Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(7), 666-679
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.107080

Hans汉斯

Existence of Weak Solutions for a Class of Phase Field Models

Mei Chen

Materials Genome Institute, Shanghai University, Shanghai
Email: Chenmeimei@shu.edu.cn

Received: Jun. 30th, 2020; accepted: Jul. 22nd, 2020; published: Jul. 29th, 2020

Abstract

We shall investigate a phase-field model with a non-conserved order parameter which is under Neumann boundary conditions and omitting the effect of elasticity. By introducing a parameter κ to construct a modified model, and then using Banach's fixed point Theorem, Aubin-Lions lemma and a series of a-priori estimates, the existence of global weak solutions to the model is finally obtained.

Keywords

Existence of Weak Solutions, Order Parameter, Banach's Fixed Point Theorem

一类相变模型的弱解存在性的研究

陈　梅

上海大学，材料基因组工程研究院，上海
Email: Chenmeimei@shu.edu.cn

收稿日期：2020年6月30日；录用日期：2020年7月22日；发布日期：2020年7月29日

摘　要

本文在忽略弹性效应的情况下，研究了一类Neumann边界条件下的序参数不守恒的相场模型。通过引入一个参数κ构造一个修正模型，然后借助巴拿赫不动点定理、Aubin-Lions引理和一系列先验估计，最终得到该模型弱解的整体存在性。

关键词

弱解的存在性，序参数，巴拿赫不动点定理

文章引用: 陈梅. 一类相变模型的弱解存在性的研究[J]. 理论数学, 2020, 10(7): 666-679.
DOI: 10.12677/pm.2020.107080

1. 引言

相场模型是一门非常年轻的学科，自问世以来，就对材料的发展做出了巨大的贡献，如经典的原子扩散模型：Allen-Cahn 模型和 Cahn-Hilliard 模型，前者起始于 1979 年，可用于研究反向畴粗化[1]，不可压缩流体[2]等，后者起始于 1958 年，用于研究生物种群和图像的修复[3] [4]等。而 2006 年和 2007 年，Zhu 和 Alber 提出了一类由构型力驱动的固固相变模型，这是一类更加适合于陶瓷烧结和马氏体相变的模型。关于 Alber-Zhu 模型的研究结果见[5]-[11]。

为了引入本文的模型，我们先给出一些符号约定，满足(1)~(3)的未知量 $T(t,x)$ 是一个 3×3 的对称矩阵，称为柯西张力。并且方程中出现的 $u(t,x)$ 称为位移，属于 $\mathbb{R}^3$ 空间。

$$-div_x T(t,x)=b(t,x) \tag{1}$$

$$T(t,x)=D\left(\varepsilon\left(\nabla_x u(t,x)\right)-\overline{\varepsilon}S(t,x)\right) \tag{2}$$

$$S_t(t,x)=-c\left(\psi_S\left(\varepsilon\left(\nabla_x u(t,x)\right),S(t,x)\right)-\nu\Delta_x S(t,x)\right)\left|\nabla_x S(t,x)\right| \tag{3}$$

$$u(t,x)=\gamma(t,x),\ S_x(t,x)=0,\ (t,x)\in[0,\infty)\times\partial\Omega, \tag{4}$$

$$S(0,x)=S_0(x),\ x\in\Omega. \tag{5}$$

可以看出这是一个纽曼初边值条件的椭圆－抛物耦合方程组，下面对方程中出现的其他参数进行说明。

$\nabla_x u(t,x)$ 是 u 的一阶微分，$\mathbb{R}^3$ 空间下，这是一个 3×3 梯度矩阵，$(\nabla_x u)^{\mathrm{T}}$ 是其转置矩阵。应力张量：$\varepsilon(\nabla_x u)=\frac{1}{2}\left(\nabla_x u+(\nabla_x u)^{\mathrm{T}}\right)$。错配应变 $\overline{\varepsilon}\in S^3$ 是一个给定的矩阵。弹性张量：$S^3 S^3$ 是一个线性的对称正定映射。总能量为

$$\psi^*(\varepsilon,S)(t,x)=\psi(\varepsilon,S)+\frac{\nu}{2}\left|\nabla_x S(t,x)\right|^2 .$$

其中自由能是 $\psi(\varepsilon,S)=\frac{1}{2}\left(D(\varepsilon-\overline{\varepsilon}S)\right)\cdot(\varepsilon-\overline{\varepsilon}S)+\hat{\psi}(S)$，$\hat{\psi}\in C^2(\mathbb{R},[0,\infty))$ 是双势阱函数，ψ_S 是关于 S 的偏导数。两个矩阵的标量积是：$A\cdot B=\sum a_{ij}b_{ij}$。$c$ 和 ν 都是正常数，且 $\sqrt{\nu}$ 与界面厚度成正比。体积力 $b:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}^3$。数据 $\gamma:[0,\infty)\times\partial\mathbb{R}^3$，$S_0:\Omega\to\mathbb{R}$。

对于这个含有弹性效应和固固相变效应的模型，我们将对其进行适当的简化。首先本文忽视弹性效应，令柯西张力 $T=0$，得到：

$$\begin{aligned}\psi_S&=-\frac{1}{2}\left(D(\overline{\varepsilon})\cdot(\varepsilon-\overline{\varepsilon}S)+D(\varepsilon-\overline{\varepsilon}S)\cdot(\overline{\varepsilon})\right)+\hat{\psi}\\&=-D(\varepsilon-\overline{\varepsilon}S)\cdot(\overline{\varepsilon})+\hat{\psi}_S=-T\cdot(\overline{\varepsilon})+\hat{\psi}_S=\hat{\psi}_S,\end{aligned}$$

则总能量表示为 $\psi^*(S,S_x)(t,x)=\hat{\psi}(S)+\frac{\nu}{2}\left|S_x(t,x)\right|^2$。为了在使用压缩映射原理的过程中，减少记号的出现，本文中将双势肼函数 $\hat{\psi}$ 记为 ψ，并选取

$$\psi(S)=S^2(1-S)^2 \tag{6}$$

至此，本文所要研究的一维纽曼初边值问题的总能量可记为：

$$\psi^*(S,S_x)(t,x)=\psi(S)+\frac{\nu}{2}|S_x(t,x)|^2. \tag{7}$$

研究的初边值问题如下所示：

$$S_t=-c\left(\psi_S(S)-\nu S_{xx}\right)|S_x|,(t,x)\in(0,T_e)\times\Omega \tag{8}$$

$$S_x=0,(t,x)\in(0,T_e)\times\partial\Omega, \tag{9}$$

$$S(0,x)=S_0(x), x\in\Omega, \tag{10}$$

本文研究的 Alber-Zhu 模型弱解定义和主要结论如下：

定义 1：假设 $S_0\in L^\infty(\Omega)$，函数

$$S\in L^\infty\left(0,T_e;H^1(\Omega)\right) \tag{11}$$

是问题(8)-(10)的弱解，对于任意的 $\phi\in C_0^\infty\left((-\infty,T_e);C^\infty(\Omega)\right)$，有

$$-(S,\phi_t)_{Q_{T_e}}=-c\left(\psi_S|S_x|,\phi\right)_{Q_{T_e}}-\frac{c\nu}{2}\left(|S_x|S_x,\phi_x\right)_{Q_{T_e}}+\left(S_0,\phi(0)\right)_\Omega \tag{12}$$

