{z(k)}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2(z(k))}{2\sin^2\frac{z(k)}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{(z(k))^2}{2\left(\frac{z(k)}{2}\right)^2}=2\text{。}$$

2) 求 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\ln z(k)}{z(k)}$。

解：利用定理 2.2 可知

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\ln z(k)}{z(k)}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{z(k)}}{1}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(k)}=0\text{。}$$

3) 求 $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{z(k)^2}-\dfrac{1}{\sin^2 z(k)}\right)$。

解：先通分再利用定理 2.1 可以得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z(k)^2}-\frac{1}{\sin^2 z(k)}\right)\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z(k)-z(k)^2}{z(k)^2\sin^2 z(k)}\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin z(k)\cos z(k)-2z(k)}{2z(k)\sin^2 z(k)+2z(k)^2\sin z(k)\cos z(k)}\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z(k)-2z(k)}{2z(k)\sin^2 z(k)+z(k)^2\sin 2z(k)}\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{\cos 2z(k)-1}{\sin^2 z(k)+2z(k)\sin 2z(k)+z(k)^2\cos 2z(k)}\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{-2\sin 2z(k)}{3\sin 2z(k)+6z(k)\cos 2z(k)-2z(k)^2\sin 2z(k)}\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{-2}{3+3\times\dfrac{2z(k)}{\sin 2z(k)}\times\cos 2z(k)-2z(k)^2}\\
&=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

参考文献

[1] 王见定. 半解析函数、共轭解析函数[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1988.

[2] 田有先. 共轭解析函数中的罗必达法则[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1993, 16(3): 53-56.

[3] 张建元. K-解析函数及其存在条件[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2007, 16(4): 298-302.

[4] 张建元, 张毅敏, 刘承萍, 姜锐武. K-解析函数的幂级数展开式[J]. 大理学院学报, 2009, 18(4): 14-18.

[5] 张建元, 张毅敏, 熊绍武. K-解析函数的双边幂级数与孤立奇点[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2009, 18(3): 198-201.