Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(8), 701-710
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.108083

The Similar Construction Method of the Composite Riccati-Bessel Equation Boundary Value Problem

Chun Peng, Shunchu Li, Wei Li

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: 565711545@qq.com

Received: Jul. 20th, 2020; accepted: Aug. 6th, 2020; published: Aug. 13th, 2020

Abstract

Based on the study of the structural similarity of solutions to boundary value problems of differential equations, for a type of boundary value problem of the composite Riccati-Bessel equation, through the analysis and simplification of the solution, it is found that the solution to this type of definite solution problem can be solved by using two linearly independent solutions of the left and right Riccati-Bessel equations to construct the guide function. Then combine the right-area guide function with the coefficients of the right-side value condition to generate a right similar kernel function, and combine the left-area guide function with the coefficients of the junction condition to generate a right similar kernel function. Finally, the coefficients of the left-side value condition and the left-similar kernel function are assembled to obtain the similar structure whose solution has the form of continued fraction product. Hence, a new method, the similarity construction method, is proposed to solve the boundary value problem of the composite Riccati-Bessel equation.

Keywords

The Composite Riccati-Bessel Equation, Boundary Value Problems, Similar Structure, Similar Kernel Function, Guide Function

复合Riccati-Bessel方程边值问题的相似构造法

彭　春，李顺初，李　伟

西华大学理学院，四川 成都
Email: 565711545@qq.com

收稿日期：2020年7月20日；录用日期：2020年8月6日；发布日期：2020年8月13日

文章引用: 彭春, 李顺初, 李伟. 复合 Riccati-Bessel 方程边值问题的相似构造法[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 701-710.
DOI: 10.12677/pm.2020.108083

摘 要

在微分方程边值问题解的结构式相似性的研究基础上，针对复合Riccati-Bessel方程的一类边值问题，通过对解式的分析和简化，发现求解该类定解问题可先利用左、右区Riccati-Bessel方程的两个线性无关的解构造引解函数，然后将右区引解函数与右边值条件的系数结合生成右相似核函数，将左区引解函数与交界处衔接条件的系数结合生成右相似核函数，最后将左边值条件的系数和左相似核函数组装，得到了其解具有连分式乘积形式的相似结构，并提出求解该类复合Riccati-Bessel方程边值问题的一种新方法——相似构造法。

关键词

复合Riccati-Bessel方程，边值问题，相似结构，相似核函数，引解函数

1. 引言

在人们用传统微积分学方法去深入研究粒子物理学和数论几何学等提出的许多问题时，大量的偏微分方程也就出现了。70 年代，当量子数学技术逐渐应用于生物化学等领域，涌现了许多微分反应式和扩散微分方程[1]。从开始“求通解”到后来的“求定解问题”，数学家们在微分方程求解的研究上有了很多新的发现[1]。然而只有少数简单的偏微分方程仍然可以直接求得其在解析中的解，不过即使没有办法找到其他在解析中的解，但仍然可以直接推导得出其解的部分数学性质[2]。最初提出利用变量分离所有变量边值法则来解决传统数学上的物理微分方程边值问题时，数学家们就提出了微分方程的边值问题；由于它将微分方程的边值问题广泛应用在化学工程上，近年来对关于微分方程边值问题的理解的深入研究已经得到很多国外学者的高度关注[3]。

在数论中，我们知道任意一个实数都可以表示成连分式的形式[4]。从 2004 到 2007 年，李顺初、郑鹏社等人研究了含参拟线常微分方程[3]、常微分方程[5]、复合变形 Bessel 方程[6]、二阶齐次线性微分方程[7]等几类微分方程的边值问题，得到了这几类定解问题的解可以写成连分式的形式，并讨论了边界条件对解的影响；而后，董晓旭、石俊华、李顺初等人又针对三区复合型微分方程[8]、扩展 Bessel 方程[9]、Bessel 方程[10]、复合型微分方程[11]、复合型二阶微分方程[12]、扩展变形 Bessel 方程[13]等微分方程的边值问题，研究其解式特征，最终得到其解的结构的相似性，使微分方程边值问题解的相似结构理论的研究更加充实；近年，针对复合型连带 Legendre 方程[14]、复合 Laguerre 方程[15]、半阶变形 Bessel 方程[16]等定解问题，张红丽、赵超超、李顺初等人研究得出其解式的相似结构并应用于油气藏模型求解中。我们知道微分方程在石油等各个领域的应用十分广泛，在这方面也有很多人做了研究，比如肖绪霞、李伟、李顺初等人针对非线性球向渗流复合油藏模型[17]、复合油藏渗流模型[18]、复合油藏球向渗流模型[19]、多层复合油藏渗流模型[20]等油气藏模型，利用 Laplace 变换将模型转换成熟悉的微分方程组求解，最终得到模型在 Laplace 空间中的解也具有连分式乘积形式的相似结构，这种结构只与边界条件有关，更直观地分析模型中各个参数对解的影响。