成立。

定理 1：假设 $S_0\in H^1(\Omega)$，存在满足问题(8)-(10)的弱解，不仅满足式(11)，而且满足

$$S_{xt}\in L^{\frac{4}{3}}\left(0,T_e;W^{-1,\frac{4}{3}}(\Omega)\right),S_t\in L^{\frac{4}{3}}\left(Q_{T_e}\right) \tag{13}$$

$$\left(S_x|S_x|\right)_x\in L^{\frac{4}{3}}\left(Q_{T_e}\right)，\quad S_x\in L^{\frac{8}{3}}\left(0,T_e;L^q(\Omega)\right)\text{ 任意 }1<q<\infty \tag{14}$$

对于修正模型，主要结论和弱解定义如下：

定义 2：假设 $S_0\in L^1(\Omega)$，函数

$$S\in L^\infty\left(0,T_e;H^1(\Omega)\right) \tag{15}$$

是问题(19)-(21)的弱解，对于任意的 $\phi\in C_0^\infty\left((-\infty,T_e);C^\infty(\Omega)\right)$，有

$$-(S,\phi_t)_{Q_{T_e}}=-c\left(\psi_S|S_x|_\kappa,\phi\right)_{Q_{T_e}}-c\nu\left(\int_0^{S_x}|y|_\kappa\,\mathrm{d}y,\phi_x\right)_{Q_{T_e}}+\left(S_0,\phi(0)\right)_\Omega \tag{16}$$

成立。

定理 2：假设 $S_0\in H^1(\Omega)$，存在满足问题(19)-(21)的弱解，不仅满足式(15)，而且满足

$$S_x\in L^\infty\left(0,T_e;L^2(\Omega)\right) \tag{17}$$

和

$$S_{xx}\in L^\infty\left(0,T_e;L^2(\Omega)\right),S_t\in L^{\frac{4}{3}}\left(Q_{T_e}\right). \tag{18}$$

本文共有 2 节，第 2.1 中，我们从 Alber-Zhu 模型的退化性入手，通过小参数 κ 构造一个修正的模型，借助于巴拿赫不动点原理得到该非退化模型的弱解存在性并证明了定理 2。第 2.2 节中给出了与 κ 无关的先验估计，该部分参考了我的导师朱佩成教授在文献[12]中所使用的方法，但是因为模型和 κ 的表达的不同，细节方面仍然有所区别。第 2.3 节中，由 Aubin-Lions 引理得到近似解的紧致性，因此证明原问题弱解的存在性并证明了定理 1。

2. 一类固固相变模型的弱解存在性

2.1. 修正模型的局部解存在性

引入$|S_x|_\kappa=\sqrt{|S_x|^2+\kappa^2}$，其中$1\ge\kappa>0$，这样我们就可以得到一个修正后的方程组，如下所示

$$S_t=-c\left(\psi_S(S)-\nu S_{xx}\right)|S_x|_\kappa,\quad (t,x)\in(0,T_e)\times\Omega, \tag{19}$$

$$S_x=0,\quad (t,x)\in(0,T_e)\times\partial\Omega, \tag{20}$$

$$S(0,x)=S_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{21}$$

这是一类非退化的抛物型方程，首先借助截断因子η对$|S_x|_\kappa$截断，再对其磨光，由于$|\widetilde{f}|\le\int_{Q_{T_e}}|f(t-\tau,x-y)|\rho_\eta(\tau,y)\mathrm{d}(\tau,y)$，得到$\widetilde{|(S_x)_\eta|_\kappa}\in L^\infty(Q_{T_e})$。截断磨光后的方程(19)表示如下：

$$S_t-c\nu S_{xx}\widetilde{|(S_x)_\eta|_\kappa}=-c\psi_S(S)\widetilde{|(S_x)_\eta|_\kappa},\quad (t,x)\in(0,T_e)\times\Omega, \tag{22}$$

下面我们使用巴拿赫压缩映射原理证明该修正模型的弱解存在性。

定理 3： 设T是适当小的正数，对于(23)和(20)-(21)，我们有$S\in X$，

$$X=\left\{S\,|\,S\in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right),S_t\in L^{\frac{4}{3}}\left(0,T;L^{\frac{4}{3}}(\Omega)\right)\right\}.$$

证明 1.对于(22)中的$\widetilde{|(S_x)_\eta|_\kappa}$，给定一个函数$S^*\in X$。为了简化计算过程，用$F\in L^\infty(Q_{T_e})$表示$\widetilde{|((S^*)_x)_\eta|_\kappa}$，则(22)可改写成如下形式

$$S_t-FS_{xx}=-F\psi_S(S),\quad (t,x)\in(0,T_e)\times\Omega, \tag{23}$$

对于(23)中的$\psi_S(S)$，给定一个函数$\hat{S}\in X$。

$$S_t-FS_{xx}=-F\psi_{\hat{S}}(\hat{S}),\quad (t,x)\in(0,T_e)\times\Omega. \tag{24}$$

根据[13]中的抛物程方程解存在性。可以知道(24)在(20)-(21)的初边值条件下的解也属于X。这里我们定义一个映射$A:X\to X$，即$A[\hat{S}]=S$。当$\hat{S}\in X$，我们得到了$S\in X$，所以我们说映射A是封闭的。

2.下面我们证明，当$T>0$足够小时，映射A是紧压缩的。

Step1.根据上文中关于映射A的定义，当我们从X中选择两个函数$\hat{S}_1$，$\hat{S}_2$时，就可以得到S_1和S_2，这两个新的函数即满足$S_1=A[\hat{S}_1]$，$S_2=A[\hat{S}_2]$，也满足(20)-(21)和(24)。令$W=S_1-S_2$，得到了一个新的线性的偏微分方程组。

$$W_t-FW_{xx}=-F\left(\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right),\quad (t,x)\in(0,T_e)\times\Omega, \tag{25}$$

$$W_x=0,\quad (t,x)\in(0,T_e)\times\partial\Omega, \tag{26}$$

$$W(0,x)=0,\quad x\in\Omega. \tag{27}$$

Step2.用W与(25)做内积可得

$$(W_t,W)+(-FW_{xx},W)=\left(-F\left(\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right),W\right),$$

考虑边值条件(26)，以及F和κ的关系，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|W\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\|W_x\|_{L^2(\Omega)}^2\le -C\int_\Omega\left(\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right)W\mathrm{d}x,$$

上式关于时间 t 积分，再根据 Hölder 不等式和索伯列夫嵌入定理，得到

$$\begin{aligned}
&\|W\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2+\kappa\int_0^T\|W_x\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}\tau\\
&\le C\int_{Q_{T_e}}\left(-\left(\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right)\right)W\mathrm{d}(\tau,x)\\
&\le C_\varepsilon\left\|\left(-\left(\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right)\right)\right\|_{L^2(Q_T)}^2+\varepsilon\|W\|_{L^2(Q_T)}^2\\
&\le C_\varepsilon\left\|\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right\|_{L^2(Q_T)}^2+\varepsilon\|W\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2\int_0^T\mathrm{d}\tau\\
&\le C_\varepsilon\left\|\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right\|_{L^2(Q_T)}^2+\varepsilon\|W\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2
\end{aligned}$$

