

The Numerical Scheme of Energy Conservation for the KdV Equation

Yu Tian, Yanfen Cui

College of Sciences, Shanghai University, Shanghai

Email: tianyu27@shu.edu.cn

Received: Jul. 31st, 2020; accepted: Aug. 18th, 2020; published: Aug. 26th, 2020

Abstract

We design a class of improved scheme satisfying two conservation laws for the KdV equation, which satisfies both the numerical solution and numerical energy conservative. Numerical experiments show that the schemes have good stability and structure-preserving property in long time numerical simulations.

Keywords

Cell-Average, Numerical Energy, Conservation Laws, Structure Preservation

KdV方程满足能量守恒的数值方法

田 雨, 崔艳芬

上海大学理学院, 上海

Email: tianyu27@shu.edu.cn

收稿日期: 2020年7月31日; 录用日期: 2020年8月18日; 发布日期: 2020年8月26日

摘要

本文对KdV方程设计了一类发展的满足两个守恒律的数值格式, 该格式不仅能满足数值解守恒, 而且能满足数值能量守恒。数值算例结果表明, 这类满足两个守恒律的数值格式, 在长时间的数值模拟中具有很好的稳定性和保结构性。

关键词

网格平均, 数值能量, 守恒律, 保结构性

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 文献 [1]对线性传输方程设计了满足两个和三个守恒律的差分格式, 并且推广到变系数和二维的线性传输方程中。文献 [2], [3]设计了一类守恒型差分格式, 该格式是Godunov型的, 但是和传统格式不同的是, 该格式同时模拟了两个相关的守恒律。文献 [4]对线性传输方程满足两个守恒律的数值方法进行理论分析, 从理论上证明了这类格式具有误差互相抵消的超收敛性质。

文献 [5]将上述保持多个守恒律的思想应用到非线性KdV方程, 对其设计了满足两个守恒律的非线性差分格式。由于KdV方程包含非线性项和三阶导数项, 因此文献 [5]采用分裂算子法, 将KdV方程写成非线性守恒方程部分和三阶线性散射方程部分, 在文献中, 对非线性守恒型方程部分设计了满足两个守恒律的数值方法, 但是对于三阶散射方程部分采用的是传统的中心差分格式, 数值结果表明这类满足两个守恒律的数值方法具有很好地保结构性质。

本文是上述工作的继续, 我们对KdV方程设计了一类改进的满足两个守恒律的数值方法。运

用分裂算子法 [6]将KdV方程拆分成守恒方程部分与散射方程部分, 但是与文献 [5]不同的是, 在本文中, 我们所设计的格式, 不仅能保持守恒方程部分满足两个守恒律, 也能保持三阶散射方程部分满足两个守恒律。并且通过数值算例验证了算法的有效性, 从数值结果可以看出, 该方法在长时间的数值模拟中能很好的保持解的结构。

本文的结构安排如下: 第一节是引言; 第二节是格式的具体描述; 第三节给出数值算例, 结果表明该格式在长时间的数值模拟中能保持好的稳定性; 第四节是结论。

2. 格式的描述

2.1. 数值解的定义

考虑KdV方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x + u_{xxx} = 0, & -\infty < x < +\infty. \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u_0(x)$ 是初值函数。KdV方程满足无穷多个守恒律, 其前两个守恒律分别是(1)和

$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x + (2uu_{xx} - (u_x)^2)_x = 0. \quad (2)$$

其中(2)表示能量守恒, 在以下的讨论中我们记能量 u^2 为 $U(u)$ 。

首先对 (x, t) 平面进行网格剖分, 其对应于 (x, t) 平面内的两组平行线: $x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 和 $t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots$, 将网格剖分为 $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}], j = 1, 2, 3, \dots, N$, 每个离散区间的中点为 $x_j = \frac{(x_{j-1/2} + x_{j+1/2})}{2}$, 且 $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ 。其中 h 和 τ 分别为空间步长和时间步长。

我们所设计的数值格式包含了两个数值实体, 即数值动量 u_j^n 和数值能量 U_j^n 。格式采用有限体积法, 定义数值解 u_j^n 是对精确解的网格平均的近似

$$u_j^n \simeq \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx, \quad (3)$$