那么复合 Riccati-Bessel 方程的边值问题的解是否也能写成连分式乘积的形式呢？

在常微分方程的积分法中，Riccati 方程有着特殊的地位，曾经也有学者研究了 Riccati 方程的解[21]；Riccati-Bessel 方程是特殊的 Riccati 方程，其解 Riccati-Bessel 函数在电子球体的散射电磁学和散射物理研究中也具有着重要意义[22]。

本文研究以下复合 Riccati-Bessel 方程的边值问题：

$$\begin{cases} x^2 y_1'' + \left[\left(\dfrac{\mu_{n1}}{a_1}\right)^2 x^2 - l_1(l_1+1)\right] y_1 = 0,\ \ a<x<c \\ x^2 y_2'' + \left[\left(\dfrac{\mu_{n2}}{a_2}\right)^2 x^2 - l_2(l_2+1)\right] y_2 = 0,\ \ c<x<d \\ \left[E y_1 + (1+EF) y_1'\right]\big|_{x=a} = Q \\ y_1\big|_{x=c} = \alpha y_2\big|_{x=c} \\ y_1'\big|_{x=c} = \beta y_2'\big|_{x=c} \\ \left[G y_2 + H y_2'\right]\big|_{x=b} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $E,F,G,H,Q,a,b,\alpha,\beta$ 是已知的实常数，$Q \neq 0, G^2+H^2 \neq 0, 0<a<b$。

2. 预备知识

引理 1 Riccati-Bessel 方程

$$x^2 y_i'' + \left[\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)^2 x^2 - l_i(l_i+1)\right] y_i = 0, (i=1,2) \tag{2}$$

通过变量代换 $y_i = \sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} z_i, \xi = \dfrac{\mu_{ni}}{a_i} x, (i=1,2)$ 可化为标准 Bessel 方程

$$\xi^2 \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} + \left[\xi^2 - \left(l_i + \frac{1}{2}\right)^2\right] z = 0. \tag{3}$$

证：由 $y_i = \sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} z_i$ 可得 $y_i' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} z_i + \sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} z_i'$，$y_i'' = \sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} z_i'' + \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} z_i' - \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\dfrac{z_i}{x}$。将 y_1', y_1'' 带入方程(2)可得 $x^2\left[\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} z'' + \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} z' - \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\dfrac{1}{x} z\right] + \left[\left(\dfrac{\mu_{ni}}{a_i}\right)^2 x^2 - l_i(l_i+1)\right]\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} z = 0$，即

$x^2 z'' + x z' + \left[\left(\dfrac{\mu_{ni}}{a_i}\right)^2 x^2 - \left(l_i + \dfrac{1}{2}\right)^2\right] z = 0$。接着令 $\xi = \dfrac{\mu_{ni}}{a_i} x$ 可得 $\xi^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} + \left[\xi^2 - \left(l_i + \dfrac{1}{2}\right)^2\right] z = 0$。

引理 2 Riccati-Bessel 方程的通解为[1]

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[C_1 Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right) + C_2 J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right)\right], \\ y_2 &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[C_3 Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right) + C_4 J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

其中 C_1,C_2,C_3,C_4 是常数，$Y_{l_i+\frac{1}{2}}(\cdot), J_{l_i+\frac{1}{2}}(\cdot), (i=1,2)$ 分别是第一、第二类 $l_i+\dfrac{1}{2}, (i=1,2)$ 阶 Bessel 函数。

证：已知标准 Bessel 方程的通解是 $z_1=C_1Y_1(\xi)+C_2J_1(\xi),z_2=C_3Y_1(\xi)+C_4J_1(\xi)$。通过变量替换 $y_i=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}z_i,\xi=\frac{\mu_{ni}}{a_i}x,(i=1,2)$ 得出 Riccati-Bessel 方程的通解为(4)式。