对于上面不等式右边的 ε，取足够小使得 $C-\varepsilon>0$，再带入(6)定义的双势阱函数，从而有

$$\begin{aligned}
&\|W\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2+C\int_0^T\|W_x\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}\tau\\
&\le C_\varepsilon\left\|\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right\|_{L^2(Q_T)}^2\\
&\le C_\varepsilon\left\|4\hat{S}_1^3-6\hat{S}_1^2+2\hat{S}_1-4\hat{S}_2^3+6\hat{S}_2^2-2\hat{S}_2\right\|_{L^2(Q_T)}^2\\
&\le C_\varepsilon\left\|\left(\hat{S}_1-\hat{S}_2\right)\left(\hat{S}_1^2+\hat{S}_1\hat{S}_2+\hat{S}_2^2-6\hat{S}_1-6\hat{S}_2+2\right)\right\|_{L^2(Q_T)}^2\\
&\le C\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2\int_0^T\mathrm{d}\tau\le CT\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2
\end{aligned}$$

整理上述不等式，得到

$$\|W\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}+\|W_x\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}\le(CT)^{\frac{1}{2}}\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}.\tag{28}$$

Step3.将(25)与 $-W_{xx}$ 做内积，有

$$\left(W_t,-W_{xx}\right)+\left(-FW_{xx},-W_{xx}\right)=\left(-F\left(\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right),-W_{xx}\right),$$

对 x 积分，再由于 F 的特点，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|W_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\|W_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\le C\int_\Omega\left(\psi_{\hat{S}_1}-\psi_{\hat{S}_2}\right)W_{xx}\mathrm{d}x=C\int_\Omega W_x\left(\psi_{\hat{S}_2}-\psi_{\hat{S}_1}\right)_x\mathrm{d}x\\
&=C\int_\Omega\left(\frac{\mathrm{d}\psi_{\hat{S}_2}}{\mathrm{d}\hat{S}_2}\frac{\partial\hat{S}_2}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}\psi_{\hat{S}_1}}{\mathrm{d}\hat{S}_1}\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial x}\right)W_x\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\left(\frac{\mathrm{d}\psi_{\hat{S}_2}}{\mathrm{d}\hat{S}_2}\left(\frac{\partial\hat{S}_2}{\partial x}-\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial x}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}\psi_{\hat{S}_2}}{\mathrm{d}\hat{S}_2}-\frac{\mathrm{d}\psi_{\hat{S}_1}}{\mathrm{d}\hat{S}_1}\right)\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial x}\right)W_x\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\frac{\mathrm{d}\psi_{\hat{S}_2}}{\mathrm{d}\hat{S}_2}\left(\frac{\partial\hat{S}_2}{\partial x}-\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial x}\right)W_x\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(\hat{S}_2-\hat{S}_1\right)\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial x}\psi'''(\xi)W_x\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega\left(\frac{\partial\hat{S}_2}{\partial x}-\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial x}\right)W_x\mathrm{d}x+C\left\|\hat{S}_2-\hat{S}_1\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\|W_x\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

将上述不等式左右二边关于时间 t 积分，再由 Hölder 不等式，得到

$$
\begin{aligned}
&\|W_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|W_{xx}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\le \int_{Q_T}\left(\frac{\partial \hat{S}_2}{\partial x}-\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}\right)W_x\mathrm{d}(x,\tau)+\int_0^T\left\|\hat{S}_2-\hat{S}_1\right\|_{L^2(\Omega)}\|W_x\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&\le \int_{Q_T}\left(\frac{\partial \hat{S}_2}{\partial x}-\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}\right)W_x\mathrm{d}(x,\tau)+\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|_{L^2(Q_T)}\|W_x\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\left\|\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}\right\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\\
&\le \left\|\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}-\frac{\partial \hat{S}_2}{\partial x}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|W_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+C_\varepsilon\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|^2_{L^2(Q_T)}+\varepsilon\|W_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\le C_\varepsilon\left\|\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}-\frac{\partial \hat{S}_2}{\partial x}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+C_\varepsilon\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|^2_{L^2(Q_T)}+2\varepsilon\|W_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}
\end{aligned}
$$

选ε足够小使得$1-2\varepsilon>0$，再根据索伯列夫嵌入定理，我们得到

$$
\|W_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|W_{xx}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\le CT\left\|\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}-\frac{\partial \hat{S}_2}{\partial x}\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+CT\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},
$$

即

$$
\|W_x\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|W_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\le (CT)^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\frac{\partial \hat{S}_1}{\partial x}-\frac{\partial \hat{S}_2}{\partial x}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\left\|\hat{S}_1-\hat{S}_2\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right) \tag{29}
$$

最后,根据(28)和(29)我们可以说映射 A 是紧压缩的，即当且仅当$T>0$足够小使得$(CT)^{\frac{1}{2}}<1$时。

引理 1：对任意的$t\in[0,T_e]$，存在与κ和η无关的常数 C，使得

$$
\int_\Omega \psi^*(S,S_x)(t,x)\mathrm{d}x\le C, \tag{30}
$$

$$
\int_{Q_{T_e}}\left(\psi(S)_S-\nu S_{xx}\right)^2\widetilde{\left|(S_x)_\eta\right|_\kappa}\mathrm{d}(\tau,x)\le C \tag{31}
$$

成立。

证明：先对于(7)关于空间变量 x 积分，再对时间变量 t 求导，接着插入(22)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \psi^*(S,S_x)(t,x)\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\psi(S)+\frac{\nu}{2}S_x^2\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\left(\psi(S)_S\,S_t+\nu S_xS_{tx}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\left(\psi(S)_S-\nu S_{xx}\right)S_t\mathrm{d}x\\
&=-c\int_\Omega\left(\psi(S)_S-\nu S_{xx}\right)^2\widetilde{\left|(S_x)_\eta\right|_\kappa}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

再关于 t 积分，有

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \psi^*(S,S_x)(t,x)\mathrm{d}x+c\int_{Q_{T_e}}\left(\psi(S)_S-\nu S_{xx}\right)^2\widetilde{\left|(S_x)_\eta\right|_\kappa}\mathrm{d}(\tau,x)\\
&\le\int_\Omega \psi^*(S,S_x)(0,x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{32}
$$

观察上面的等式和初值 $S_0 \in H^1(\Omega)$ 以及 $t=0$ 时的(7)

$$\int_\Omega \psi^*(S,S_x)(0,x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \psi(S(0,x)) + \frac{\nu}{2} S_x(0,x)^2 \mathrm{d}x \le C,$$

