Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(8), 719-725
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.108085

Hans汉斯

The Nature of Short Exact Sequence

Hongtao Fan

College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong Univerisity, Nanchang Jiangxi
Email: fanhongtao2020@163.com

Received: Jul. 21st, 2020; accepted: Aug. 7th, 2020; published: Aug. 14th, 2020

Abstract

In this paper, the short exact sequence composed of chain complex and chain mapping is studied. The edge homomorphism of homology sequence is defined and the proof of good definition is given. By using the short exact sequence composed of chain complex and chain map and the defined edge homomorphism, the naturalness of the positive congruent sequence and the homology sequence is derived and proved.

Keywords

Short Exact Sequence, Chain Complex, Homology Sequence

短正合列的性质

范宏涛

南昌航空大学，数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: fanhongtao2020@163.com

收稿日期：2020年7月21日；录用日期：2020年8月7日；发布日期：2020年8月14日

摘　要

本文对链复形和链映射组成的短正合列进行研究。在短正合列上定义了同调序列的边缘同态，证明了它的合理性。利用链复形和链映射组成的短正合列和所定义的边缘同态，引出了正合同调序列和同调序列的自然性，并给出了证明。

关键词

短正合列，链复形，同调序列

文章引用：范宏涛. 短正合列的性质[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 719-725.
DOI: 10.12677/pm.2020.108085

1. 引言

正合列是非常有用的概念，在数学研究中，是非常有用的工具。本文对链复形和链同态条件下的短正合列的性质进行讨论[1] [2] [3] [4]，在链复形和链映射的短正合列

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0,$$

对每个维数 q，定义了一个边缘同态 $\partial_* : H_q(E) \to H_{q-1}(C)$，先证明该边缘同态定义的合理性。由所定义的边缘同态，进一步介绍链复形和链映射的短正合列的同调性质，给出正合同调序列和同调序列自然性的证明。

2. 短正合列

为了研究短正合列的相关性质，我们先引出以下一些定义[1] [5]。

定义 2.1 [1] 如果 $\ker(g) = im(f)$，则由 Abel 群和同态组成的序列

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$$

在 D 处正合。如果它在每个 Abel 群处正合，则由 Abel 群和同态组成的序列

$$\cdots \to D_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} D_i \xrightarrow{\varphi_i} D_{i+1} \to \cdots$$

是一个正合序列。

定义 2.2 一个链复形是一串 Abel 群 C_q 和一串同态 $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$，排成一个序列

$$\cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \to \cdots$$

对每个维数 q，满足 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$。

定义 2.3 [2] 如果对每个维数 q，Abel 群和同态组成的序列

$$C_q \xrightarrow{f_q} D_q \xrightarrow{g_q} E_q$$

都在 D_q 处正合，则由链复形和链映射组成的序列

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$$

在 D 处正合。

定义 2.4 设 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 为链复形，那么商群

$$H_q(C) := \frac{\ker \partial_q}{im \partial_{q+1}}$$

称为 C 的同调群，它的元素称为 C 的同调类。

定义 2.5 [1] 设由链复形和链映射组成的短正合列

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0。$$

对每个维数 q，我们来定义一个边缘同态 $\partial_* : H_q(E) \to H_{q-1}(C)$。

考察下面的交换图表(图 1)

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\partial"'] & {} \arrow[d, "\partial"'] & {} \arrow[d, "\partial"'] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & D_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & E_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\partial"'] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\partial"'] & E_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Figure 1. Chain complex and chain mapping commutative graph

图 1. 链复形和链映射交换图

交换图表的每个横行都是正合序列。对于 $e_q \in Z_q(E)$，定义

$$\partial_* : H_q(E) \to H_{q-1}(C),\ \left[e_q\right] \mapsto \left[f_{q-1}^{-1} \partial_q g_q^{-1}(e_q)\right]. \tag{1}$$