其中 $u(x, t_n)$ 表示动量守恒律方程的精确解。由于我们所设计的格式还将涉及到第二个守恒量 $U(u(x, t_n))$ 的数值逼近, 我们称数值函数 U_j^n 称为数值能量, 是对精确能量 $U(u(x, t)) = u^2(x, t_n)$ 的网格平均的近似

$$U_j^n \simeq \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U(u(x, t_n)) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^2(x, t_n) dx. \quad (4)$$

2.2. 格式的描述

从KdV方程前两个守恒律(1)和(2)可以看出, 和传输方程不同的是其对应的两个流函数不仅和 u 有关, 而且与它的一阶导数 u_x 和二阶导数 u_{xx} 有关, 这给数值格式的设计带来一定的复杂性。为此, 在本文我们将采用分裂算子法(见 [6], [7]), 将KdV方程拆分成守恒方程部分和散射方程部分, 对其设计了一类保持两个守恒律的数值方法。其中守恒方程部分为

$$\begin{cases} u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0, \\ (u^2)_t + (\frac{2}{3}u^3)_x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

散射方程部分为

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0, \\ (u^2)_t + (2uu_{xx} - (u_x)^2)_x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

均满足初值 $u(x, 0) = u_0(x)$, $(u(x, 0))^2 = (u_0(x))^2$. 若记守恒方程部分(5)的算子为 A_τ , 则方程(5)的解可由算子 A_τ 表示如下

$$\begin{bmatrix} u(x, t) \\ U(u(x, t)) \end{bmatrix} = A_\tau \begin{bmatrix} u_0(x) \\ U(u_0(x)) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

同样, 我们可将解散射方程部分(6)的算子记为 B_τ 。

在本文中, 我们采用的是 $Strang$ 分裂算子法得到二阶精度见 [7], 方程计算一步的解可以表达为

$$\begin{bmatrix} u(x, (n+1)\tau) \\ U(u(x, (n+1)\tau)) \end{bmatrix} = [A_{\frac{\tau}{2}} \circ B_{\frac{\tau}{2}} \circ B_{\frac{\tau}{2}} \circ A_{\frac{\tau}{2}}] \begin{bmatrix} u(x, n\tau) \\ U(u(x, n\tau)) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

这里 τ 为时间步长。在实际的数值计算中, 算子 A_τ 和 B_τ 将被相应的数值算法所代替。

2.3. 守恒方程部分的差分格式

守恒方程部分(5)的算子 A_τ 包含了两个数值实体, 即数值动量 u_j^n 和数值能量 U_j^n , 格式同时模拟了(5)中的两个守恒律。

如同Godunov型格式 [8]一样, 我们的格式按照重构(Reconstruction), 发展(Evolution)和网格平均(Averaging)三步进行。

第一步(Reconstruction)重构: 在 t_n 层上对数值解 (u_j^n, U_j^n) 进行重构, 重构函数 $R(x; u^n, U^n)$ 为一次函数,

$$R(x; u^n, U^n) = u_j^n + s_j^n(x - x_j), \quad x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]. \quad (9)$$

显然 $R(x; u^n, U^n)$ 满足

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} R(x; u^n, U^n) dx = u_j^n. \quad (10)$$

但是与传统的Godunov型格式不同的是, 我们还要使 $R(x; u^n, U^n)$ 满足

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(R(x; u^n, U^n)) dx = U_j^n. \quad (11)$$

即重构函数的能量的网格平均和该网格上的数值能量相等。斜率 s_j^n 不再是传统的插值方法确定的, 而是作为一个自由度, 通过方程(11)确定, 解得 s_j^n 的值为

$$s_j^n = \text{sgn}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \sqrt{\frac{12(U_j^n - (u_j^n)^2)}{h^2}}. \quad (12)$$

第二步(Evolution)发展: 以重构函数 $R(x; u^n, U^n)$ 作为 t_n 层的初值, 求解方程(5)第一式的初值问题

$$\begin{cases} v_t + f(v)_x = 0, & -\infty < x < \infty, t_n < t \leq t_{n+1}, \\ v(x, t_n) = R(x; u^n, U^n), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (13)$$