将上式带入(32)，证明结束。

引理 2： 对任意的 $t \in [0,T_e]$，存在与 κ 和 η 无关的常数 C，使得

$$S \in L^\infty\left(0,T_e;L^4(\Omega)\right), \tag{33}$$

$$S_x \in L^\infty\left(0,T_e;L^2(\Omega)\right)。 \tag{34}$$

证明： 根据引理 1，我们知道 $\int_\Omega \psi^*(S,S_x)(t,x)\mathrm{d}x \le C$，再带入双势阱函数(6)，得到

$$\int_\Omega S^2 - 2S^3 + S^4 + \frac{\nu}{2}|S_x|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \psi^*(S,S_x)(t,x)\mathrm{d}x \le C,$$

将上式中左边的 $-2S^2$ 移到等式右边，有

$$\int_\Omega S^2 + S^4 + \frac{\nu}{2}|S_x|^2 \mathrm{d}x \le C + \int_\Omega 2S^3 \mathrm{d}x \le C + 2\int_\Omega \left(\varepsilon S^4 + C_\varepsilon\right)\mathrm{d}x \le C + 2\int_\Omega \varepsilon S^4 \mathrm{d}x,$$

不等式二边同时减去 $2\int_\Omega \varepsilon S^4 \mathrm{d}x$，

$$\int_\Omega S^2 + (1-2\varepsilon)S^4 + \frac{\nu}{2}|S_x|^2 \mathrm{d}x \le C,$$

取ε足够小使得等式左边的 $1-2\varepsilon>0$,则上面不等式可以推出 $\int_\Omega S^2 \mathrm{d}x \le C$，$\int_\Omega S^4 \mathrm{d}x \le C$，$\int_\Omega S_x^2 \mathrm{d}x \le C$，至此，引理得证。

引理 3： 对任意的 $t \in [0,T_e]$，存在与 κ 有关但和 η 无关的常数 C，使得

$$\int_{Q_{T_e}} S_{xx}^2 \mathrm{d}(\tau,x) \le C \tag{35}$$

成立。

证明： 应用 $(a \pm b)^2 < 2\left(a^2+b^2\right)$，并选取 $a = \psi_S - \nu S_{xx}$，$b = \psi_S$，可以得到

$$\left(\psi_S - \nu S_{xx} - \psi_S\right)^2 < 2\left(\left(\psi_S - \nu S_{xx}\right)^2 + \psi_S^2\right),$$

积分后得

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{T_e}} \left(\psi_S - \nu S_{xx} - \psi_S\right)^2 \mathrm{d}(\tau,x) \\
&\le 2\int_{Q_{T_e}} \left(\psi(S)_S - \nu S_{xx}\right)^2 + \psi_S^2 \mathrm{d}(\tau,x) \\
&\le 2\int_{Q_{T_e}} \left(\psi(S)_S - \nu S_{xx}\right)^2 \mathrm{d}(\tau,x) + \int_{Q_{T_e}} \psi_S^2 \mathrm{d}(\tau,x)
\end{aligned}$$

联结 $\widetilde{\left|(S_x)_\eta\right|_\kappa} = \sqrt{\left|(S_x)_\eta\right|^2 + \kappa^2} \ge \kappa$ 和(31)，有

$$\kappa \int_{Q_{T_e}} \left(\psi(S)_S - \nu S_{xx}\right)^2 \mathrm{d}(\tau,x) \le \int_{Q_{T_e}} \left(\psi(S)_S - \nu S_{xx}\right)^2 \widetilde{\left|(S_x)_\eta\right|_\kappa} \mathrm{d}(\tau,x) \le C.$$

再由引理 2 可以得到，存在一个与 κ 有关的常数 C 使得(35)成立。

引理 4： 存在与 κ 和 η 无关的常数 C，使得对任意的 $t \in [0,T_e]$，

$$\int_{Q_{T_e}} |S_t|^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}(\tau,x) \le C \tag{36}$$

成立。

证明： 为了证明这个引理，我们代入(22)，再选择 $2>r\ge 1$， $qr=2$，应用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\int_{Q_{T_e}}|S_t|^r\,\mathrm{d}(\tau,x) &= \int_{Q_{T_e}}\left|-c\left(\psi_S(S)-\nu S_{xx}\right)\left|\widetilde{(S_x)_\eta}\right|_\kappa\right|^r\mathrm{d}(\tau,x)\\ &= \int_{Q_{T_e}}\left|-c\left(\psi_S(S)-\nu S_{xx}\right)\right|^r\left|\widetilde{(S_x)_\eta}\right|_\kappa^{\frac{r}{2}}\left|\widetilde{(S_x)_\eta}\right|_\kappa^{\frac{r}{2}}\mathrm{d}(\tau,x)\\ &\le\left(\int_{Q_{T_e}}\left|-c\left(\psi_S(S)-\nu S_{xx}\right)\right|^{qr}\left|\widetilde{(S_x)_\eta}\right|_\kappa^{\frac{rq}{2}}\mathrm{d}(\tau,x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_{T_e}}\left|\widetilde{(S_x)_\eta}\right|_\kappa^{\frac{rp}{2}}\mathrm{d}(\tau,x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le C\left(\int_{Q_{T_e}}\left|\widetilde{(S_x)_\eta}\right|_\kappa^{\frac{r}{2-r}}\mathrm{d}(\tau,x)\right)^{\frac{2-r}{2}}\end{aligned}$$

根据引理 2 和 $|p|_\kappa\le|p|+\kappa\le|p|+1$，当 $\dfrac{r}{2-r}\le 2$ 时，即 $r\le\dfrac{4}{3}$ 时，我们立即就可以得到(36)。

定理 4： 假设 $S_0\in H^1(\Omega)$，对于修正问题(19)-(21)存在一个弱解 S，其中 $S\in L^2\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)\in L^2\left(0,T_e;C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})\right)$， $\alpha<\dfrac{1}{2}$， 和 $S_t\in L^{\frac{4}{3}}\left(Q_{Te}\right)$，使得

$$\left(S_x^*\right)_\eta\to S_x,\ \text{强收敛于空间}\ L^2\left(Q_{T_e}\right)\ \text{内}, \tag{37}$$

$$\left|\widetilde{\left(S_x^*\right)_\eta}\right|\to|S_x|,\ \text{强收敛于空间}\ L^2\left(Q_{T_e}\right)\ \text{内}, \tag{38}$$

$$\left|\widetilde{\left(S_x^*\right)_\eta}\right|_\kappa\to|S_x|_\kappa,\ \text{强收敛于空间}\ L^2\left(Q_{T_e}\right)\ \text{内}, \tag{39}$$

成立。

证明： 根据 $(S_x)_\eta$ 的定义，我们可以直接得到，当 $\eta\to 0$

$$\left\|\left(S_x^*\right)_\eta-S_x\right\|_{L^2\left(Q_{T_e}\right)}\to 0,$$

再应用 $\|\tilde{f}\|_{L^2\left(Q_{T_e}\right)}\le\|f\|_{L^2\left(Q_{T_e}\right)}$ 的性质，可以推出

$$\left\|\left|\widetilde{\left(S_x^*\right)_\eta}\right|-|S_x|\right\|_{L^2\left(Q_{T_e}\right)}\le\left\|\left(S_x^*\right)_\eta-|S_x|\right\|_{L^2\left(Q_{T_e}\right)}\to 0.$$