引理 3 构造二元函数

$$\psi_{m,n}(x,y,t)=Y_m(xt)J_n(yt)-J_m(xt)Y_n(yt). \tag{5}$$

其中 m,n 为实常数，且

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\psi_{v,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)=\frac{v}{x}\psi_{v,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\psi_{v+1,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial y}\psi_{v,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)=\frac{v}{y}\psi_{v,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\psi_{v,v+1}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial x}\psi_{v,v+1}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)=\frac{v}{x}\psi_{v,v+1}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\psi_{v+1,v+1}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial y}\psi_{v+1,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)=\frac{v}{y}\psi_{v+1,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\psi_{v+1,v+1}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

证明：由 Bessel 函数的微分性质[1]：$\frac{\mathrm{d}J_v(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{x}J_v(x)-J_v(x),\frac{\mathrm{d}Y_v(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{x}Y_v(x)-Y_v(x)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mu_{ni}}{a_i}\left[\frac{v}{\frac{\mu_{ni}}{a_i}x}J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)-J_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)\right]=\frac{v}{x}J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}J_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mu_{ni}}{a_i}\left[\frac{v}{\frac{\mu_{ni}}{a_i}x}Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)-Y_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)\right]=\frac{v}{x}Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}Y_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right),$$

所以

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\psi_{v,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)-J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)\right]\\
&=\frac{\mathrm{d}Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)}{\mathrm{d}x}J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)-\frac{\mathrm{d}J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)}{\mathrm{d}x}Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)\\
&=\left[\frac{v}{x}Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}Y_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)\right]J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)-\left[\frac{v}{x}J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}J_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)\right]Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)\\
&=\frac{v}{x}\left[Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)-J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)\right]-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\left[Y_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)J_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)-J_{v+1}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)Y_v\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}y\right)\right]\\
&=\frac{v}{x}\psi_{v,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\psi_{v+1,v}\left(x,y,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right).
\end{aligned}$$

同理可证其他式子。

由引理 2 知 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right),\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right),(i=1,2)$ 是 Riccati-Bessel 方程的两个线性无关的解，用这两个线性无关的解构造如下引解函数

$$\begin{aligned}
&\varphi_{0,0}^{i}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x\xi}\,\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right),\\
&\varphi_{1,0}^{i}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{x}}\left[(l_i+1)\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\psi_{l_i+\frac{3}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right],\\
&\varphi_{0,1}^{i}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{\xi}}\left[(l_i+1)\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\xi\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{3}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right],\\
&\varphi_{1,1}^{i}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{x\xi}}\left[(l_i+1)^2\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-(l_i+1)\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\psi_{l_i+\frac{3}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right.\\
&\qquad\left.-(l_i+1)\frac{\mu_{ni}}{a_i}\xi\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{3}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)+\frac{\mu_{ni}^2}{a_i^2}x\xi\psi_{l_i+\frac{3}{2},l_i+\frac{3}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right].
\end{aligned}\tag{7}$$

3. 主要定理及其证明

定理 1 若复合 Riccati-Bessel 方程的边值问题(1)的解唯一，那么其左区解($a<x<c$)为

$$y_1=Q\frac{1}{E+\frac{1}{F+\Phi(a)}}\frac{1}{F+\Phi(a)}\Phi(x),\tag{8}$$

其右区解($c<x<d$)为

$$y_2=Q\frac{1}{E+\frac{1}{F+\Phi(a)}}\frac{1}{F+\Phi(a)}\frac{\varphi_{0,1}^{1}(c,c)}{\alpha\Phi^*(c)\varphi_{1,1}^{1}(a,c)-\beta\varphi_{1,0}^{1}(a,c)}\Phi^*(x).\tag{9}$$

其中 $\Phi^*(x)$ 是右相似核函数且

$$\Phi^*(x)=\frac{G\varphi_{0,0}^{2}(x,b)+H\varphi_{0,1}^{2}(x,b)}{G\varphi_{1,0}^{2}(c,b)+H\varphi_{1,1}^{2}(c,b)},c<x<d,\tag{10}$$