其中, $f(v) = \frac{1}{2}v^2$, 其精确解为 $v(x, t)$, 时间步长 τ 满足 CFL 条件 $\lambda \max_u |f'(u)| < 1$ 。

第三步(Averaging)网格平均: t_{n+1} 层上的数值解和数值能量分别为

$$u_j^{n+1} \simeq \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(x, t_{n+1}) dx. \quad (14)$$

$$U_j^{n+1} \simeq \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v^2(x, t_{n+1}) dx. \quad (15)$$

实际计算中, 在网格 $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}) \times (t_n, t_{n+1})$ 上对(5)二重积分, 可得格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^n). \quad (16)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda(\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^n). \quad (17)$$

其中 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 是网格步长比, 数值流函数为

$$\hat{f}_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{2} (v(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t))^2 dt. \tag{18}$$

类似的数值能量流函数为

$$\hat{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{2}{3} (v(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t))^3 dt. \tag{19}$$

从而完成一步的计算, 为了保证格式的稳定性, 网格步长比要满足CFL条件

$$\lambda \max_j \{ |u_j^n| \} < 1. \tag{20}$$

由上文可知, 因为我们所讨论的是非线性方程, 所以数值流函数(18)和能量流函数(19)不能求出精确值, 因此要计算流函数的近似值(见 [9]), 在这里我们用中点公式来近似求积分的值,

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{1}{2} (v(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}))^2. \tag{21}$$

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{2}{3} (v(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}))^3. \tag{22}$$

其中 $v(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})$ 的值可以通过参考文献 [10] 中的Cauchy-Kowalewski展开方法近似求出.

首先我们需要求得 $v(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_{n+\frac{1}{2}})$ 的值, 对 $v(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_{n+\frac{1}{2}})$ 在 $(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t_n)$ 处作Taylor展开, 根据方程(5)和重构函数(9)可得

$$\begin{aligned} v(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_{n+\frac{1}{2}}) &= v(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_n) + \frac{\tau}{2} v_t(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_n) + O(\tau^2) \\ &= v(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_n) - \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{1}{2} (v(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_n))^2 \right\}_x + O(\tau^2) \\ &= R(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}; u^n, U^n) - \frac{\tau}{2} R(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}; u^n, U^n) s_{j+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}^n + O(\tau^2). \end{aligned} \tag{23}$$

我们忽略上式中的误差项 $O(\tau^2)$, 可计算出 $v(x_{j+\frac{1}{2}\pm 0}, t_{n+\frac{1}{2}})$ 的值, 通过解Riemann问题 $Rie(v(x_{j+\frac{1}{2}-0}, t_{n+\frac{1}{2}}), v(x_{j+\frac{1}{2}+0}, t_{n+\frac{1}{2}}))$ 就可以得到 $v(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})$ 的值(见 [8]).

2.4. 散射方程部分的差分格式

本文对三阶散射方程部分所设计的数值格式与参考文献 [5]不同, 该格式同时满足两个守恒律.

考虑三阶散射方程的初值问题,

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{24}$$

方程(24)满足无穷多个守恒律, 其第二个守恒律为

$$U_t + ((2uu_{xx} - (u_x)^2)_x = 0. \quad (25)$$

这里 $U = u^2$ 表示能量。

由于三阶散射方程具有三阶导数项, 因此在格式的设计中, 采用间断有限元格式的思想, 将其写成三个一阶方程组,

$$\begin{cases} u_t + p_x = 0, \\ p - q_x = 0, \\ q - u_x = 0. \end{cases} \quad (26)$$