鉴于在 $L^2\left(Q_{T_e}\right)$ 空间存在一个连续映射 $f\to|f|_\kappa$，再结合上式，最终得到

$$\left\|\left|\widetilde{\left(S_x^*\right)_\eta}\right|_\kappa-|S_x|_\kappa\right\|_{L^2\left(Q_{T_e}\right)}\to 0.$$

定理 4 得证。

借助于定理 3 和定理 4，修正问题(19)-(21)的弱解存在性至此已经证明结束。

2.2. 与κ无关的先验估计

目前为止，我们已经求得修正问题的弱解存在性。但是实际上章节 2.1 中给出的部分估计是与 κ 有

关的，这使得我们无法直接证明序列$\{S_x^\kappa\}$是完备的，即无法证明当$\kappa\to 0$时的极限是否是我们所需要的。但是我们必须要求解一个序列可以收敛回原问题的解，所以本节将说明$\{S_x^\kappa|S_x^\kappa|\}$或者更详细的说，这个序列的近似，存在有界的偏导数，再借助于 Aubin-Lions 引理，使得问题可以得到解决。

下面先对于章节 2.1 中的修正问题的解序列$\{S^\kappa\}$建立与κ无关的先验估计。设T_e是一个固定的正常数，对于任意的κ，函数$S_0^\kappa\in C^\infty(\Omega)$使得

$$\left\|S_0^\kappa - S_0\right\|_{H^1(\Omega)}\to 0, \quad \kappa\to 0, \tag{40}$$

其中$S_0\in H^1(\Omega)$是定理 1 给出的。

引理 5 存在与κ无关的常数 C，使得

$$\int_0^t\int_\Omega \left|S_x^\kappa\right|_\kappa \left|S_{xx}^\kappa\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C, \tag{41}$$

$$\int_0^t\int_\Omega \left(\left|S_x^\kappa\right|_\kappa \left|S_{xx}^\kappa\right|\right)^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C \tag{42}$$

成立。

证明对于方程(19)二边同时乘以$-S_{xx}^\kappa$，再对 x 分部积分，应用 Young 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{d}t}\left\|S_x^\kappa\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \nu\left|S_x^\kappa\right|_\kappa \left|S_{xx}^\kappa\right|^2 \mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega \psi_S \left|S_x^\kappa\right|_\kappa S_{xx}^\kappa \mathrm{d}x \le C\int_\Omega \left|S_x^\kappa\right|_\kappa \left|S_{xx}^\kappa\right| \mathrm{d}x\\ &\le \varepsilon\int_\Omega \left|S_x^\kappa\right|_\kappa \left|S_{xx}^\kappa\right|^2 \mathrm{d}x + C_\varepsilon\int_\Omega \left|S_x^\kappa\right|_\kappa \mathrm{d}x\end{aligned}$$

选择$\varepsilon = \dfrac{\nu}{2}$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{d}t}\left\|S_x^\kappa\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \frac{\nu}{2}\left|S_x^\kappa\right|_\kappa \left|S_{xx}^\kappa\right|^2 \mathrm{d}x \le C_\nu\int_\Omega \left|S_x^\kappa\right|_\kappa \mathrm{d}x.$$

对上面的不等式二边关于时间 t 积分，注意到边界条件(20)和引理 2，可以立即推出(41)。

根据方程(19)和引理 2 及引理 4，(42)得证。

引理 6 存在与κ无关的常数 C，使得对任意的$t\in[0,T_e]$，

$$\int_0^t\int_\Omega \left|\left(\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right)_x\right|^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C, \tag{43}$$

$$\int_0^t \left\|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\right\|_{L^\infty}^{\frac{8}{3}} \mathrm{d}\tau \le C, \tag{44}$$

成立。

证明为了证明(43)，令$S_x^\kappa =: y$，$\left|S_x^\kappa\right|_\kappa =: |y|_\kappa$，使用他们进行如下计算

$$\left|\left(\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right)_x\right| = \left|\left(|y|_\kappa^2\right)_x\right| \le 2|y||y_x| \le 2|y|_\kappa|y_x| = 2\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\left|S_{xx}^\kappa\right|, \tag{45}$$

联结(42)

$$\int_0^t\int_\Omega \left|\left(\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right)_x\right|^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le \int_0^t\int_\Omega \left|2\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\left|S_{xx}^\kappa\right|\right|^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le 2^{\frac{4}{3}}\int_0^t\int_\Omega \left|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\left|S_{xx}^\kappa\right|\right|^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C.$$

为了证明(44)，使用(43)和庞加莱不等式

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega \left|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau &= \int_0^t\int_\Omega \left|\left(S_x^\kappa\right)^2+\kappa^2\right|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &\le \int_0^t\int_\Omega \left|\left(S_x^\kappa\right)^2\right|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_\Omega \left|\kappa^2\right|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &\le C\int_0^t\int_\Omega \left|\left(\left(S_x^\kappa\right)^2\right)_x\right|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C\cdot 1\\ &\le C\int_0^t\int_\Omega \left|\left(\left(S_x^\kappa\right)^2+\kappa^2\right)_x\right|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C\\ &\le \int_0^t\int_\Omega \left|\left(\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right)_x\right|^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C\le C\end{aligned}$$

考虑到上式和(43)，应用索伯列夫嵌入定理，最终可以得到

$$\int_0^t\left\|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{8}{3}}\mathrm{d}\tau\le C\int_0^t\left\|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right\|_{W^{1,\frac{4}{3}}(\Omega)}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}\tau\le C,$$

根据 $\left|S_x^\kappa\right|_\kappa$ 的定义，即 $\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2=\left(S_x^\kappa\right)^2+\kappa^2$。最终，我们可以得到

$$\int_0^t\left\|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{8}{3}}\mathrm{d}\tau\le\int_0^t\left\|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}\tau\le C.$$

引理 7 存在与 κ 无关的常数 C 使得对任意的 $t\in[0,T_e]$，

$$\left\|S_x^\kappa S_{xt}^\kappa\right\|_{L^1\left(0,T_e;H^{-2}(\Omega)\right)}\le C, \tag{46}$$

$$\left\|\left(\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right)_t\right\|_{L^1\left(0,T_e;H^{-2}(\Omega)\right)}\le C \tag{47}$$

成立。

证明我们发现 $L^1\left(0,T_e;H^{-2}(\Omega)\right)$ 是等距嵌入到其对偶空间 $L^\infty\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)$，所以(46)的成立意味着下面不等式的成立

$$\left|\left(S_x^\kappa S_{xt}^\kappa,\phi\right)\right|\le C\|\phi\|_{L^\infty\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)},$$

其中 $\phi\in L^\infty\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)$。

为了证明等价后的的上式。首先用 $S_x^\kappa S_{xt}^\kappa$ 与 ϕ 做内积，分部积分后再带入方程(19)

$$\begin{aligned}\left(S_x^\kappa S_{xt}^\kappa,\phi\right)&=\int_0^{T_e}\int_\Omega -S_{xx}^\kappa S_t^\kappa\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\int_0^{T_e}\int_\Omega S_x^\kappa S_t^\kappa\phi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &=c\int_0^{T_e}\int_\Omega S_{xx}^\kappa\left(\psi_S-\nu S_{xx}^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &\quad+c\int_0^{T_e}\int_\Omega S_x^\kappa\left(\psi_S-\nu S_{xx}^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\phi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &=:I_1+I_2\end{aligned} \tag{48}$$