$\Phi(x)$ 是左相似核函数且

$$\Phi(x)=\frac{\alpha\Phi^*(c)\varphi_{0,1}^{1}(x,c)-\beta\varphi_{0,0}^{1}(x,c)}{\alpha\Phi^*(c)\varphi_{1,1}^{1}(a,c)-\beta\varphi_{1,0}^{1}(a,c)},a<x<c.\tag{11}$$

证明：由预备知识可得边值问题(1)的左、右区通解分别是

$$\begin{aligned}
y_1&=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[C_1Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right)+C_2J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right)\right],\\
y_2&=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[C_3Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right)+C_4J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right)\right].
\end{aligned}\tag{4}$$

其中 C_1,C_2,C_3,C_4 是常数， $Y_{l_i+\frac{1}{2}}(\bullet),J_{l_i+\frac{1}{2}}(\bullet),(i=1,2)$ 分别为第一、第二类 $l_i+\frac{1}{2}(i=1,2)$ 阶 Bessel 函数，且

$$y_1' = C_1\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(l_1+1)x^{-\frac{1}{2}}Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right) - x^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right)\right]$$

$$+C_2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(l_1+1)x^{-\frac{1}{2}}J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right) - x^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}x\right)\right],$$

$$y_2' = C_3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(l_2+1)x^{-\frac{1}{2}}Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right) - x^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}Y_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right)\right]$$

$$+C_4\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(l_2+1)x^{-\frac{1}{2}}J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right) - x^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}J_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}x\right)\right].$$

根据边值问题(1)的左边界条件、交界点 $x=c$ 处两个衔接条件和右边界条件有

$$\begin{aligned}&C_1\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[Ea^{\frac{1}{2}}+(1+EF)(l_1+1)a^{-\frac{1}{2}}\right]Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}a\right)-(1+EF)a^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}a\right)\right\}\\&+C_2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[Ea^{\frac{1}{2}}+(1+EF)(l_1+1)a^{-\frac{1}{2}}\right]J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}a\right)-(1+EF)a^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}a\right)\right\}=Q,\end{aligned}\tag{12}$$

$$C_1Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)+C_2J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)-C_3\alpha Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-C_4\alpha J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)=0,\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&C_1\left[(l_1+1)c^{-\frac{1}{2}}Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)\right]\\&+C_2\left[(l_1+1)c^{-\frac{1}{2}}J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)\right]\\&-C_3\beta\left[(l_2+1)c^{-\frac{1}{2}}Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}Y_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\right]\\&-C_4\beta\left[(l_2+1)c^{-\frac{1}{2}}J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}J_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\right]=0,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&C_3\left\{\left[Gb^{\frac{1}{2}}+H(l_2+1)b^{-\frac{1}{2}}\right]Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)-Hb^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}Y_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)\right\}\\&+C_4\left\{\left[Gb^{\frac{1}{2}}+H(l_2+1)b^{-\frac{1}{2}}\right]J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)-Hb^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}J_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)\right\}=0.\end{aligned}\tag{15}$$

联立方程(12) (13) (14) (15)可以求解得到 C_1,C_2,C_3,C_4。因为边值问题(1)的解唯一，所以 $D\neq 0$，结合引理 3 计算可得

$$D=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{2}}\left\{\beta\left[E\varphi_{0,0}^1(a,c)+(1+EF)\varphi_{1,0}^1(a,c)\right]\left[G\varphi_{0,1}^2(b,c)+H\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]\right.$$

$$\left.-\alpha\left[E\varphi_{0,1}^1(a,c)+(1+EF)\varphi_{1,1}^1(a,c)\right]\left[G\varphi_{0,0}^2(b,c)+H\varphi_{1,0}^2(b,c)\right]\right\},$$

$$D_1=Q\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\left\{\beta J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)\left[G\varphi_{0,1}^2(b,c)+H\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]-c^{-\frac{1}{2}}\alpha\left[(l_1+1)c^{-\frac{1}{2}}J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)\right]\left[G\varphi_{0,0}^2(b,c)+H\varphi_{1,0}^2(b,c)\right]\right\},$$

$$D_2=Q\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\left\{\alpha c^{-\frac{1}{2}}\left[(l_1+1)c^{-\frac{1}{2}}Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)\right]\left[G\varphi_{0,0}^2(b,c)+H\varphi_{1,0}^2(b,c)\right]\right.$$