根据图像的交换性，且每个横行是正合序列，通过在交换图上追踪，在(1)式中，可以得到

1) 需要取逆像的地方都能取得；

2) 逆像不唯一的地方，最后结果跟逆像的选取没有关系；

3) 在同调类 $\left[e_q\right]$ 中取不同的代表闭链 e_q，所得最后结果相同。

下面我们来证明这个定义的合理性：

证明： 1) 由定义可得，

$$\partial_* : H_q(E) \to H_{q-1}(C),$$

假定 $e_q \in E_q$，则 $\partial_q e_q = 0$。

因为 g_q 是满射，所以存在 $d_q \in D_q$，使得 $g_q d_q = e_q$。

下面证明 $\partial_q d_q \in D_{q-1}$，根据交换性，可得

$$g_{q-1} \partial_q d_q = \partial_q g_q d_q = \partial_q e_q = 0,$$

所以

$$\partial_q d_q \in \ker g_{q-1} = imf_{q-1}.$$

因为 f_{q-1} 是单射，所以存在唯一的 $c_{q-1} \in C_{q-1}$，使得

$$f_{q-1} c_{q-1} = \partial_q d_q.$$

所以 $f_{q-1}^{-1} \partial_q g_q^{-1}(e_q)$ 有意义，则

$$\left[e_q\right] \mapsto \left[f_{q-1}^{-1} \partial_q g_q^{-1}(e_q)\right]$$

是合理的定义。

2) 令 $g_q d_q' = e_q$，其中 $d_q' \in D_q$，则

$$g_q(d_q - d_q') = g_q d_q - g_q d_q' = e_q - e_q = 0,$$

所以 $d_q - d_q' \in \ker g_q = imf_q$。则存在 $c_q \in C_q$，使得 $f_q c_q = d_q - d_q'$。

根据交换性，可得

$$f_{q-1}\partial_q c_q = \partial_q f_q c_q = \partial_q\left(d_q - d_q'\right) = \partial_q d_q - \partial_q d_q'.$$

所以

$$f_{q-1}^{-1}\partial_q d_q - f_{q-1}^{-1}\partial_q d_q' = \partial_q c_q \in B_{q-1}(C),$$

则 $f_{q-1}^{-1}\partial_q d_q + B_{q-1}(C) = f_{q-1}^{-1}\partial_q d_q' + B_{q-1}(C)$，得证。

3) 假定 $e_q' = \partial_{q+1}e_{q+1}$，$e_{q+1}\in E_{q+1}$。设 $g_{q+1}d_{q+1} = e_{q+1}$，其中 $d_{q+1}\in D_{q+1}$。

根据交换性，可得

$$g_q\partial_{q+1}d_{q+1} = \partial_{q+1}g_{q+1}d_{q+1} = \partial_{q+1}e_{q+1} = e_q.$$

由此，可以证明边缘同态 ∂_* 是良定义的。

定理 2.6 [2] 设有链复形和链映射的短正合列

$$0\longrightarrow C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E\longrightarrow 0,$$

则有长的正合同调序列

$$\cdots\to H_{q+1}(E)\xrightarrow{\partial_*}H_q(C)\xrightarrow{f_*}H_q(D)\xrightarrow{g_*}H_q(E)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(C)\to\cdots. \tag{2}$$

证明：(A) 在 $H_q(E)$ 处的正合性：

(A1) 设 $d_q\in Z_q(D)$。则

$$\partial_* g_*\left[d_q\right] = \partial_*\left[g_q\left(d_q\right)\right] = \left[f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}g_q\left(d_q\right)\right] = \left[f_{q-1}^{-1}\partial_q\left(d_q\right)\right] = \left[f_{q-1}^{-1}(0)\right] = [0].$$

所以 $img_* \subset \ker\partial_*$。

(A2) 设 $e_q\in Z_q(E)$，且 $\partial_*\left[e_q\right]=0$，则有 $c_q\in C_q$，使得

$$f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}\left(e_q\right) = \partial_q\left(c_q\right).$$

取 $d_q = g_q^{-1}\left(e_q\right) - f_q\left(c_q\right)$，则

$$\partial_q\left(d_q\right) = f_{q-1}\partial_q\left(c_q\right) - \partial_q f_q\left(c_q\right) = 0,$$

即 $d_q\in Z_q(D)$。

而 $g_*\left[d_q\right] = \left[g_q d_q\right] = \left[e_q - g_q f_q\left(c_q\right)\right] = \left[e_q\right]$，所以 $\ker\partial_* \subset img_*$。

所以 $\ker\partial_* = img_*$，得证。

(B) 在 $H_q(D)$ 处的正合性：

(B1) 设 $c_q\in Z_q(C)$，则

$$g_* f_*\left[c_q\right] = (g\cdot f)_*\left[c_*\right] = (0)_*\left[c_q\right] = 0,$$