但是不同于传统间断有限元格式的是, 本文同时要对第二个守恒方程(25)进行数值模拟, 计算数值能量。

2.4.1. 散射方程部分的差分格式

定义 I_j 内的分段多项式空间为 $V_{\Delta x}$

$$V_{\Delta x} = \{v : v \in P^k(I_j), \text{ for } x \in I_j\}, \quad (27)$$

其中 $P^k(I_j)$ 表示 I_j 中次数不超过 k 的多项式集合。

在 $V_{\Delta x}$ 中定义多项式函数 u^h, p^h, q^h , 其为(26)的精确解 u, p, q 近似, 将(26)乘以试探函数 $v, w, z \in V_{\Delta x}$, 并在每个网格 I_j 进行分部积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_{I_j} u_t^h v dx - \int_{I_j} p^h v_x dx + \hat{p}^h(x_{j+\frac{1}{2}}, t) v_{j+\frac{1}{2}}^- - \hat{p}^h(x_{j-\frac{1}{2}}, t) v_{j-\frac{1}{2}}^+ &= 0, \\ \int_{I_j} p^h w dx + \int_{I_j} q^h w_x dx - \hat{q}^h(x_{j+\frac{1}{2}}, t) w_{j+\frac{1}{2}}^- + \hat{q}^h(x_{j-\frac{1}{2}}, t) w_{j-\frac{1}{2}}^+ &= 0, \\ \int_{I_j} q^h z dx + \int_{I_j} u^h z_x dx - \hat{u}^h(x_{j+\frac{1}{2}}, t) z_{j+\frac{1}{2}}^- + \hat{u}^h(x_{j-\frac{1}{2}}, t) z_{j-\frac{1}{2}}^+ &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $v_{j+\frac{1}{2}}^- = \lim_{x \rightarrow x_{j+\frac{1}{2}}^-} v(x, t)$, $v_{j-\frac{1}{2}}^+ = \lim_{x \rightarrow x_{j-\frac{1}{2}}^+} v(x, t)$, w 与 z 有相同定义。我们将(28)中形如 \hat{p} 的函数称为数值流函数 [11]:

$$\begin{aligned} \hat{p}^h(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t) &= p^{h,+}(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t), \\ \hat{q}^h(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t) &= q^{h,+}(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t), \\ \hat{u}^h(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t) &= u^{h,-}(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t). \end{aligned} \quad (29)$$

在我们设计的格式中与传统的间断有限元格式不同的是, 本文将要第二个守恒方程(25)进行数值模拟并保持数值能量守恒。对(25), 在 I_j 积分, 可得

$$\int_{I_j} U_t(x, t) dx + \frac{1}{h} \left\{ \hat{F}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - \hat{F}(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \right\} = 0. \tag{30}$$

其中能量流函数是

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}(t) = 2\hat{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t)\hat{p}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - \hat{q}^2(x_{j+\frac{1}{2}}, t). \tag{31}$$

在本文中, 用分段线性函数对数值解进行重构, 即方程(28)的数值解 $u^h \in V_{\Delta x}$ 为

$$u^h(x, t) = u_j^0(t)\varphi_0^{(j)}(x) + u_j^1(t)\varphi_1^{(j)}(x), \quad x \in I_j. \tag{32}$$

这里 $\varphi_l^{(j)}(x), l = 0, 1, 2, \dots$ 是一组正交函数基:

$$\varphi_0^{(j)}(x) = 1, \quad \varphi_1^{(j)}(x) = \frac{2(x - x_j)}{h}, \dots \tag{33}$$

将(32)带入(28)中的第一个方程, 可以得到数值解的半离散格式为

$$\frac{d}{dt} u_j^0(t) + \frac{1}{h} [\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}(t) - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}(t)] = 0. \tag{34}$$

数值流函数为

$$\hat{f}_{j\pm\frac{1}{2}}(t) = \hat{p}^h(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t). \tag{35}$$

在我们的格式中, 同时计算第二个守恒量, 由(30)可得

$$\frac{d}{dt} U_j(t) + \frac{1}{\Delta x} [\hat{F}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - \hat{F}(x_{j-\frac{1}{2}}, t)] = 0. \tag{36}$$

能量流函数为

$$\hat{F}_{j\pm\frac{1}{2}}(t) = 2\hat{u}^h(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t)\hat{p}^h(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t) - (\hat{q}^h(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t))^2. \tag{37}$$