$$\left.-\beta Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}c\right)\left[G\varphi_{0,1}^2(b,c)+H\varphi_{1,1}^2(b,c)\right]\right\},$$

$$D_3=Q\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}c^{-\frac{1}{2}}\left\{Gb^{\frac{1}{2}}J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)+H\left[(l_2+1)b^{-\frac{1}{2}}J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}J_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)\right]\right\}\varphi_{0,1}^1(c,c),$$

$$D_4=-Q\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}c^{-\frac{1}{2}}\left\{Gb^{\frac{1}{2}}Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)+H\left[(l_2+1)b^{-\frac{1}{2}}Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}Y_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)\right]\right\}\varphi_{0,1}^1(c,c).$$

根据 Cramer 法则可求出 $C_1=\frac{D_1}{D},C_2=\frac{D_2}{D},C_3=\frac{D_3}{D},C_4=\frac{D_4}{D}$，然后整理计算可以得出定解问题(1)左、右区解式(8)和(9)。根据定理 1，容易得出以下几个推论。

推论 1 在复合 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)中，如果右边界条件是 $y_2(b)=0,(H=0,G\neq 0)$，那么右相似核函数为

$$\Phi^*(x)=\frac{\varphi_{0,0}^2(x,b)}{\varphi_{1,0}^2(c,b)}. \tag{16}$$

推论 2 在复合 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)中，如果右边界条件是 $y_2'(b)=0,(G=0,H\neq 0)$，那么右相似核函数为

$$\Phi^*(x)=\frac{\varphi_{0,1}^2(x,b)}{\varphi_{1,1}^2(c,b)}. \tag{17}$$

4. 相似构造法步骤及应用

从以上求解复合 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)的过程，我们总结出相似构造法的具体步骤是：

第一步由边值问题(1)中左、右区定解方程的两个线性无关的 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right),\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right),(i=1,2)$ 解构造函数 $\varphi_{0,0}^i(x,\xi)$。

第二步由 $\varphi_{0,0}^2(x,\xi)$ 和 G,H (右边界条件 $\left[Gy_2+Hy_2'\right]\big|_{x=b}=0$ 的系数)构造右相似核函数 $\Phi^*(x)$，即(10)式。

第三步由 $\varphi_{0,0}^1(x,\xi)$、$\Phi^*(c)$ 及 α,β (边值问题(1)中交界点 $x=c$ 处的衔接条件 $y_1\big|_{x=c}=\alpha y_2\big|_{x=c}$，$y_1'\big|_{x=c}=\beta y_2'\big|_{x=c}$ 中的系数)构造左相似核函数 $\Phi(x)$，即(11)式。

第四步由 Q,D,E (左边界条件 $\left[Ey_1+(1+EF)y_1'\right]\big|_{x=a}=Q$ 的系数)和 $\Phi(x)$ 得边值问题(1)的左区($a<x<c$)解 y_1 和右区($c<x<d$)解 y_2，即(8)、(9)式。

5. 举例

用以上介绍的相似构造法求解边值问题(如：$\frac{\mu_{n1}}{a_1}=1$，$\frac{\mu_{n2}}{a_2}=2$，$l_1=l_2=\frac{1}{2}$，$G=Q=2$，$a=1$，$b=10$，$c=5$， $E=F=\alpha=\beta=1$， $H=3$)

$$\begin{cases} x^2y_1''+\left[x^2-\frac{3}{4}\right]y_1=0,\ 1<x<5 \\ x^2y_2''+\left[4x^2-\frac{3}{4}\right]y_2=0,\ 5<x<10 \\ \left[y_1+2y_1'\right]\big|_{x=1}=2 \\ y_1\big|_{x=5}=y_2\big|_{x=5} \\ y_1'\big|_{x=5}=y_2'\big|_{x=5} \\ \left[2y_2+3y_2'\right]\big|_{x=10}=0 \end{cases} \tag{18}$$

第一步用方程 $x^2y_1''+\left[x^2-\frac{3}{4}\right]y_1=0,1<x<5$ 的两个线性无关的解 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_1(x)$ 和 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_1(x)$ 构造函数

$$\varphi_{0,0}^1(x,\xi)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_1(x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}J_1(\xi)-\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_1(x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}Y_1(\xi), \tag{19}$$

