Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(8), 711-718
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.108084

The Bracket Polynomial of a Kind of Brunnian Link

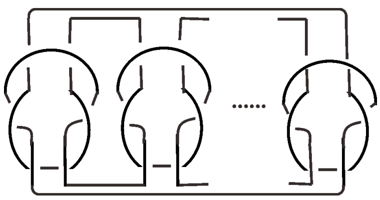
Xueqing Wang

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1983208220@qq.com

Received: Jul. 20th, 2020; accepted: Aug. 6th, 2020; published: Aug. 13th, 2020

Abstract

The bracket polynomial is an important invariant in knot theory. Brunnian link is a kind of special chain link with simple structure. This article studies a special chain link combination $B(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n})$, as shown in the following figure.



Keywords

Bracket Polynomial, Invariant, Brunnian Link

一类Brunnian Link的尖括号多项式

王雪晴

辽宁师范大学，辽宁 大连
Email: 1983208220@qq.com

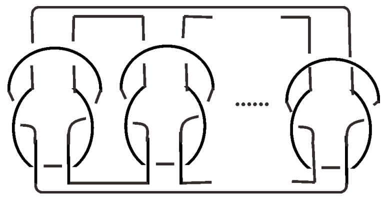
收稿日期：2020年7月20日；录用日期：2020年8月6日；发布日期：2020年8月13日

摘 要

尖括号多项式是纽结理论中一个重要的不变量。Brunnian link是一类特殊又简单的链环，本文研究了一

文章引用: 王雪晴. 一类 Brunnian Link 的尖括号多项[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 711-718.
DOI: 10.12677/pm.2020.108084

类特殊的Brunnian链环的组合 $B(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n})$，如下图所示，



关键词

尖括号多项式，不变量，Brunnian Link

1. 预备知识

定义 1.1.1 [1] 纽结

将单位圆周 S^1 嵌入到三维欧氏空间 R^3 中或者球面 S^3 中得到纽结。若 K 在 S^3 中，K 是简单闭曲线，且 $K \cong S^1$，则 K 是一个纽结。

定义 1.1.2 [2] 链环

把嵌入到三维欧式空间 R^3 或者球面 S^3 中若干个互不相交的圆周 $S_i^1\ (1 \le i \le n, n > 1)$ 所形成的图形称为链环，记为 $L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$。

其中若 K_i 都是平凡纽结，则 L 为平凡链环。

给定链环每个分支一个方向，得到定向链环。

定义 1.1.3 [2] Reidemeister move (R 变换)

通过改变纽结或者链环投影图中交叉点处的变换方式分为如下三种类型：

R_1 变换：

R_2 变换：

R_3 变换：

定义 1.1.4 [3] 纽结连通和

设 M 是一个平面， K_1,K_2 是两个纽结且分别位于该平面两侧，分别在 K_1,K_2 中选择一段不越过交叉点的弧，挖掉这两段弧并沿着端点接到一起得到新的纽结称作 K_1 与 K_2 的连通和，记为 $K_1\#K_2$ 。

下图 1 所示为三叶结，图 2 所示为八字结。二者做连通和所得到的纽结为图 3 所示。

Figure 1
图 1

Figure 2
图 2

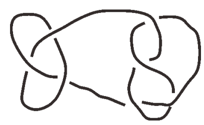
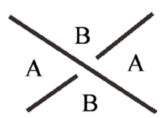


Figure 3
图 3

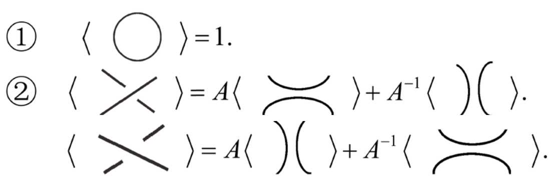
定义 1.1.5 [3] 尖括号多项式

I. A 通道、B 通道：

对下图所示的交叉点，上行线到下行线逆时针旋转所经过的区域为 A 通道；上行线到下行线顺时针旋转所经过的区域为 B 通道。



II. 尖括号多项式拆接关系：



③ $\langle O\cup K\rangle=\left(-A^2-A^{-2}\right)\langle K\rangle.$

其中 $\langle O\cup O\rangle=\left(-A^2-A^{-2}\right)\langle O\rangle=\left(-A^2-A^{-2}\right)$ 。

定义 1.1.6 [3] 特殊的连通和

设 S 是一个平面， K_1,K_2 是两个纽结并分别位于平面 M 的两侧，在 K_1,K_2 中各选择两段不越过交叉点的弧 a,b 。分别挖去 K_1,K_2 中的弧 a 并且连接在一起；再分别挖去 K_1,K_2 中的弧 b 并且连接在一起，将