所以 $imf_* \subset \ker g_*$。

(B2) 设 $d_q\in Z_q(D)$，且 $g_*\left[d_q\right]=0$。

则 $\exists e_{q+1}\in E_{q+1}$，使得 $g_q d_q = \partial_{q+1}e_{q+1}$。

由于 g_{q+1} 是满射的，所以至少 $\exists$ 一个 $d_{q+1}\in D_{q+1}$，使得

$$e_{q+1} = g_{q+1}d_{q+1},$$

所以

$$g_q d_q = \partial_{q+1} e_{q+1} = \partial_{q+1} g_{q+1} d_{q+1} = g_q \partial_{q+1} d_{q+1} .$$

因为 g_q 是链映射，所以 $g_q\left(d_q - \partial_{q+1} d_{q+1}\right) = 0$ 。

根据正合性，存在 $c_q \in C_q$，使得 $f_q c_q = d_q - \partial_{q+1} d_{q+1}$，所以

$$f_{q-1}\partial_q c_q = \partial_q f_q c_q = \partial_q d_q - \partial_q \partial_q d_q = 0 .$$

又因为 f_q 是单射，所以 $\partial_q c_q = 0$，则 $f_*\left(\left[c_q\right]\right) = \left[f_q c_q\right] = \left[d_q - \partial_{q+1} d_{q+1}\right] = \left[d_q\right]$。

由此可得，$\ker g_* \subset imf_*$，

所以 $\ker g_* = imf_*$，得证。

(C) 在 $H_q(C)$ 处的正合：

(C1) 设 $e_{q+1} \in Z_{q+1}(E)$，则

$$f_*\partial_*\left[e_{q+1}\right] = f_*\left[f_q^{-1}\partial_{q+1} g_{q+1}^{-1}\left(e_{q+1}\right)\right] = \left[f_q f_q^{-1}\partial_{q+1} g_{q+1}^{-1}\left(e_{q+1}\right)\right] = \left[\partial_{q+1} g_{q+1}^{-1}\left(e_{q+1}\right)\right] = 0 ,$$

所以 $im\partial_* \subset \ker f_*$ 。

(C2) 设 $c_q \in Z_q(C)$，且 $f_*\left[c_q\right] = 0$，则存在 $d_{q+1} \in D_{q+1}$，使得

$$f_q c_q = \partial_{q+1} d_{q+1} = e_{q+1} ,$$

所以

$$\partial_*\left[e_{q+1}\right] = \left[f_q^{-1}\partial_{q+1} g_{q+1}^{-1} g_{q+1} d_{q+1}\right] = \left[f_q^{-1}\partial_{q+1} d_{q+1}\right] = \left[f_q^{-1} f_q c_q\right] = \left[c_q\right],$$

所以 $c_q \in im\partial_*$，则 $\ker f_* \subset im\partial_*$ 。

所以 $\ker f_* = im\partial_*$，得证。

定理 2.7 [2] 设有链复形和链映射的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中两个横行都是链复形的短正合列。则它们的正合同调序列之间有交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_q(C) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & H_q(D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_*"'] & H_q(E) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"'] & H_{q-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H_q(C') \arrow[r, "f'_*"] & H_q(D') \arrow[r, "g'_*"] & H_q(E') \arrow[r, "\partial'_*"] & H_{q-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

证明：行的正合性是定理 2.6 已证明，下面我们来证明列的正合性，先画出以下交换图表(图 2)：

1) 如果 $\left[e_q\right] \in H_q(E)$，则需证明 $\alpha_*\partial_*\left[e_q\right] = \partial'_*\gamma_*\left[e_q\right]$。

因为 g 是满射的，所以存在 $d_q \in D_q$，使得

$$g_q\left(d_q\right) = e_q .$$

$$\partial_*\left[e_q\right] = \left[f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}\left(e_q\right)\right] = \left[f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1} g_q\left(d_q\right)\right] = \left[f_{q-1}^{-1}\partial_q\left(d_q\right)\right],$$