不同于传统间断有限元格式的是, 我们所设计的格式包含两部分: 数值解中 $u_j^0(t)$ 项和数值能量 $U_j(t)$ 。数值解中 $u_j^1(t)$ 作为一个自由度。我们要求数值解能量的网格平均和该网格上数值能量相等, 即

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U(u^h(x, t)) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (u^h(x, t))^2 dx = U_j(t). \tag{38}$$

由上式计算可得

$$(u_j^1(t))^2 = 3(U_j(t) - (u_j^0(t))^2), \tag{39}$$

由于 $u_j^1(t)$ 是对 $u_x(x_j, t)$ 的近似, 在我们的格式中, 开根号后符号与 $(u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t))$ 相同, 即

$$u_j^1(t) = \text{sgn}(u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t))\sqrt{3(U_j(t) - (u_j^0(t))^2)}. \quad (40)$$

由此可见, 这样设计的格式里 $u_j^0(t)$ 和 $U_j(t)$ 都是守恒的。

为了确定数值流函数与能量流函数, 对 $q^h(x, t)$ 和 $p^h(x, t)$ 仍采用线性函数进行重构, 取试探函数 $w, z \in V_{\Delta x}$ 为 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$, 可以得到

$$\begin{cases} p_j^0(t) - \frac{1}{h}(\hat{q}_{j+\frac{1}{2}}(t) - \hat{q}_{j-\frac{1}{2}}(t)) = 0, \\ p_j^1(t) - \frac{3}{h}(-2q_j^0(t) + \hat{q}_{j+\frac{1}{2}}(t) + \hat{q}_{j-\frac{1}{2}}(t)) = 0. \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} q_j^0(t) - \frac{1}{h}(\hat{u}_{j+\frac{1}{2}}(t) - \hat{u}_{j-\frac{1}{2}}(t)) = 0, \\ q_j^1(t) - \frac{3}{h}(-2u_j^0(t) + \hat{u}_{j+\frac{1}{2}}(t) + \hat{u}_{j-\frac{1}{2}}(t)) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

其中 $\hat{u}_{j\pm\frac{1}{2}}(t)$ 和 $\hat{q}_{j\pm\frac{1}{2}}(t)$ 为(29)中所表示形式。

2.4.2. 数值格式的时间离散

我们将半离散方程(34)和(36)在时间方向上全离散, 采用Crank - Nickson格式, 得到

$$\begin{aligned} u_j^{0,n+1} &= u_j^{0,n} - \lambda(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \\ U_j^{n+1} &= U_j^n - \lambda(\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (43)$$

数值流函数 $\hat{f}_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 和数值能量函数 $\hat{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 分别如下

$$\hat{f}_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (p^h)_{j\pm\frac{1}{2}}^{+,n+\frac{1}{2}}, \quad (44)$$

$$\hat{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 2(u^h)_{j\pm\frac{1}{2}}^{-,n+\frac{1}{2}}(p^h)_{j\pm\frac{1}{2}}^{+,n+\frac{1}{2}} - ((q^h)_{j\pm\frac{1}{2}}^{h,n+\frac{1}{2}})^2, \quad (45)$$

以及

$$(p^h)_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}((p^h)_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} + (p^h)_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+1}), \quad (46)$$

$$(q^h)_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}((q^h)_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} + (q^h)_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+1}), \quad (47)$$

$$(u^h)_{j+\frac{1}{2}}^{-,n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}((u^h)_{j+\frac{1}{2}}^{-,n} + (u^h)_{j+\frac{1}{2}}^{-,n+1}). \quad (48)$$

3. 数值算例

算例3.1 方程(1)的单孤子解

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2(\kappa x - \omega t - x_0), \tag{49}$$