其称作特殊的连通和，记为 $K_1 * K_2$。如图 4 所示：

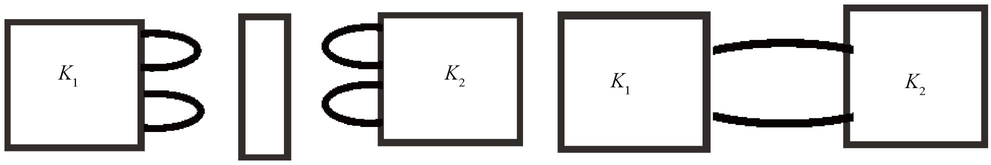


Figure 4
图 4

2. 一类 Brunnian Link 尖括号多项式的计算

定理 2.1.1

$$\left\langle B(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n})\right\rangle = \begin{cases} \left(3-2A^4-2A^{-4}+A^8+A^{-8}\right)^{n-1}\left\langle B(0)\right\rangle + \left(A^{10}+A^{-10}-A^6-A^{-6}\right) \\ \cdot\sum_{i=0}^{n-2}\left(3-2A^4-2A^{-4}+A^8+A^{-8}\right)^i\cdot\left(-A^{-3}-A^5+A^{-7}\right)^{2[n-(i+1)]} & n\geq 2 \\ -A^2-A^{-2} & n=1 \end{cases}$$

证明 首先计算 $\langle B(0)\rangle$，$B(0)$ 如图 5 所示：

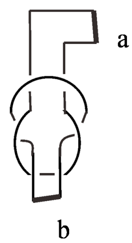


Figure 5
图 5

首先选择图中最上面的两个交叉点，如图 6 所示：

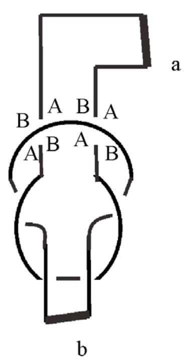


Figure 6
图 6

打开这两个交叉点有以下四种方式：

1) 同时打开两个交叉点的 A 通道，得到的投影图记为 I，如图 7 所示。

2) 打开最上面左侧交叉点的 A 通道，打开最上面右侧交叉点的 B 通道，得到的投影图记为 Q，如图 8 所示。

3) 打开最上面左侧交叉点的 B 通道，打开最上面右侧交叉点的 A 通道，得到的投影图记为 M，如图 9 所示。

4) 同时打开两个交叉点的 B 通道，得到的投影图记为 N，如图 10 所示。

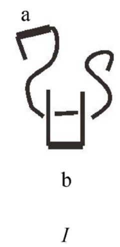


Figure 7
图 7

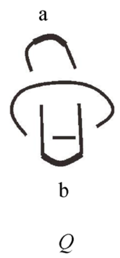


Figure 8
图 8

Figure 9
图 9

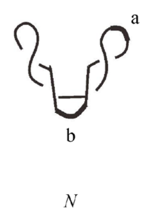


Figure 10
图 10

根据尖括号多项式的计算法则可得：

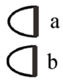
$$\langle B(0)\rangle = A^2\langle I\rangle + AB\langle Q\rangle + BA\langle M\rangle + B^2\langle N\rangle$$

下面计算 $\langle I\rangle,\langle Q\rangle,\langle M\rangle,\langle N\rangle$

令 $\langle$  $\rangle=\langle\alpha\rangle$；$\langle$  $\rangle=\langle\beta\rangle$

$\langle I\rangle=\left(-A^{3}\right)^{2}\langle$  $\rangle=A^{6}B\langle$  $\rangle+A^{6}\cdot A\langle$  $\rangle$

$=A^{5}\langle$  $\rangle+A^{7}\langle$  $\rangle$

$=A^{5}\cdot\left(-A^{-3}\right)\langle$  $\rangle+A^{7}\cdot B\langle$  $\rangle+A^{7}\cdot A\langle$  $\rangle$

$=\left(A^{6}-A^{2}\right)\langle\alpha\rangle+A^{8}\langle\beta\rangle.$

同理可求得 $\langle Q\rangle,\langle M\rangle,\langle N\rangle$

$$\langle Q\rangle=\left(-A^{6}-A^{-6}\right)\langle\beta\rangle+\left(2-A^{4}-A^{-4}\right)\langle\alpha\rangle.$$

$$\langle M\rangle=\langle\alpha\rangle.$$

$$\langle N\rangle=\left(A^{-6}-A^{-2}\right)\langle\alpha\rangle+A^{-8}\langle\beta\rangle.$$

综上可得：

$$\begin{aligned}\langle B(0)\rangle&=A^{2}\langle I\rangle+AB\langle Q\rangle+BA\langle M\rangle+B^{2}\langle N\rangle\\&=\left(A^{10}+A^{-10}-A^{6}-A^{-6}\right)\langle\beta\rangle+\left(3-2A^{4}-2A^{-4}+A^{8}+A^{-8}\right)\langle\alpha\rangle\\&=-A^{2}-A^{-2}.\end{aligned}$$