下面分别计算 I_1,I_2

$$\begin{aligned}\left|I_1\right|&=\left|c\int_0^{T_e}\int_\Omega S_{xx}^\kappa\phi\psi_S\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-c\nu\int_0^{T_e}\int_\Omega\left(S_{xx}^\kappa\right)^2\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|\\ &\le c\int_0^{T_e}\int_\Omega\left|\phi\psi_S\right|\left|S_{xx}^\kappa\right|\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+c\nu\int_0^{T_e}\int_\Omega|\phi|\left(S_{xx}^\kappa\right)^2\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{49}$$

为了估计上式等式右边中的第一项，我们应用 Hölder 不等式、引理 2，和(42)

$$c\int_0^{T_e}\int_\Omega|\phi\psi_S||S_{xx}^\kappa||S_x^\kappa|_\kappa \,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C\|\phi\|_{L^\infty(Q_{T_e})}\left\||S_{xx}^\kappa||S_x^\kappa|_\kappa\right\|_{L^1(Q_{T_e})} \le C\|\phi\|_{L^\infty(0,T_e;H^2(\Omega))}. \tag{50}$$

对于(49)的右边第二项，应用 Hölder 不等式和(41)我们得到

$$c\nu\int_0^{T_e}\int_\Omega|\phi|\left(S_{xx}^\kappa\right)^2|S_x^\kappa|_\kappa \,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C\|\phi\|_{L^\infty(Q_{T_e})}\left\|\left(S_{xx}^\kappa\right)^2|S_x^\kappa|_\kappa\right\|_{L^1(Q_{T_e})} \le C\|\phi\|_{L^\infty(0,T_e;H^2(\Omega))}. \tag{51}$$

结合(50)和(51)，我们立即可以得到 $|I_1| \le C\|\phi\|_{L^\infty(0,T_e;H^2(\Omega))}$。

现在开始估计 I_2

$$\begin{aligned}|I_2| &= \left|c\int_0^{T_e}\int_\Omega S_x^\kappa\psi_S|S_x^\kappa|_\kappa\phi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau - c\nu\int_0^{T_e}\int_\Omega S_x^\kappa|S_x^\kappa|_\kappa S_{xx}^\kappa\phi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right| \\ &\le c\int_0^{T_e}\int_\Omega\left|\phi_x\psi_S S_x^\kappa|S_x^\kappa|_\kappa\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + c\nu\int_0^{T_e}\int_\Omega|\phi_x S_{xx}^\kappa S_x^\kappa||S_x^\kappa|_\kappa\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &=: |I_{2,1}| + |I_{2,2}\end{aligned} \tag{52}$$

根据引理 2 和 $|S_x^\kappa| \le |S_x^\kappa|_\kappa$ 可以得到

$$|I_{2,1}| = c\int_0^{T_e}\int_\Omega\left|\phi_x\psi_S S_x^\kappa|S_x^\kappa|_\kappa\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C\int_0^{T_e}\int_\Omega\left|\phi_x|S_x^\kappa|_\kappa^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C\|\phi_x\|_{L^\infty(Q_{T_e})}\left\||S_x^\kappa|_\kappa^2\right\|_{L^1(Q_{T_e})} \le C\|\phi\|_{L^\infty(0,T_e;H^2(\Omega))} \tag{53}$$

应用 Hölder 不等式和(44),(41)，我们可以得到

$$\begin{aligned}|I_{2,2}| &= c\nu\int_0^{T_e}\int_\Omega|S_x^\kappa S_{xx}^\kappa\phi_x||S_x^\kappa|_\kappa\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &\le c\nu\int_0^{T_e}\left\||S_x^\kappa|_\kappa\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\phi_x\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\left(|S_x^\kappa|_\kappa\right)^{\frac{1}{2}}|S_{xx}^\kappa||S_x^\kappa|\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &\le c\nu\int_0^{T_e}\left\||S_x^\kappa|_\kappa\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\phi_x\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega|S_x^\kappa|_\kappa|S_{xx}^\kappa|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|S_x^\kappa|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau \\ &\le C\|\phi\|_{L^\infty(0,T_e;H^2(\Omega))}\int_0^{T_e}\left\||S_x^\kappa|_\kappa\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|S_x^\kappa|_\kappa|S_{xx}^\kappa|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau \\ &\le C\|\phi\|_{L^\infty(0,T_e;H^2(\Omega))}\left(\int_0^{T_e}\left\||S_x^\kappa|_\kappa\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T_e}\int_\Omega|S_x^\kappa|_\kappa|S_{xx}^\kappa|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\|\phi\|_{L^\infty(0,T_e;H^2(\Omega))}\end{aligned} \tag{54}$$

至此，通过对 I_2 和 I_1 的估计可以得到 $\left\|S_x^\kappa S_{xt}^\kappa\right\|_{L^1(0,T_e;H^{-2}(\Omega))}$ 是有界的。

为了证明(47)，我们给出下面的定义

$$f_\kappa := -c\left(\psi\left(S^\kappa\right)_S - \nu S_{xx}^\kappa\right)|S_x^\kappa|_\kappa. \tag{55}$$

取 $\phi \in L^\infty\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)$，用 $\left(S_x^\kappa\phi\right)_x$ 与 $\left(S_t^\kappa - f_\kappa\right)$ 作内积，并且关于 (t,x) 做积分，利用(45)可得

$$\begin{aligned}0 &= \left(\left(S_t^\kappa - f_\kappa\right),\left(S_x^\kappa\phi\right)_x\right)_{Q_{T_e}} \\ &= \left(S_t^\kappa,\left(S_x^\kappa\phi\right)_x\right)_{Q_{T_e}} - \left(f_\kappa,\left(S_x^\kappa\phi\right)_x\right)_{Q_{T_e}} \\ &= -\int_{Q_{T_e}}S_{tx}^\kappa S_x^\kappa\phi\,\mathrm{d}(\tau,x) - \left(f_\kappa,S_{xx}^\kappa\phi\right)_{Q_{T_e}} - \left(f_\kappa,S_x^\kappa\phi_x\right)_{Q_{T_e}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\left(|S_x^\kappa|_\kappa^2\right)_t,\phi\right)_{Q_{T_e}} - \left(f_\kappa,S_{xx}^\kappa\phi\right)_{Q_{T_e}} - \left(f_\kappa,S_x^\kappa\phi_x\right)_{Q_{T_e}}\end{aligned}$$

把上式改写成如下格式

$$\left|\frac{1}{2}\left(\left(\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\right)_t,\phi\right)_{Q_{T_e}}\right|=\left|-\left(f_\kappa,S_{xx}^\kappa\phi\right)_{Q_{T_e}}-\left(f_\kappa,S_x^\kappa\phi_x\right)_{Q_{T_e}}\right|\le\int_{Q_{T_e}}\left|f_\kappa S_{xx}^\kappa\phi\right|\mathrm{d}(\tau,x)+\int_{Q_{T_e}}\left|f_\kappa S_x^\kappa\phi_x\right|\mathrm{d}(\tau,x)\tag{56}$$