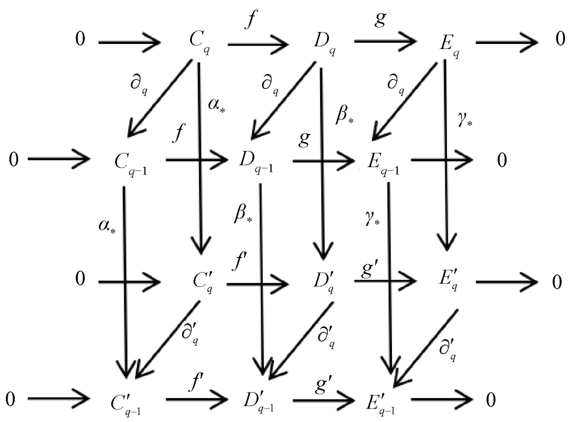

Figure 2. Chain complex and chain homomorphism three-dimensional commutative graph
图 2. 链复形和链同态三维交换图

所以 $f_{q-1}^{-1}\partial_q\left(d_q\right)=c_{q-1}$，则 $f_{q-1}\left(c_{q-1}\right)=\partial_q\left(d_q\right)$，其中 $c_{q-1}\in C_{q-1}$。

$$\alpha_*\partial_*\left[e_q\right]=\left[\alpha_{q-1}f_{q-1}^{-1}\partial_q\left(d_q\right)\right]=\left[\alpha_{q-1}\left(c_{q-1}\right)\right],$$

因为 γ 是链映射，所以

$$g'_q\beta_q\left(d_q\right)=\gamma_q g_q\left(d_q\right)=\gamma_q\left(e_q\right),$$

所以

$$\partial'_*\left[\gamma_q\left(e_q\right)\right]=\left[f_{q-1}^{-1}\partial'_q g_q'^{-1}g'_q\beta_q\left(d_q\right)\right]=\left[f_{q-1}^{-1}\partial'_q\beta_q\left(d_q\right)\right]=\left[c'_{q-1}\right],$$

其中 $c'_{q-1}\in C'_{q-1}$。

则 $f'_{q-1}\left(c'_{q-1}\right)=\partial'_q\beta_q\left(d_q\right)$，因此，

$$f'_{q-1}\alpha_{q-1}\left(c_{q-1}\right)=\beta_{q-1}f_{q-1}\left(c_{q-1}\right)=\beta_{q-1}\partial_q\left(d_q\right)=\partial'_q\beta_q\left(d_q\right)=f'_{q-1}\left(c'_{q-1}\right),$$

又由于 f'_{q-1} 是单射，所以 $\alpha_{q-1}\left(c_{q-1}\right)=c'_{q-1}$。

所以 $\alpha_*\partial_*\left[e_q\right]=\partial'_*\gamma_*\left[e_q\right]$。

2) 因为 $\partial_{q+1}\left(d_{q+1}\right)=d_q$，根据交换性，可得

$$\gamma_q g_q\left(d_q\right)=\gamma_q g_q\partial_{q+1}\left(d_{q+1}\right)=\gamma_q\partial_{q+1}g_{q+1}\left(d_{q+1}\right)=\partial_{q+1}\gamma_{q+1}g_{q+1}\left(d_{q+1}\right)=\partial_{q+1}\left(e'_{q+1}\right),$$

$$\gamma_*g_*\left[d_q\right]=\left[\gamma_q g_q\left(d_q\right)\right],$$

$$\partial_q\gamma_q g_q\left(d_q\right)=\gamma_{q-1}\partial_q g_q\left(d_q\right)=\gamma_{q-1}g_{q-1}\partial_q\left(d_q\right)=0,$$

所以

$$\left[g'_q\beta_q\left(d_q\right)\right]=\left[\gamma_q g_q\left(d_q\right)\right].$$

3. 结论

本文对链复形和链同态条件下的短正合列的性质进行讨论。首先，给出了边缘同态 ∂_* 的定义，通过对交换图表进行追踪，证明了其定义的合理性。然后，证明了由短正合列诱导的长正合同调序列和边缘同态 ∂_* 的自然性。短正合列还有其他问题需要进行研究，它是一个很有用的数学工具，在数学研究方面

起到很重要的作用。如正合序列还有一个妙用“五引理”，这也是“图上追踪法”的一个典型例子。

参考文献

[1] 姜伯驹. 同调论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.

[2] Rotman, J.J. (2010) Advanced Modern Algebra: Second Edition. American Mathematical Society, Rhode Island.

[3] 陈家鼐. 环与模[M]. 北京: 北京师范学院出版社, 1989.

[4] Scott Osborne, M. (2000) Basic Homological Algebra. Springer-Verlag, New York.

[5] 赵春来, 徐明曜. 抽象代数[M]. 北京大学出版社, 2008.