其中

$$A = 12\kappa^2, \quad \omega = 4\kappa^3, \tag{50}$$

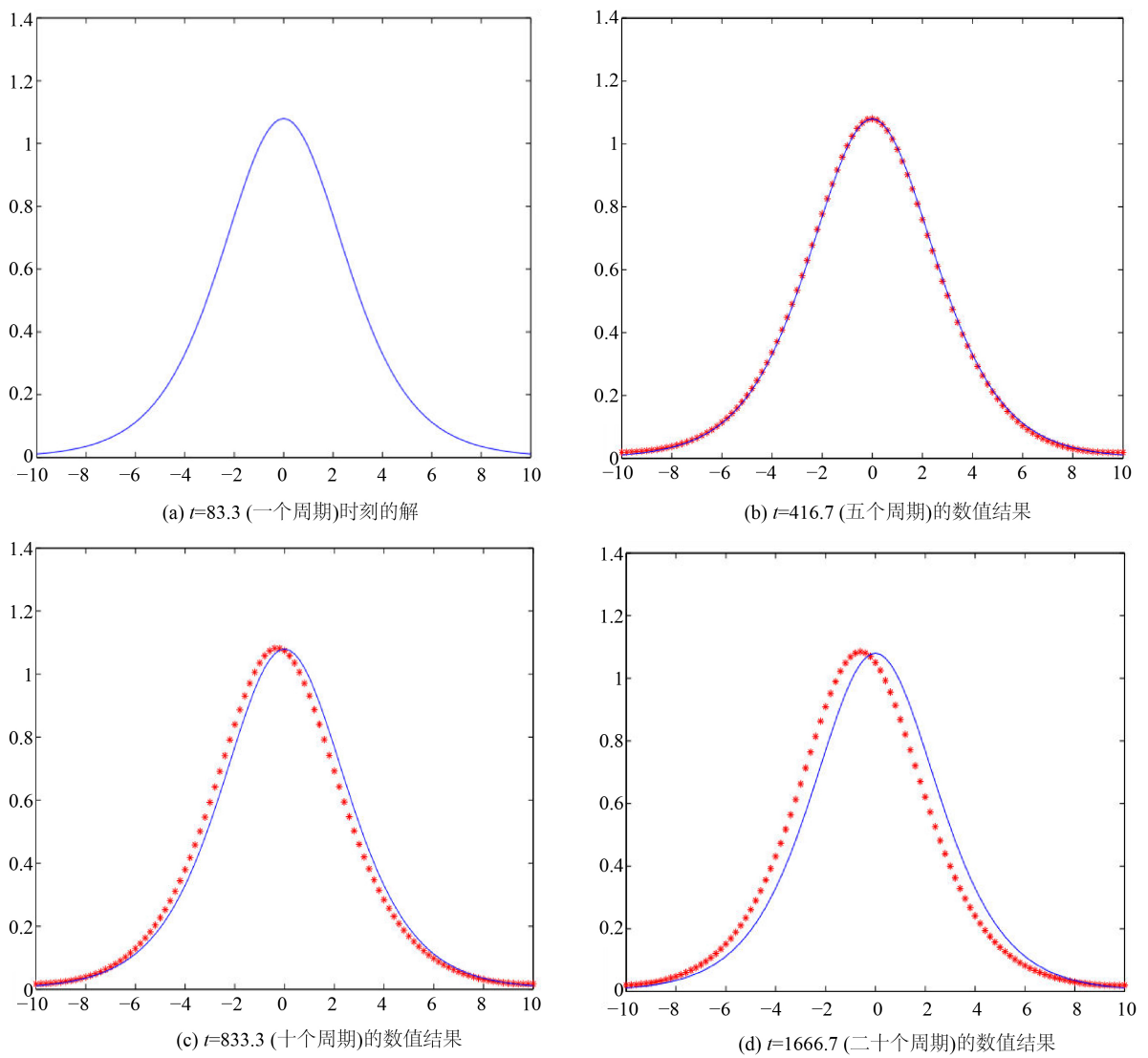


Figure 1. Numerical results at different times

图 1. 不同时刻的数值结果

这里 k 和 x_0 是常数, 取值为 $k = 0.3$ 和 $x_0 = 0$, $u(x, 0)$ 为初值. 网格区间取为 $(-15, 15)$, 采用周期边界条件从(50)可以看出孤波的速度是0.36, 周期为 $T = 30/0.36 = 83.3$, 在本算例中, 将格式计算数值解经过整数倍的周期后与初始时刻的数值解比较.