且

$$\varphi_{0,0}^1(x,\xi)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_1(x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}J_1(\xi)-\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_1(x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}Y_1(\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x\xi}\psi_{1,1}(x,\xi,1),$$

$$\varphi_{1,0}^1(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}^1(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{x}}\left[\frac{3}{2}\psi_{1,1}(x,\xi,1)-x\psi_{2,1}(x,\xi,1)\right],$$

$$\varphi_{0,1}^1(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_{0,0}^1(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{\xi}}\left[\frac{3}{2}\psi_{1,1}(x,\xi,1)-\xi\psi_{1,2}(x,\xi,1)\right],$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}^1(x,\xi)&=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,1}^1(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_{1,0}^1(x,\xi)\\&=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{x\xi}}\left[\frac{9}{4}\psi_{1,1}(x,\xi,1)-\frac{3}{2}x\psi_{2,1}(x,\xi,1)-\frac{3}{2}\xi\psi_{1,2}(x,\xi,1)+x\xi\psi_{2,2}(x,\xi,1)\right].\end{aligned}$$

又用 $x^2y_2''+\left[4x^2-\frac{3}{4}\right]y_2=0,5<x<10$ 的两个线性无关的解 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_1(2x)$ 和 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_1(2x)$，构造函数

$$\varphi_{0,0}^2(x,\xi)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_1(2x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}J_1(2\xi)-\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_1(2x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}Y_1(2\xi), \tag{20}$$

且

$$\varphi_{0,0}^2(x,\xi)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_1(2x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}J_1(2\xi)-\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_1(2x)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}Y_1(2\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x\xi}\psi_{1,1}(x,\xi,2),$$

$$\varphi_{1,0}^2(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}^2(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{x}}\left[\frac{3}{2}\psi_{1,1}(x,\xi,2)-2x\psi_{2,1}(x,\xi,2)\right],$$

$$\varphi_{0,1}^2(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_{0,0}^2(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{\xi}}\left[\frac{3}{2}\psi_{1,1}(x,\xi,2)-2\xi\psi_{1,2}(x,\xi,2)\right],$$

$$\varphi_{1,1}^2(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,1}^2(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_{1,0}^2(x,\xi)$$
$$=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{x\xi}}\left[\frac{9}{4}\psi_{1,1}(x,\xi,2)-3x\psi_{2,1}(x,\xi,2)-3\xi\psi_{1,2}(x,\xi,2)+4x\xi\psi_{2,2}(x,\xi,2)\right].$$

第二步利用 $\varphi_{0,0}^2(x,\xi)$ 和 $G=2,H=3$ (右边界条件 $\left[2y_2+3y_2'\right]\big|_{x=10}=0$ 的系数)构造右相似核函数

$$\Phi^*(x)=\frac{2\varphi_{0,0}^2(x,b)+3\varphi_{0,1}^2(x,b)}{2\varphi_{1,0}^2(c,b)+3\varphi_{1,1}^2(c,b)},5<x<10\,. \tag{21}$$

第三步利用 $\varphi_{0,0}^1(x,\xi)$、$\Phi^*(c)$ 及 $\alpha=1,\beta=1$ (边值问题(14)中交界点 $x=5$ 处的衔接条件 $y_1\big|_{x=5}=y_2\big|_{x=5},y_1'\big|_{x=5}=y_2'\big|_{x=5}$ 的系数)构造左相似核函数

$$\Phi(x)=\frac{\Phi^*(c)\varphi_{0,1}^1(x,5)-\varphi_{0,0}^1(x,5)}{\Phi^*(c)\varphi_{1,1}^1(1,5)-\varphi_{1,0}^1(1,5)},1<x<5\,. \tag{22}$$

第四步利用 $Q=2,E=1,F=2$ (左边界条件 $\left[y_1+2y_1'\right]\big|_{x=1}=2$ 的系数)和 $\Phi(x)$ 可得边值问题(14)的左区($1<x<5$)解

$$y_1=2\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\Phi(a)}}\frac{1}{2+\Phi(a)}\Phi(x), \tag{23}$$

和右区($5<x<10$)解

$$y_2=2\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\Phi(a)}}\frac{1}{2+\Phi(a)}\frac{\varphi_{0,1}^1(5,5)}{\Phi^*(5)\varphi_{1,1}^1(1,5)-\varphi_{1,0}^1(1,5)}\Phi^*(x). \tag{24}$$