由估计(55)和(48)~(51)可得

$$\int_{Q_{T_e}}\left|f_\kappa S_{xx}^\kappa\phi\right|\mathrm{d}(\tau,x)=\int_{Q_{T_e}}\left|S_t^\kappa S_{xx}^\kappa\phi\right|\mathrm{d}(\tau,x)\le C\|\phi\|_{L^\infty\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)}.\tag{57}$$

由(48)，(55)和(52)~(54)，我们就可以用 $C\|\phi\|_{L^\infty\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)}$ 来估计(56)的等式右边最后一项

$$\int_{Q_{T_e}}\left|f_\kappa S_x^\kappa\phi_x\right|\mathrm{d}(\tau,x)=\int_{Q_{T_e}}\left|S_t^\kappa S_x^\kappa\phi_x\right|\mathrm{d}(\tau,x)\le C\|\phi\|_{L^\infty\left(0,T_e;H^2(\Omega)\right)}.\tag{58}$$

至此，由(56)-(58)，使得(47)成立。

根据引理 2,引理 4 和引理 5~7，我们可以将 Alber-Zhu 模型(8)~(10)的弱解从小区间 $[0,T]$ 不断延拓到整个空间 $[0,T_e]$。

2.3. 一维 Alber-Zhu 模型弱解的存在性

本节我们将研究(19)-(21)的解 $\{S^\kappa\}$ 在 $\kappa\to0$ 时的收敛性并且证明定理 1。

由估计(34)和(36)可得 $\|S^\kappa\|_{W^{1,\frac{4}{3}}(Q_{T_e})}\le C$，其中 C 是与 κ 无关的常数。意味着我们可以选择序列 $\kappa_n\to0$ 和一个函数 $S\in W^{1,\frac{4}{3}}\left(Q_{T_e}\right)$ 使得序列 S^{κ_n} (这里仍然用 S^κ 来表示)满足下式

$$\|S^\kappa-S\|_{L^{\frac{4}{3}}(Q_{T_e})}\to0,\quad S_x^\kappa\rightharpoonup S_x,\quad S_t^\kappa\rightharpoonup S_t,\tag{59}$$

这里的弱收敛存在空间 $L^{\frac{4}{3}}\left(Q_{T_e}\right)$。

引理 8： B_0 是一个赋范线性空间并且紧嵌入另一个赋范线性空间 B，B 连续嵌入到一个 Hausdorf 局部凸空间 B_1，其中 $1\le p<\infty$。如果 $v,v_i\in L^p\left(0,T_e;B_0\right)$，$i\in\mathbb{N}$，序列 $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在空间 $L^p\left(0,T_e;B_0\right)$ 中弱收敛于 v，且 $\left\{\frac{\partial v_i}{\partial t}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在空间 $L^1\left(0,T_e;B_1\right)$ 上有界，则 v_i 在空间 $L^p\left(0,T_e;B\right)$ 内强收敛于 v。

引理 9： $\left(0,T_e\right)\times\Omega$ 是一个在 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$ 上的开集，假设函数序列 g_n，函数 g 都在空间 $L^q\left(\left(0,T_e\right)\times\Omega\right)$ 内，并且对于任意所给的 $1<q<\infty$，满足

$$\|g_n\|_{L^q((0,T_e)\times\Omega)}\le C,\quad g_n\to g,\ \text{a.e.在}\left(0,T_e\right)\times\Omega\text{ 内},$$

则函数序列 g_n 在空间 $L^q\left(\left(0,T_e\right)\times\Omega\right)$ 内弱收敛于 g。

引理 8 是一般形式的 Aubin-Lions 引理，其证明详见文献[14]，引理 9 的证明在[15]。

引理 10： 存在与 κ 无关的常数 C 使得

$$S_x^\kappa\to S_x,\ \text{a.e. in }Q_{T_e},\tag{60}$$

$$\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\to S_x,\quad\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\to\left|S_x\right|,\ \text{a.e. in }Q_{T_e},\tag{61}$$

$$\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\rightharpoonup S_x,\quad\left|S_x^\kappa\right|_\kappa\rightharpoonup\left|S_x\right|,\ \text{弱收敛于空间 }L^{\frac{4}{3}}\left(Q_{T_e}\right),\tag{62}$$

$$\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2\to S_x\left|S_x\right|,\ \text{强收敛于空间 }L^{\frac{4}{3}}\left(0,T_e;L^2(\Omega)\right)。\tag{63}$$

证明我们应用引理 8 并选择 $p=\frac{4}{3}$

$$B_0 = W^{1,\frac{4}{3}}(\Omega),\quad B = L^2(\Omega),\quad B_1 = H^{-2}(\Omega),$$

由(43)和(47)，我们发现 $\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2$ 和 $\left(\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2\right)_t$ 是有界的，那么这些空间就完全满足引理 8 的前提条件。也就是说存在一个子序列，为了简洁，这里仍然用 $\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2$ 来表示，在空间 $L^p(0,T_e;B) = L^{\frac{4}{3}}(0,T_e;L^2(\Omega))$ 中强收敛于一个极限函数 $G \in L^{\frac{4}{3}}(0,T_e;L^2(\Omega))$。

实际上另一个子序列仍然用 $\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2$ 来表示，存在下述关系 $\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2 \to S_x|S_x|$ a.e.在 Q_{T_e} 内。令 $f\left(\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa\right) = \operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2$，利用映射 $y \to f(y) := y|y|$，有一个连续的逆映射 $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们可以推论 $f^{-1}\left(\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2\right) = \operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa$ 在 Q_{T_e} 内几乎处处收敛。由此，可以得到序列 S_x^κ 几乎处处收敛。我们借助 $|S_x^\kappa|_\kappa$ 的定义，可以看到 $(S_x^\kappa)^2 = \left(\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa\right)^2 - \kappa^2$。即 $\lim_{\kappa\to0} S_x^\kappa = \lim_{\kappa\to0}\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa$。至此，$S_x^\kappa$ 在 Q_{T_e} 内几乎处处收敛得证。

由引理 9 和 $S_x^\kappa \rightharpoonup S_x$ in $L^{\frac{4}{3}}(Q_{T_e})$，(60)-(61)立即可以得到证明。关系式(61)和极限的唯一性意味着(63)。联结(59)和文中设定的关系式 $\left\||S_x^\kappa|_\kappa\right| = \left|\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa\right| \le |S_x^\kappa| + \kappa \le |S_x^\kappa| + 1$，再应用引理 9，我们立即得到(62)。

证明定理 1：根据(59)，我们可以给定一个子序列 $\{S^\kappa\}$ 和相应的极限函数，用 $\{S^\kappa\}$ 来表示定理 2 中方程(19)~(21)所构造的解序列。下面我们将证明 S 是(8)~(10)的弱解。