在我们的数值模拟中, 网格步长比为 $\lambda = \tau/h = 0.5$. 我们用100个网格节点(即 $h = 0.3$)进行计算, 图1中分别给出了 $t = 83.3$ (1个周期), $t = 416.7$ (5个周期)以及 $t = 833.3$ (10个周期)的数值结果. 从图中可看出数值解在长时间的数值解能够很好的模拟解的结构.

算例3.2 方程(1)的双孤子解

$$u(x, t) = 12 \frac{\kappa_1^2 e^{\theta_1} + \kappa_2^2 e^{\theta_2} + 2(\kappa_2 - \kappa_1)^2 e^{\theta_1 + \theta_2} + a^2 (\kappa_2^2 e^{\theta_1} + \kappa_1^2 e^{\theta_2}) e^{\theta_1 + \theta_2}}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a^2 e^{\theta_1 + \theta_2})^2}, \quad (51)$$

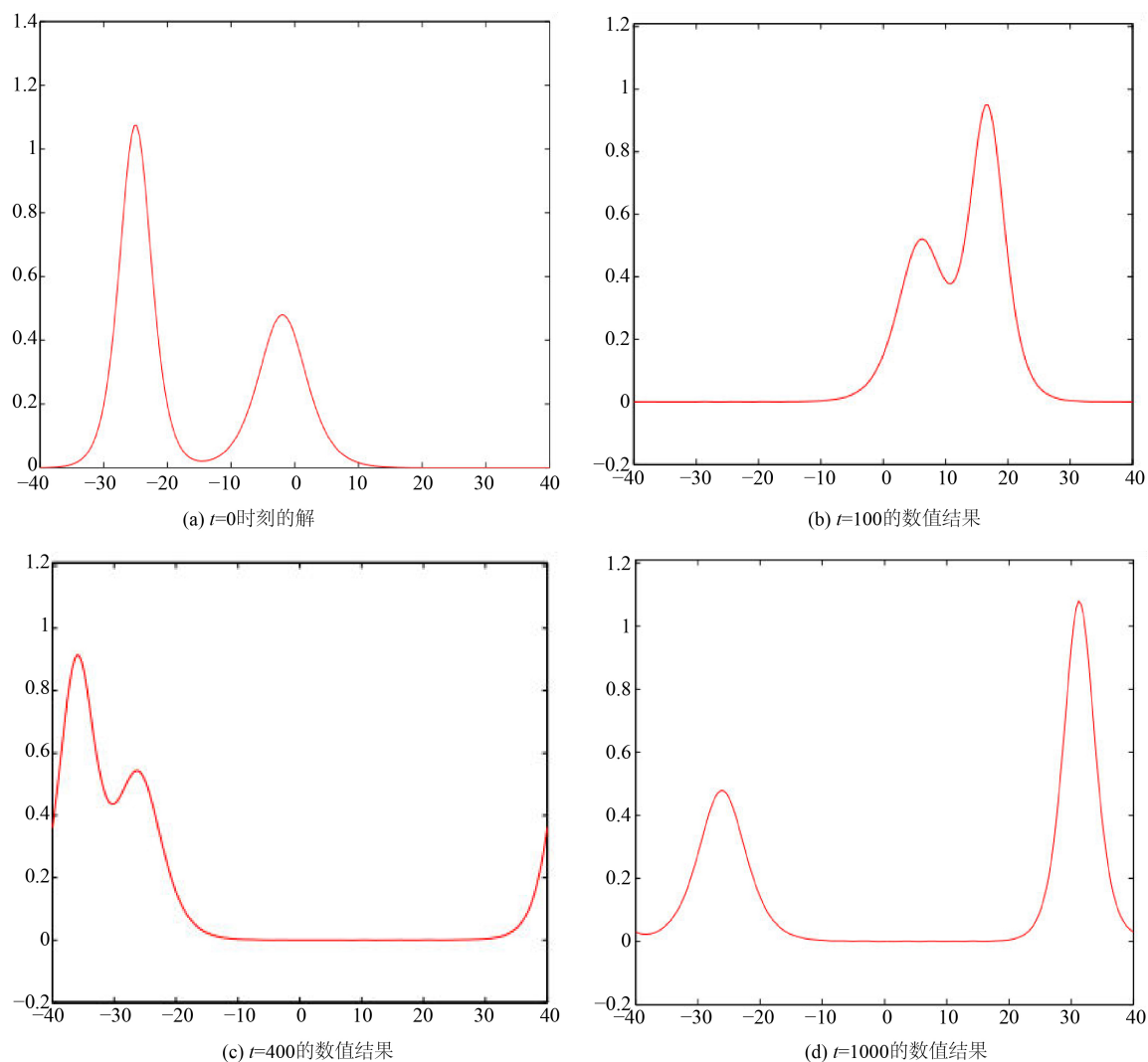


Figure 2. Numerical results at different times

图 2. 不同时刻的数值结果

其中

$$\kappa_1 = 0.4, \quad \kappa_2 = 0.6, \quad a^2 = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)^2 = \frac{1}{25}, \quad (52)$$

$$\theta_1 = \kappa_1 x - \kappa_1^3 t + x_1, \quad \theta_2 = \kappa_2 x - \kappa_2^3 t + x_2, \quad x_1 = 4.0, \quad x_2 = 15. \quad (53)$$

在我们的数值模拟中, 网格区间取为 $(-40, 40)$, 采用周期边界条件。 $u(x, 0)$ 为初始值, 网格步长为 $h = 0.4$ (即用200个点计算), 网格步长比为 $\lambda = \tau/h = 0.5$ 。图2分别给出了 $t = 100$ 时刻, $t = 400$ 和 $t = 1000$ 时刻的数值解。从图中可以看到两个孤波的干涉情况。

4. 结论

本文对KdV方程构造了一个满足两个守恒律的差分格式, 采用分裂算子法将KdV方程拆分成守恒方程部分与散射方程部分, 对守恒方程部分和三阶散射方程部分同时设计了满足两个守恒律的数值格式。数值试验表明这类格式有很好的稳定性, 特别在多个波的情况下, 抖动性明显改善。

参考文献

- [1] 王志刚. 线性传输方程满足多个守恒律的差分格式[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海大学, 2005: No. 11903-99118086.
- [2] Li, H., Wang, Z. and Mao, D. (2008) Numerically Neither Dissipative Nor Compressive Scheme for Linear Advection Equation and Its Application to the Euler System. *Journal of Scientific Computing*, **36**, 285-331. <https://doi.org/10.1007/s10915-008-9192-x>
- [3] 李红霞, 茅德康. 单个守恒型方程的熵耗散格式中耗散函数的构造[J]. 计算物理, 2004, 21(3): 319-331.