6. 结论和认识

1) 复合 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)的左区解和右区解都具相似结构，其解式结构中的系数仅与左边界条件和交界点的衔接条件有关，与定解方程和右边界条件无关。

2) 复合 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)的左、右相似核函数结构中的系数仅与右边界条件和交界点的衔接条件有关，与左边界条件无关。

3) 根据复合 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)的左区解(6)式，我们有

$$\left[y_1+Fy_1'\right]\big|_{x=a}=\frac{Q}{E+\dfrac{1}{F+\Phi(a)}}. \tag{25}$$

4) 相似构造法在表达形式上容易观察出边值问题的解与边值条件系数之间的关系，省去复杂的推导过程，为实际问题的解决提供方便[21]。

致　谢

感谢审稿人的审阅及对文章的意见和建议。

基金项目

本项研究由西华大学人才引进项目(编号：Z201076)资助。

参考文献

[1] 刘式适，刘式达. 特殊函数[M]. 北京：气象出版社, 2002.

[2] 宋迎清，曹付华，黄新. 微分方程[M]. 武汉：武汉理工大学出版社, 2009.

[3] 郑鹏社，李顺初，张宇飞. 一类含参拟线性常微分方程的边值问题解的形式相似性[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2004, 36: 1-4.

[4] 闵嗣鹤，严士键. 初等数论[M]. 北京：高等教育出版社, 2003.

[5] 郑鹏社，李顺初，张宇飞. 一类常微分方程组解的形式相似性[J]. 吉林大学学报(信息科学版), 2005, 23(8): 56-60.

[6] 刘鹏惠，陈子春，李顺初. 复合变型 Bessel 方程组定解问题解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2006, 25(2): 23-26.

[7] 王俊超，李顺初. 二阶齐次线性微分方程解的相似结构[J]. 理论数学, 2012, 2(1): 23-27.

[8] 董晓旭. 三区复合型微分方程边值问题解的构造及其应用[D]: [硕士学位论文]. 成都：西华大学, 2015.

[9] 廖智健，李顺初. 一种求解扩展 Bessel 方程的边值问题的新方法[J]. 中国科学技术大学学报, 2013, 43(12): 976-979.

[10] 陈宗荣，李顺初. 求解 Bessel 方程的边值问题的相似结构法[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2011, 34(6): 850-853.

[11] 李顺初. 复合型微分方程的边值问题的相似构造解法[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2013, 32(4): 27-31.

[12] 石俊华. 复合型二阶微分方程边值问题解的构造法及应用[D]: [硕士学位论文]. 成都：西华大学, 2014.

[13] 冷礼辉，郑鹏社，李顺初. 求解扩展变型 Bessel 方程边值问题的相似构造法[J]. 科技通报, 2017, 33(8): 1-3.

[14] 李顺初，赵超超，桂钦民. 复合型连带 Legendre 方程边值问题解的相似结构[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2018, 33(2): 13-17.

[15] 李顺初，张红丽，郑鹏社，桂钦民. 复合型 Laguerre 方程边值问题解的相似结构[J]. 韶关学院学报, 2019, 40(9), 1-6.

[16] 李顺初，张红丽，郑鹏社，桂钦民. 一类半阶变形 Bessel 方程的边值问题解的相似结构及其在石油工程的应用[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2019, 32(4): 70-75.

[17] 肖绪霞. 求解非线性球向渗流复合油藏模型的相似构造法[D]: [硕士学位论文]. 成都：西华大学, 2013.

[18] 李全勇，李顺初，李伟，唐乙斌. 基于解相似结构的复合油藏渗流模型研究[J]. 断块油气田, 2011, 18(5): 623-625, 633.

[19] 王俊超，李顺初，许丽. 基于解的相似结构的复合油藏球向渗流模型[J]. 桂林理工大学学报, 2012, 32(4): 624-627.

[20] 王强. 多层复合油藏渗流模型新解法的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都：西华大学, 2016.

[21] 王强，李顺初，蒲俊. 求解一类 Riccati-Bessel 方程边值问题的新方法[J]. 绵阳师范学院学报, 2015, 34(5): 1-7(-11).

[22] 吴振森，王一平. 多层球电磁散射的一种新算法[J]. 电子科学学刊, 1993, 15(2): 174-180.