引理 5 和(59)立即可以得到(11)。(13)中的第二项由(59)可得。(14)中的第二项可由(44)和(61)可得。(14)中的第一项是(43)和(63)的一个结论。为了证明(13)中的第一项，我们选择 $\phi \in L^4(0,T_e,W^{1,4}(\Omega))$ 并且用(55)中定义的 $-\phi_x$ 和 $S_t^\kappa - f_\kappa$ 做内积，在时间和空间上积分，可得

$$0 = \left((S_t^\kappa - f_\kappa), -\phi_x\right)_{Q_{T_e}} = \int_{Q_{T_e}} S_{tx}^\kappa \phi \,\mathrm{d}(\tau,x) + (f_\kappa,\phi_x)_{Q_{T_e}},$$

注意到引理 2-5，我们得到

$$\int_{Q_{T_e}} S_{tx}^\kappa \phi \,\mathrm{d}(\tau,x) \le \|f_\kappa\|_{L^{\frac{4}{3}}(Q_{T_e})} \|\phi_x\|_{L^4(Q_{T_e})} \le C\|\phi\|_{L^4(0,T_e;W^{1,4}(\Omega))},$$

即 $\|S_{xt}^\kappa\|_{L^{\frac{4}{3}}\left(0,T_e;W^{-1,\frac{4}{3}}(\Omega)\right)} \le C$。联结此式和(59)，第一项立即可得。

为了证明(12)，我们研究下面的收敛关系

$$\left(S_0^\kappa,\phi(0)\right)_\Omega \to \left(S_0,\phi(0)\right)_\Omega, \tag{64}$$

$$\left(S^\kappa,\phi_t\right)_{Q_{T_e}} \to \left(S,\phi_t\right)_{Q_{T_e}}, \tag{65}$$

$$\left(\int_0^{S_x^\kappa}|y|_\kappa\,\mathrm{d}y,\phi_x\right)_{Q_{T_e}} \to \left(\frac{1}{2}|S_x|S_x,\phi_x\right)_{Q_{T_e}}, \tag{66}$$

$$\left(\psi_S(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa,\phi\right)_{Q_{T_e}} \to \left(\psi_S|S_x|,\phi\right)_{Q_{T_e}}, \tag{67}$$

当 $\kappa \to 0$。(64)和(65)由(40)和(59)可得。为了证明(66)

$$\int_0^{S_x^\kappa}|y|_\kappa\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}|S_x|S_x = \left(\int_0^{S_x^\kappa}|y|_\kappa\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}(S_x^\kappa)|S_x^\kappa|_\kappa^2 - |S_x|S_x\right),$$

上式中右边的第二项由(63)立即可得：

$$\left\| \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2 - \left|S_x\right|S_x \right) \right\|_{L^{\frac{4}{3}}\left(0,T_e;L^2(\Omega)\right)} \to 0$$

当 $\kappa \to 0$。对于第一项我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\int_0^{S_x^\kappa} |y|_\kappa \,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa^2 \right) \right| \\
&= \left| \left(\int_0^{S_x^\kappa} |y|_\kappa \,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\left(\left(S_x^\kappa\right)^2 + \kappa^2\right) \right) \right| \\
&\le \left| \left(\int_0^{S_x^\kappa} |y|_\kappa \,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\left(S_x^\kappa\right)^2 \right) \right| + \left| \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(S_x^\kappa\right)\kappa^2 \right| \\
&\le \int_0^{\left|S_x^\kappa\right|} \left\| y|_\kappa - |y| \right| \mathrm{d}y + C_\kappa \le \kappa\left|S_x^\kappa\right| + C_\kappa
\end{aligned}$$

联结(34)，我们立即得到(66)。由引理2和引理5得到 $\left\| \psi_S\left(S_x^\kappa\right)\left|S_x^\kappa\right|_\kappa \right\|_{L^2\left(Q_{T_e}\right)} \le C$，再联结引理9和(60)~(61)，(67)立即可得。至此，(12)证明结束。

参考文献

[1] Allen, S.M. and Cahn, J.W. (1979) A Microscopic Theory for Antiphase Boundary Motion and Its Application to Antiphase Domain Coarsening. *Acta Materialia*, **27**, 1085-1095. https://doi.org/10.1016/0001-6160(79)90196-2

[2] Liu, C. and Shen, J. (2003) A Phase Field Model for the Mixture of Two Incompressible Fluids and Its Approximation by a Fourier-Spectral Method. *Physica D*, **179**, 211-228. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00030-7

[3] Coheh, D.S. and Murray, J.D. (1981) A Generalize Diffusion Model for Growth and Dispersal in a Population. *Journal of Mathematical Biology*, **12**, 237-249. https://doi.org/10.1007/BF00276132

[4] Honjo, M. and Saito, Y. (2000) Numerical Simulation of Phase Separation in FeCr Binary and FeCrMo Ternary Alloys with Use of the CahnHilliard Equation. *ISIJ International*, **40**, 914-919. https://doi.org/10.2355/isijinternational.40.914

[5] Alber, H.D. and Zhu, P.C. (2007) Evolution of Phase Boundaries by Configurational Forces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **185**, 235-286. https://doi.org/10.1007/s00205-007-0054-8

[6] Alber, H.D. and Zhu, P. (2007) Solutions to a Model for Interface Motion by Interface Diffusion. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **138**, 923-955. https://doi.org/10.1017/S0308210507000170

[7] Alber, H.D. and Zhu, P. (2011) Interface Motion by Interface Diffusion Driven by Bulk Energy: Justification of a Diffusive Interface Model. *Continuum Mechanics & Thermodynamics*, **23**, 139-176. https://doi.org/10.1007/s00161-010-0162-9

[8] Alber, H.D. and Zhu, P. (2011) Solutions to a Model with Neumann Boundary Conditions for Phase Transitions Driven by Configurational Forces. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **12**, 1797-1809. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.11.012

[9] Kawashima, S. and Zhu, P. (2011) Traveling Waves for Models of Phase Transitions of Solids Driven by Configurational Forces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B* (*DCDS-B*), **15**, 309-323. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2011.15.309

[10] Zhu, P. (2012) Regularity of Solutions to a Model for Solid Phase Transitions Driven by Configurational Forces. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **389**, 1159-1172. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.12.052

[11] Zhu, P. (2012) Solvability via Viscosity Solutions for a Model of Phase Transitions Driven by Configurational Forces. *Journal of Differential Equations*, **251**, 2833-2852. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.05.035

[12] Alber, H.D. and Zhu, P. (2005) Solutions to a Model with Nonuniformly Parabolic Terms for Phase Evolution Driven by Configurational Forces. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **66**, 680-699. https://doi.org/10.1137/050629951

[13] Evans, L.C. (1997) Partial Differential Equations and Monge-Kantorovich Mass Transfer. In: *Current Developments in Mathematics*, Int. Press, Boston, 65-126. https://doi.org/10.4310/CDM.1997.v1997.n1.a2

[14] Roubicek, T. (1990) A Generalization of the Lions-Temam Compact Imbedding Theorem. *Časopis pro pěstování matematiky*, **115**, 338-342.

[15] Lions, J. (1969) Quelques Methods de Resolution des Problems aux Limites Non Lineaires. Dunod Gauthier-Villars, Pairs.