- [4] Cui, Y. and Mao, D. (2012) Error Self-Canceling of a Difference Scheme Maintaining Two Conservation Laws for Linear Advection Equation. *Mathematics of Computation*, **81**, 715-741. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2011-02523-8>
- [5] Cui, Y. and Mao, D. (2007) Numerical Method Satisfying the First Two Conservation Laws for the Korteweg-de Vries Equation. *Journal of Computational Physics*, **227**, 376-399. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.07.031>
- [6] Holden, H., Hvistendahl, K. and Risebro, N. (1999) Operator Splitting Methods for Generalized Korteweg-de Vries Equations. *Journal of Computational Physics*, **153**, 203-222. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6273>
- [7] Strang, G. (1968) On the Construction and Comparison of Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **5**, 506-517. <https://doi.org/10.1137/0705041>
- [8] LeVeque, R.J. (2002) Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
- [9] Harten, A. (1989) ENO Schemes with Subcell Resolution. *Journal of Computational Physics*, **83**, 148-184. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90226-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90226-X)
- [10] Harten, A., Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S.R. (1987) Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes, III. *Journal of Computational Physics*, **71**, 231-303. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90031-3](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90031-3)

- [11] Yan, J. and Shu, C. (2002) A Local Discontinuous Galerkin Method for KdV Type Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, 769-791.
<https://doi.org/10.1137/S0036142901390378>