令 $T=A^{10}+A^{-10}-A^{6}-A^{-6},P=3-2A^{4}-2A^{-4}+A^{8}+A^{-8}$

则 $\langle B(0)\rangle$ 可简化表达为：$\langle B(0)\rangle=T\langle\beta\rangle+P\langle\alpha\rangle$。

其次计算 $\langle B(0,0)\rangle$，$B(0,0)$ 可以看成 $B(0)$ 和 $B(0)$ 沿着 a,b 两段弧做特殊连通和得到的，如图 11 所示。

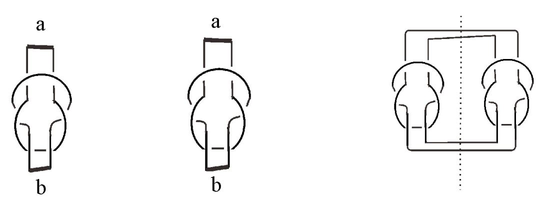


Figure 11
图 11

由尖括号多项式运算法则，在计算 $B(0,0)$ 时可以先打开左侧 $B(0)$ 中所有交叉点，会得到 α 和 β 两种投影图，再将这两种投影图分别与右侧 $B(0)$ 沿着 a,b 两段弧做特殊的连通和。其中 α 与 $B(0)$ 沿着 a,b 两段弧做特殊的连通和得到的投影图如图 12 所示，可知其仍为 $B(0)$；β 与 $B(0)$ 沿着 a,b 两段弧做特殊

的连通和得到的投影图如图 13 所示。

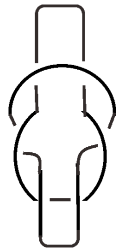


Figure 12
图 12

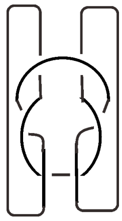
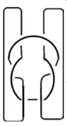
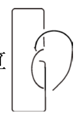
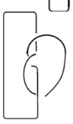


Figure 13
图 13

因此 $\langle B(0,0)\rangle = P\langle \alpha * B(0)\rangle + T\langle \beta * B(0)\rangle$。

先计算 ，它可以看作两个相同的  做连通和，接下来计算 

$\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + B\langle$  $\rangle$

$= A\langle$ 

$\rangle + (A^{-1})(-A^{-3})^2\langle$  $\rangle$

$= A\cdot B\langle$  $\rangle + A\cdot A\langle$  $\rangle + A^{-7}\langle$  $\rangle$

$= (-A^{-3} - A^{5} + A^{-7})\langle$  $\rangle$

$= -A^{-3} - A^{5} + A^{-7}$

$= R.$

则 $\langle$  $\rangle = R^2$。

综上，$\langle B(0,0)\rangle = P\langle B(0)\rangle + TR^2$。

同理求得 $\langle B(0,0,0)\rangle = P^2\langle B(0)\rangle + PTR^2 + TR^4$。

$\langle B(0,0,0,0)\rangle = P\langle B(0,0,0)\rangle + TR^6 = P^3\langle B(0)\rangle + P^2TR^2 + PTR^4 + TR^6$。

$\langle B(0,0,0,0,0)\rangle = P\langle B(0,0,0,0)\rangle + TR^8 = P^4\langle B(0)\rangle + P^3TR^2 + P^2TR^4 + PTR^6 + TR^8$。

$\vdots$

由迭代法归纳得：

$$\left\langle B\left(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n}\right)\right\rangle=\begin{cases}-A^{2}-A^{-2} & n=1\\ P^{n-1}\left\langle B(0)\right\rangle+T\cdot\sum_{i=0}^{n-2}P^{i}R^{2[n-(i+1)]} & n\geq 2\end{cases}$$

将 P、T、R 代入上式，得：

$$\left\langle B\left(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n}\right)\right\rangle=\begin{cases}\left(3-2A^{4}-2A^{-4}+A^{8}+A^{-8}\right)^{n-1}\left\langle B(0)\right\rangle+\left(A^{10}+A^{-10}-A^{6}-A^{-6}\right) & \\ \cdot\sum_{i=0}^{n-2}\left(3-2A^{4}-2A^{-4}+A^{8}+A^{-8}\right)^{i}\cdot\left(-A^{-3}-A^{5}+A^{-7}\right)^{2[n-(i+1)]} & n\geq 2\\ -A^{2}-A^{-2} & n=1\end{cases}$$

参考文献

[1] Adams, C.C. (2004) The Knot Book. American Mathematical Society.

[2] Landvoy, R.A. (1998) The Jones Polynomial of Pretzel Knots and Links. *Topology and Its Applications*, **83**, 135-147. https://doi.org/10.1016/S0166-8641(97)00100-4

[3] 赵璐莹. 一类 Brunnian 链环的 Jones 多项式[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2019.